CHRISTIANI WOLFII

POTENTISSIMI BORUSSIÆ REGIS CONSILIARII INTIMI, CONSILIARII AULICI HASSIACI, ACADEMIÆ HALLENSIS CANCELLARII, MATHEMATUM ET PHILOSOPHIÆ IN ACADEMIA MARBURGENSI PROFESSORIS PRIMARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ SODALIS.

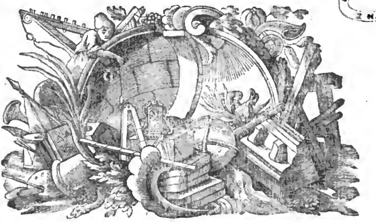
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS SECUNDUS

Qui MECHANICAM cum STATICA, HYDROSTATICAM, AEROMETRIAM atque HYDRAULICAM complectitur.

EDITIO NOVA

PRIORIBUS MULTO CORRECTIOR.



VERONÆ, MDCCXLVI.

TYPIS DIONYSII RAMANZINI BIBLIOPOLÆ APUD S. THOMAM.

SUPERIORUM PERMISSU.

Ac Privil. Illustrifs. & Excellentifs. Senatus Ven. ad decenn.



C O M I T I

HORATIO PORTO

PATRITIO VICETINO

ADOLESCENTI NOBILISSIMO.

DIONYSIUS RAMANZINUS F.

Q*Uemadmodum inter ea, quæ Civem Optimum Virumque Præclarum constituere atque comendare solent, principem locum sibi vindicant eximia Animi & Generis ornamenta: ita earum nullum est, quod in Te cumu-*

latissime non effulgeat, tibique Concivium tuorum animos suaviter non devinciat, Comes Illustrissime. Ac primo quidem ea est Familiæ tuæ laus, ut cum Animi & Generis nobilitatem secum ex Sedibus exteris adferens, vel octo ab hinc sæculis Vicetinorum Patritiorum numerum auxerit, atque exornaverit: tum ex eadem tot Illustres atque in omni virtutum genere Clarissimi Viri procreati sint, ut nulla oratione comprehendi posse videantur. Alii enim humaniorum litterarum & graviorum disciplinarum cultura coætaneos suos multo intervallo prætergressi, æternum nomen atque immortalem gloriam sibi compararunt. Alii Patriæ regimini, vel in summo ejus periculo admoti, cum eam singulari consilio atque sapientia gubernaverint, & vivos & mortuos sibi demeruerunt. Alii prudentia militari insignes, cum multa fortiter atque præclare fecissent in Italia, Hispania, Belgio, Germania, Pannonia, & alibi, ab Imperatoribus Romanis, Regibus Galliarum, & Hispaniarum, Senatu Veneto, Ducibus Sabaudiæ tot laudibus, præmiis, & jurisdictionibus cumulati sunt, ut fidem omnem superare videantur. Alii denique in Ecclesiastica Jerarchia consilio & pietate clari cum plurimum Ecclesiæ Christi profuissent, vel ab ipsis summis Pontificibus quasi divinas laudes sibi tributas intellexerunt. Quæ cum ita sint, quid necesse est modo commemo-

memo-

memorare Villarum tuarum magnificentiam atque delicias? Quid Palatia partim Antiquitate, partim vero Palladiana Architectura conspicua? Quid denique possessiones & reditus, quibus Concivibus tuis omnibus longe antecellis? Verum enim vero licet hæc summa atque magnificentissima sint, cum eximiis Animi tui dotibus comparari non merentur. Viget enim in Te summa morum suavitas, affabilitas singularis; relucet modestia, splendet mansuetudo, adest pietas; denique magnitudo Animi ea est, quæ Virum Optimum atque Civem Præstantissimum decet. Quid dicam de summo, quo polles, mentis acumine cum in rebus omnibus, tum vel maxime in studiis litterarum & Philosophiæ. Testis mihi sit Excellentissimus Doctor D. Hieronymus Zenere in Olimpicorum Theatro Physico-Mathematicæ Professor Eximius, qui in Philosophicis Studiis tibi elapso anno datus est Lector. Confitebitur ille pro singulari animi sui ingenuitate atque sapientia, quam profunde, quam cito prospexeris in theoremata Arithmeticæ, Geometriæ, Cosmographiæ, Mechanicæ, Hydrostaticæ atque Hydraulicæ. En itaque, Comes Illustrissime atque Mæcenas Amplissime, quæ & quanta sint, quæ animum meum impulerunt, ut emissurus in lucem Clarissimi Christiani Wolfii Elementa Matheseos Universæ, *ea sub felicissimis Auspiciis Tuis publici juris facerem. Te igitur oro*

atque obtestor , ut munusculum hocce qualecumque meum , quod tibi offero , benigne excipias , & me addictissimum cultorem meritorum tuorum tua protectione ac benevolentia complectaris . Quod si illud Tibi acceptum , meque tua gratia auctum sentiam , non omittam pro viribus operam meam in laudibus Virtutis & Magnificentiæ tuæ celebrandis collocare . Vale .

PRÆ-

PRÆFATIO.

NOva hæc Matheseos elementa eo fine conscripsimus, ut Mathematum cultores palmarias Matheseos universæ veritates labore facili intra breve temporis spatium sibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: ita enim futurum confidimus, ut ad legendos quosvis Auctores, qui de rebus mathematicis commentati sunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quascunque a Mathesi diversas scientias severius & fructuosius tractandas accedant. Atque eodem consilio novæ huic Elementorum editioni plurima adjecimus, quæ in priore non leguntur, ut ideo totum opus in duos tomos divisum antea, in quatuor nunc secari opus fuerit. Prodit jam Tomus secundus, qui Mechanicam, Hydrostaticam, Aerometriam & Hydraulicam complectitur, atque ideo motum & æquilibrium solidorum ac fluidorum exponit. Veteres, præeunte ARCHIMEDE in libris *de æquiponderantibus & insidentibus humido*, ultra æquilibrium gravium non sunt progressi, primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid ad-

dere

dere ausus motum gravium ad notiones distinctas & fœcundas revocavit, usum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clarissimo specimine demonstrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indivisibilium uberius exculta, tandemque ad Analysin certam revocata terebatur, ut sublimiora ingenia ad veritates maxime abstrusas atque abditas accederent. Admiranda igitur de motu solidorum ac fluidorum hodie prostant inventa, sed ita ab inventoribus proposita, ut ab iis tangendis arceantur tyrones & quotquot in Mathesi consenescere, omneque tempus suum consumere prohibentur. Nostrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui sedato animo in elementis nostris tractandis progreditur eo, quo conscripta sunt, ordine, illa eadem facilitate perspiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perspexerat. Ea de causa Mechanica inprimis & Hydraulica plurimis accessionibus in nova hac editione aucta. Ita theoriam de motu gravium effecimus generalem, ut, cum in priore editione tantummodo cum GALILÆO motum uniformiter acceleratum exposuerimus, nunc ad accelerationem quacunque lege factam illam extenderimus. Addidimus methodos investigandi centrum gravitatis in spatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum, tendentiamque mediam in motu composito, ut alia taceamus. Integrum caput octavum de descensu & ascensu corporum in lineis curvis, quod præclara maxime continet ævi hujus inventa, loco conveniente inseruimns. Theoriam de motu penduli ex sublimioribus inventis effecimus uberiorem: id quod etiam circa theoriam de

centro

centro oscillationis curæ nobis cordique fuit. Eadem nobis dicenda sunt de motu projectorum & de motu corporum ex percussione. Inprimis autem theoria de viribus centralibus uberrime a nobis pertractata, cujus antea primas tantummodo lineas duxeramus. Caput decimum quartum integram de resistentia medii nunc demum accedit. Non commemoramus ea, quæ passim adspersa a nobis fuere: qua de causa de Hydrostaticæ & Aerometriæ accessionibus specialiora non proferimus. Hydraulicæ tandem theoriam non uno modo reddidimus ampliorem, eamque duobus integris capitibus de cursu fluminum & de percussione fluidorum auximus. Ac hoc pacto finem, quem intendimus, nos consecutos esse speramus. Cur ex intervallo demum prodeat Tomus secundus, causæ in vulgus notæ sunt, ut de iis dicere supervacaneum existimem. Operam daturi sumus, ut Tomus tertius, etsi mole secundum superaturus, celerius sequatur, si Deo ita visum fuerit. Nullus vero dubito non defuturam in hoc secundo Tomo materiam, in qua interea industriam suam exerceant Mathematum cultores, donec tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo, quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt: utut ingens quoque eorum farrago sit, quæ ad vitæ non minus jucunditatem, quam necessitatem utilia. Quotquot igitur animum habent sciendi cupidum ex materiis, de quibus hic instituitur tractatio, plurimum voluptatis percipient. Neque ullus dubito fore, ut, qui cum attentione in is discutiendis versati fuerint, artem inveniendi ipso usu sibi sint comparaturi, qua deinceps extra Mathesin felicissime utentur. Dabam Marburgi Cattorum d. 28. Martii A. 1733.

TYPO.

TYPOGRAPHUS VERONENSIS
L E C T O R I.

NOva tandem cura prodit in lucem Volumen alterum *Elementorum Matheseos Universæ*, quæ a Viro immortali Christiano Wolfio in usum studiosæ juventutis jam pridem edita sunt. Mora quidem longior fortasse quam oportuit; sed tamen non una de caussa necessaria. Primo enim cum quatuor ab hinc annis Domus mea tota ac typographica instrumenta fortuito incendio perierint, nihil adhuc, nisi de jactura sarcienda cogitare potui. Quanti laboris fuerit desperatis jam rebus præsidium quærere, secum facile reputabit, qui rerum humanarum non sit ignarus. Deinde vero refectis paulisper viribus, cum jam omnia præsto essent, quæ susceptæ editioni perficiendæ necessaria videbantur; defuit qui eidem præesset, sublato per id tempus Josepho Sererio, eximio Medico ac Philosopho, cujus in Epistola primo Volumini præmissa perhonorificam mentionem feci. Non deerant sane, qui spe ingentis mercedis opem mihi pollicerentur; sed ego non tam Mathematicum quærebam quam Virum probum, rebusque meis tam afflictis non admodum gravem. Is demum se mihi obtulit Cajetanus Marzacalia, Vir modestia insigni & summa in Mathematicisrebus peritia, qui honestis conditionibus id oneris rogatus suscepit. Quid ab eo in altero hoc Volumine præstitum sit, quantamque diligentiam adhibuerit, ut quam emendatissimum prodiret, tu ipse colliges: nec enim, qua est verecundia, pati vult ut hac de re plura dicam. Volumen primum in ingenti illa mea calamitate flammis absumptum propediem expecta, ac si industriam nostram probabis, curabo ne reliqua diutius desideres. Vale.

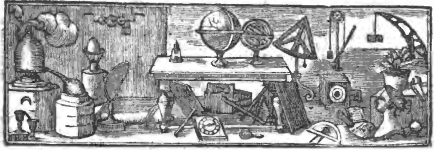
ELEMENTA MECHANICÆ ET STATICÆ.

PRÆFATIO.

APleriſque Auctoribus, qui Mechanicæ elementa in uſum tyronum explicarunt, non omnis motus ratio habetur, ſed ejus tantum, qui vel virium, vel temporis aliquo compendio ope machinarum perficitur. Nec improbandum eſt eorum inſtitutum, ſi quidem plura docere non intendunt, quam quæ in conſtruendis & examinandis machinis uſum prabere poſſunt. Quoniam tamen nobis conſtitutum eſt, Matheſeos elementa dare non modo ad uſum vitæ humanæ, ſed & ad profectum ſcientiarum, Phyſicæ præſertim, ſnfficientia; ideo conſultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illuſtrandam motus doctrinam hactenus inventa. Hæc enim neceſſaria ſunt ad Naturæ cognitionem, ut ſine iis certa obtineri nunquam poſſit, cum in

in motu plurimorum phœnomenorum ratio contineatur. Ipsarum vero etiam machinarum consideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in physicis aliquando versaturus, cum motus corporum organicorum explicatio frustra sine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars motuum scientiæ superstruatur, experientia clarissime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos necessitatibus vitæ humanæ impulsi non sine maximo sudore perageremus. Eum igitur in finem non solum machinarum simplicium [quod vulgo fieri solet] rationem omnem fideliter exposui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum constructionem scitu necessaria sunt, & desideratam hactenus in istiusmodi elementis tractationem de potentiarum ad machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his solis contenti præterire possunt motus regulas: machinarum enim vires sine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica sejungant; consultius tamen visum fuit sororio vinculo utramque connecti, cum ita demonstrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELE-



ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Æquabili.

DEFINITIO 1.

1. MEchanica est scientia motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de æquilibrio solidorum agit.

DEFINITIO 2.

2. *Quies* est permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero est continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. Moveri *nempe dicitur corpus, si successive aliis aliisque corporibus quiescentibus, aut ejusdem corporis quiescentis partibus fit contiguum.*

DEFINITIO 3.

4. *Gravitas* est nisus deorsum versus centrum terræ.

DEFINITIO 4.

5. *Gravitatio* est pressura, quam corpus in aliud sibi subjectum vi gravitatis suæ exercet.

DEFINITIO 5.

6. *Massa* corporis est materia ipsi cohærens, hoc est, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO 6.

7. *Moles* seu *volumen* est expansio corporis secundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur ideo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO 7.

9. *Vis Motrix* seu *vis* simpliciter est principium motus, seu id, unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, si cum motu actuali conjungitur, qualis est in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, si ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, seu quæ in solo nisu seu conatu ad motum consistit, qualis est in globo ex filo suspenso & in elatere tenso, quod se restituere nititur.

SCHOLION.

10. *Hanc virium distinctionem dudum agnovere inter homines plebejos molitores nostrates.* Mortuam *enim vocant* aquam *in alveo stagnantem aut segniter admodum fluentem*; vivam *vero, quæ impetu concepto rotis molendinorum circumagendis sufficit. Acutissimus* Leibnitius *cum magnum momentum in ea situm esse deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in mechanicam introduxit* (a).

DEFINITIO 8.

11. *Tempus* hic voco eam temporis partem, qua motus durasse supponitur.

DEFINITIO 9.

12. *Spatium* est linea, quam mobile instar puncti consideratum motu suo describere concipitur.

DEFINITIO 10.

13. *Velocitas* seu *Celeritas* est ea vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore spatium datum percurrendi.

COROLLARIUM.

14. Celeritas ideo dupla est, qua eodem tempore spatium duplum describitur; tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum; & ita porro in infinitum in quacunque multiplicium vel submultiplicium specie.

SCHOLION I.

15. *Nimirum celeritas tanto major censetur ab omnibus, quanto majus spatium eodem tempore percurrit mobile. Ponamus mobile* A *intervallo unius minuti secundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile* B, *quod intervallo unius secundi percurrat spatium trium pedum. Ultro fatebuntur omnes celeritatem ipsius mobilis* B *majorem esse celeritate alterius* A.

SCHOLION 2.

16. *Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod satis patet attendenti, celeritas quasi per totam mobilis massam diffusa concipitur, ita ut eadem in singulis partibus existat. Proprie loquendo est gradus vis motricis.*

DEFINITIO 11.

17. *Linea directionis* est, juxta quam corpus progredi nititur.

(a) Act. Erudit. A. 1695. p. 149.

DEFINITIO 12.

18. Velocitas sumta cum directione dicitur *Conatus*.

SCHOLION.

19. *Unde conatus censetur major, quo major est celeritas.*

DEFINITIO 13.

20. *Vis resistendi* dicitur, quæ in contrarium seu juxta oppositam directionem vis cujuscunque alterius agit.

SCHOLION.

21. *Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.*

DEFINITIO 14.

22. *Quantitas motus*, momentanea scilicet, est factum ex celeritate in massam. *Leibnitius* appellat *Quantitatem motionis*.

SCHOLION.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & a quantitate massæ, & a quantitate celeritatis, ita ut in eodem corpore quantitas motus existimetur major, si major est celeritas, qua movetur, & in duobus corporibus, quorum eadem est celeritas, ejus quantitas motus major sit, cujus massæ quantitas major est.*

DEFINITIO 15.

24. *Motus æquabilis* est, si mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA 1.

25. *Nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit.*

SCHOLION.

26. *De hoc principio plura diximus in* Ontologia *seu* Philosophia prima *integro capite 2. sect. 1. part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite supposuit* Archimedes *in libris de æquiponderantibus.*

AXIOMA 2.

27. *Si mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia spatia describit.*

SCHO-

SCHOLION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum ſpatium dato tempore percurrendum* (§. 13); *nulla ſane ratio eſt, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diverſa ſpatia deſcribere deberet. Deſcribit ideo æqualia* (§. 25). *Axiomatis hujus veritatem apertius ſtabilimus in* Philoſophia prima (§. 656 Ontol.), *ubi etiam ſcientiarum mathematicarum principia demonſtrativa ratione a priori ex notionibus ſimplicioribus deduximus.*

AXIOMA 3.

29. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia ſpatia deſcribunt.*

SCHOLION.

30. *Patet idem per axioma primum* (§. 25). *Conferatur de eodem* Philoſophia prima §. 660.

THEOREMA 1.

31. *In motu æquabili ſpatia a mobili percurſa ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis *per hypoth.*; mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare ſi tempore T deſcribit ſpatium *ſ*, alio tempore *t* priori æquali deſcribit quoque ſpatium S priori æquale (§. 27), ideoque tempore bis T ſpatium bis *ſ*, imo tempore quocunque multiplici ſeu ſubmultiplici nt ($=$ T) ſpatium $nſ$ ($=$ S). Sunt igitur ſpatia *ſ* & S ut tempora *t* & T (§. 149 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur, ſpatia deſcripta ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore *t* percurrit ſpatium *ſ*, etiam mobile B, quod eadem celeritate fertur *per hypoth.*, eodem tempore *t* percurrit ſpatium *ſ* priori æquale (§. 29). Sed ſi idem mobile percurrit tempore quocunque alio T ſpatium S, erit hoc ad alterum *ſ* ut T ad *t* (§. 31). Quare cum ſpatium *ſ* ſit idem, quod a mobili A tempore *t* percurritur *per demonſtrata*; ſpatia *ſ* & S a mobilibus A & B temporibus *t* & T deſcripta ſunt ut tempora *t* & T, quibus deſcribuntur. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, ſpatia eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore *t* celeritate *c* ſpatium *ſ* deſcribit; eodem tempore *t* celeritate bis *c* deſcribit ſpatium bis *ſ*, & celeritate quacunque multiplici vel ſubmultiplici nc ſpatium quodcunque multiplex vel ſubmultiplex $nſ$ (§. 31). Erunt ideo ſpatia *ſ* & S ($= nſ$) deſcripta ut celeritates *c* & C ($= nc$). Quare ſi mobile B eodem tempore *t* celeritate C deſcribit ſpatium S; erit adhuc ſpatium a mobili A deſcriptum *ſ* ad ſpatium a mobili B eodem tempore deſcriptum S ut celeritas illius *c* ad celeritatem hujus C. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribat mobile A celeritate *c* ſpatium *ſ* tempore *t*, & B celeritate C ſpatium S tempore T. Ponamus idem mobile B celeritate *c* deſcribere ſpatium *q* tempore T. Quoniam celeritas *c* mobilium A & B eadem; erit $q:ſ=$

$T:t$ (§. 32). Et quia spatia S & q eodem tempore T describuntur; erit $S:q = C:c$ (§. 33). Ergo $Sq:fq = TC:tc$ (§. 213 *Arith.*), consequenter $S:f = TC:tc$ (§. 181 *Arith.*), ideoque spatia sunt in ratione composita temporum & celeritatum (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

35. Si $S = f$; erit $CT = ct$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $C:c = t:T$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si duo corpora motu æquabili æqualia spatia describunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM 2.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$ (§. 149 *Arith.*), ideoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali spatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 5.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates* C *&* c *sunt in ratione composita ex directa spatiorum* S *&* f *& reciproca temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Est enim $S:f = CT:ct$ (§. 34). Quare cum sit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arith.*); erit $C:c = St:fT$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

38. Quoniam $C:c = St:fT$ (§. 37); erit $C:c = \frac{S}{T} : \frac{f}{t}$ (§. 181 *Arith.*). Quare celeritas C analytice exprimitur per $\frac{S}{T}$, hoc est, celeritas est ut spatium per tempus divisum.

THEOREMA 6.

39. *Si duo corpora motu æquabili lata celeritatibus* C *&* c *describunt spatia* S *&* f; *tempora* T *&* t, *quibus describuntur, erunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum, & sunt præterea ut spatia per celeritates divisa.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $S:f = CT:ct$ (§. 34); erit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arith.*). Quare $T:t = cS:Cf$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. primum.*

Cum sit *per demonstr.* $T:t = cS:Cf$; erit $T:t = \frac{cS}{cC} : \frac{Cf}{cC}$ (§. 181 *Arith.*) $= \frac{S}{C} : \frac{f}{c}$. *Q. e. alterum.*

THEOREMA 7.

40. *Si spatia* S *&* f *a duobus mobilibus motu æquabili descripta fuerint ut celeritates* C *&* c; *tempora* T *&* t *erunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Est enim $S:f = CT:ct$ (§. 34). Quare si esse debet $S:f = C:c$, necesse est ut sit $T = t$ (§. 178 *Arith.*). Est vero $S:f = C:c$ *per hypoth.* Ergo etiam $T = t$. *Q. e. d.*

Idem etiam hoc modo ostenditur. $S:f = C:c$ *per hypoth.* Sed $S:f = CT:ct$ (§. 34). Ergo $C:c = CT:ct$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter $1:1 = T:t$ (§. 185 *Arith.*). Quare cum sit $1 = 1$, erit etiam $T = t$ (§. 149 *Arith.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

41. *Quantitates motus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur,* Q *&* q, *sunt in ratione composita celeritatum* C *&* c *& massarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Est enim $Q = CM$, & $q = cm$ (§. 22). Quare $Q:q = CM:cm$ (§. 168 *Arith.*), hoc est Q habet ad q rationem compositam ipsius C ad c & ipsius M ad m (§. 159 *Arith.*) *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM 1.

42. Si $Q = q$; erit $CM = cm$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $C : c = m : M$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si quantitates motus duorum mobilium motu æquabili latorum fuerint æquales; celeritates habent rationem massarum reciprocam.

COROLLARIUM 2.

43. Quare si ulterius $M = m$; erit etiam $C = c$ (§. 149 *Arith.*), hoc est, si duorum mobilium ejusdem massæ motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM 3.

44. Similiter si $C = c$; erit $M = m$ (§. 149 *Arith.*), hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moveantur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt massæ eorundem æquales.

THEOREMA 9.

45. *Duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, celeritates* C & c *sunt in ratione composita ex quantitatum motus* Q & q *directa & massarum* M & m *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\overline{Q : q = CM : cm}$ (§. 41)

erit $\overline{Qcm = qCM}$ (§. 297 *Arith.*)

$C : c = Qm : qM$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

46. Si $C = c$; erit $Qm = qM$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $Q : q = M : m$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus massarum rationem habent.

COROLLARIUM 2.

47. Quod si ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $Q = q$ (§. 149 *Arith.*), ideoque si duo mobilia æqualem massam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales sunt.

THEOREMA 10.

48. *In motu æquabili massæ corporum* M & m *sunt in ratione composita ex quantitatum motus* Q & q *directa & celeritatum* C & c *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\overline{Q : q = CM : cm}$ (§. 41)

erit $\overline{Qcm = qCM}$ (§. 297 *Arith.*)

$M : m = Qc : qC$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

49. Si $M = m$; erit $Qc = qC$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $Q : q = C : c$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum massæ fuerint æquales; quantitates motus sunt ut velocitates.

THEOREMA 11.

50. *In motu æquabili quantitates motus* Q & q *sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum* M & m *atque spatiorum* S & s *& reciproca temporum* T & t.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $C : c = St : sT$ (§. 37)

& $\overline{Q : q = CM : cm}$ (§. 41)

erit $\overline{CQ : cq = CMSt : cmsT}$ (§. 213 *Arith.*)

$\overline{Q : q = MSt : msT}$ (§. 185 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

51. Si $Q = q$; erit $MSt = msT$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $M : m = sT : St$, $S : s = mT : Mt$, & $T : t = MS : ms$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; 1. Massæ eorundem sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca spatiorum: 2. Spatia sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca massarum: 3. Tempora denique sunt in ratione composita massarum & spatiorum.

COROLLARIUM 2.

52. Si præterea $M = m$; erit $sT = St$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $S : s = T : t$ (§. 299 *Arith.*). Nempe si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac massæ fuerint æquales; spatia temporum rationem habent.

COROL-

COROLLARIUM 3.

53. Si ulterius $T = t$; erit quoque $S = s$ (§.149 *Arith.*). Duo igitur mobilia, quorum massæ ac quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt.

COROLLARIUM 4.

54. Si præter $Q = q$ fuerit $S = s$; erit $mT = Mt$ (§.50 *Mech.* & §.149 *Arith.*); ideoque $M : m = T : t$ (§.299 *Arith.*), hoc est, si duo mobilia, quorum quantitates motus æquales sunt, æquabili motu æqualia spatia percurrunt; massæ eorundem sunt temporibus proportionales, vel, quod perinde est, tempora sunt massis proportionalia.

COROLLARIUM 5.

55. Si ulterius $T = t$; erit etiam $M = m$ (§.149 *Arith.*) ideoque corporum, quorum quantitates motus æquales sunt & quæ eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt, massæ æquales sunt.

COROLLARIUM 6.

56. Si præter $Q = q$ fuerit $T = t$; erit $MS = ms$ (§. 50 *Mech.* & §. 149 *Arith.*), ideoque $S : s = m : M$, hoc est, spatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili descripta, sunt in ratione massarum reciproca.

THEOREMA 12.

57. *In motu æquabili spatia* S *&* s *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca massarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : msT$ (§. 50); erit $QmsT = qMSt$ (§. 297 *Arith.*). Unde $S : s = QTm : qtM$ (§.299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

58. Si $S = s$; erit $QTm = qtM$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $Q : q = tM : Tm$, $M : m = QT : qt$, $T : t = qM : Qm$ (§.299 *Arith.*). Quodsi ideo duo mobilia motu æquabili per æqualia spatia feruntur; erunt 1. quantitates motus in ratione composita ex directa massarum & reciproca temporum: 2. massæ in ratione composita quantitatum motus atque temporum: 3. tempora in ratione composita ex directa massarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM 2.

59. Si præter $S = s$ fuerit $M = m$; erit $QT = qt$ (§.149 *Arith.*), ideoque $Q : q = t : T$ (§.299 *Arith.*). Nimirum duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, quantitates motus sunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia spatia feruntur.

COROLLARIUM 3.

60. Si præter $S = s$ fuerit $T = t$; erit $qM = Qm$ (§. 58 *Mech.* & §. 149 *Arith.*), ideoque $Q : q = M : m$ (§. 299 *Arith.*). Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia spatia æquali tempore motu æquabili feruntur, quantitates motus massis proportionales sunt.

THEOREMA 13.

61. *Corporum motu æquabili latorum massæ* M *&* m *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca spatiorum* S *&* s.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : msT$ (§.50); erit $QmsT = qMSt$ (§. 297 *Arith.*). Unde $M : m = QTs : qtS$ (§.299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

62. Si $M = m$; erit $QTs = qtS$ (§.149 *Arith.*), ideoque $Q : q = tS : Ts$, $S : s = QT : qt$ & $T : t = qS : Qs$ (§.299 *Arith.*), hoc est, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum massæ æquales, 1. quantitates motus sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca temporum: 2. spatia sunt in ratione quantitatum motus & temporum composita: 3. tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca quantitatum motus.

COROLLARIUM 2.

63. Si præter $M = m$ fuerit $T = t$; erit $qS = Qs$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $Q : q = S : s$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, quantitates motus duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, spatiis æquali tempore peractis proportionales sunt.

THEOREMA 14.

64. *In motu æquabili tempora* T *&* t *sunt in ratione composita ex rationibus directis*

rectis massarum M & m *atque spatiorum* S & s *& reciproca quantitatum motus* Q & q.

Demonstratio.

Quoniam $Q:q = MSt:msT$ (§. 50); erit $QmsT = qMSt$ (§. 297 *Arith.*). Unde $T:t = qMS:Qms$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

Corollarium.

65. Si $T = t$; erit $qMS = Qms$ (§. 149 *Arith.*), ideoque $Q:q = MS:ms$, $M:m = Qs:qS$ & $S:s = Qm:qM$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquidiuturnus; erunt 1. quantitates motus in ratione massarum & spatiorum composita: 2. massæ in ratione composita ex quantitatum motus directa & spatiorum reciproca: 3. spatia in ratione composita ex directa quantitatum motus & reciproca massarum.

Scholion.

66. *Suadeo tyronibus, ut hactenus demonstrata numeris illustrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus A, cujus massa sit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 secundorum emetiri spatium 12 pedum; & corpus aliud B, cujus massa sit ut 5, tempore 8 secundorum emetiri spatium 16 pedum: habebimus* $M = 7$, $T = 3$, $S = 12$, $m = 5$, $t = 8$, $s = 16$, *ideoque* $C = 4$, $c = 2$ (§. 38), $Q = 28$, $q = 10$ (§. 22). *Hinc utique deprehenditur.*

$C:c = St:sT$ (§. 37)
$4:2 = 12.8:16.3 = 4:2$
$S:s = CT:ct$ (§. 34)
$12:16 = 4.3:2.8 = 12:16$
$T:t = cS:Cs$ (§. 39)
$3:8 = 2.12:4.16 = 1.3:2.4 = 3:8$
$C:c = Qm:qM$ (§. 45)
$4:2 = 28.5:10.7 = 4.1:2.1 = 4:2$
$M:m = Qc:qC$ (§. 48)
$7:5 = 28.2:10.4 = 7.1:5.1 = 7:5$
$S:s = TQm:tqM$ (§. 57)
$12:16 = 3.28.5:8.10.7 = 3.4.1:8.2.1 = 12:16$
$M:m = TQs:tqS$ (§. 61)
$7:5 = 3.28.16:8.10.12 = 3.7.2:1.10.3 = 7:5$
$Q:q = MSt:msT$ (§. 50)
$28:10 = 7.12.8:5.16.3 = 7.4.1:5.2.1 = 28:10$

Eodem modo illustrantur singula theorematum corollaria.

Sit enim $S = 12$, $T = 6$, $s = 8$, $t = 4$; *erit* $C = 12:6 = 2$ & $c = 8:4 = 2$ (§. 38), *consequenter ob* $C = c$ (§. 32)

$$S:s = T:t$$
$$12:8 = 6:4$$

Sit $S = 12$ & $s = 12$. *Quoniam* $S = CT$ & $s = ct$ (§. 34); *si* $C = 2$ & $c = 3$; *erit* $T = 6$ & $t = 4$. *Habemus ideo* (§. 35)

$$C:c = t:T$$
$$2:3 = 4:6$$

Si pro S & s *ponatur* Q & q, *pro* T & t *vero* M & m; *idem exemplum illustrabit primum theorematis 8 corollarium* (§. 42). *Iisdem observatis exemplum præcedens in Corollarium primum theorematis noni quadrat* (§. 46).

Sit denique $Q = 12$, $q = 8$, $M = 4$, $m = 4$; *erit* $C = 12:4 = 3$ & $c = 8:4 = 2$ (§. 22), *ideoque* (§. 49)

$$Q:q = C:c$$
$$12:8 = 3:2$$

CAPUT II.

De Motu uniformiter accelerato & retardato.

Definitio 16.

67. **M***otus acceleratus* est, qui nova capit celeritatis incrementa. *Uniformiter acceleratus* est, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

Corollarium 1.

68. In motu ideo uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora, quibus acquiruntur.

Corollarium 2.

69. Quare si tempuscula elementaria fuerint dt & dT, celeritates elementares iis respondentes dc & dC; erit $t:T = c:C$ (§. 192 *Arith.* & §. *præc.*). Sunt enim t & T summæ ipsorum dt & dT,

& *d*T, *c* & C vero summæ ipsorum *dc* & *d*C (§. 178 67 *Arith.*)

Definitio 17.

70. *Motus retardatus* est, cujus celeritas decrescit. *Uniformiter retardatus* dicitur, si continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

Axioma 2.

71. *Corpus semel quiescens nunquam movebitur, nisi aliunde ad motum concitetur: semel autem motum eadem velocitate & secundum eandem directionem moveri perget, nisi a causa aliqua statum suum mutare cogatur.*

Scholion.

72. *Hæc satis manifesta sunt ex axiomate omnis Philosophiæ fundamentali, quod nihil fit sine ratione sufficiente (§. 25): quemadmodum idem ostendimus in* Cosmologia. *Nec experientia eidem repugnat, cum semper ratio assignari possit tam motus retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumstantias satis perpendamus.*

Corollarium 1.

73. Corpus itaque, quod nonnisi impulsu semel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

Corollarium 2.

74. Quodsi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur necesse est, altera nempe, qua progrederetur secundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

Axioma 3.

75. *Si nisus & renisus duorum corporum fuerint æquales; motus nullus subsequitur; sed corpora se mutuo impellentia juxta se invicem quiescunt.*

Axioma 4.

76. *Si corpus motum secundum eandem directionem, qua movetur, impellitur, motus acceleratur* (§. 67).

Axioma 5.

77. *Corpus motum a vi resistente retardatur* (§. 20. 70).

Observatio 1.

78. *Gravitas corporum eadem in qualibet a superficie telluris distantia, in qua experimentum capere licet: quam imposterum* Intervallum non nimis magnum *dicemus*.

Observatio 2.

79. *Gravia descendunt motu accelerato.*

Theorema 15.

80. *Si corpus ex quiete motu uniformiter accelerato fertur, spatia sunt in ratione duplicata temporum.*

Demonstratio.



Designet recta AB tempus, quo motus mobilis acceleratur, & rectæ ad AB applicatæ PM, BC sint ut celeritates in fine temporis AP, AB acquisitæ. Quoniam motus uniformiter acceleratur & motus a quiete incipit *per hypoth.*; erit AP : AB = PM : BC (§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB perpendiculares *per constr.* ideoque inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Est igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*), ideoque rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ponamus *pm* esse alteri lineæ PM infinite propinquam: celeritates PM & *pm* non different nisi quantitate infinite parva *mr* in fine tempusculi P*p*, atque ideo tempusculo toto P*p* eadem celeritate fertur mobile (§. 4 *Analys. Infinit.*), consequenter motus isto tempusculo æquabilis est (§. 24). Enimvero

vero in motu æquabili ſpatium eſt ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arith.*), ideoque ſpatium a mobili tempuſculo P*p* confectum eſt ut rectangulum P*pr*M (§. 375 *Geom.*), conſequenter cum ſingulis tempuſculis, quibus AP conſtat, ipſi P*p* æqualibus, iſtiuſmodi parallelogrammula reſpondeant, quæ ſimul ſumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analyſ. infinit.*), area APM exprimit ſpatium a mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit ſpatium a mobili tempore AB confectum. Sunt igitur ſpatia temporibus AP & AB deſcripta ut triangula APM & ABC, conſequenter ob eorundem ſimilitudinem (§. 268 *Geom.*) in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc eſt, temporum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora (§. 68); ſpatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus deſcribuntur, acquiſitarum (§. 80).

COROLLARIUM 2.

82. In motu uniformiter accelerato tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 159 *Arith.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM 3.

83. Etiam celeritates in fine temporum ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum illis deſcriptorum (§. 159 *Arith.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA 16.

84. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, creſcunt temporibus æqualibus ſecundum numeros impares* 1, 3, 5, 7, 9 &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5 &c.; ſpatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (§. 80). Quodſi ergo ſubtrahas ſpatium intra minutum unum percurſum a ſpatio intra duo confecto 4; remanebit ſpatium minuto ſecundo reſpondens 3. Eodem modo reperitur ſpatium minuto tertio abſolutum $9 - 4 = 5$, ſpatium quarto reſpondens $16 - 9 = 7$, quod quinto convenit $25 - 16 = 9$ &c. & ita porro (§. 83 *Analyſ. finit.*). Spatium ergo minuti primi eſt ut 1, ſecundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9 &c. ideoque ſpatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur ſecundum numeros impares, 1, 3, 5, 7, 9 &c. *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

85. *Corpora gravia in medio non reſiſtente per intervalla non nimis magna motu uniformiter accelerato deſcendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia deſcendant motu accelerato (§. 79); vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Eſt vero gravitas in intervallo non nimis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorſum impelli debent (§. 25). Itaque ſi tempuſculo primo impelluntur celeritate *c*, etiam ſecundo celeritate *c* impellentur, imo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non reſiſtit *per hypoth.* celeritatem ſemel acquiſitam con-

ſtanter retinent (§. 71), ideoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, conſequenter motu uniformiter accelerato deſcendunt (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

86. Sunt igitur ſpatia deſcenſus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81) & ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. creſcunt (§. 84).

COROLLARIUM 2.

87. Tempora vero, itemque velocitates ſunt in ratione ſpatiorum ſubduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION 1.

88. *Dum gravia deſcendere ſupponimus in medio non reſiſtente, ab omni externo impedimento abſtrahimus, quocunque tandem nomine veniat & a quacunque cauſa ortum trahat. Unde motum quoque ſecludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Aſtronomia adſtruendam, in tranſverſum rapiuntur gravia ipſo deſcenſus tempore: quamvis in intervallo non nimis magno nulla inde in deſcenſum gravium irregularitas irrepat.*

SCHOLION 2.

89. Galilæus Galilæi, *qui legem deſcenſus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experimentis conſonam deprehendit* (a). *In tabula ſcilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiorem, agglutinata intus membrana, ne ſcabritie ſua pilam aneam bene politam in deſcenſu remoraretur. Eam poſtea ſupra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis ſucceſſive elevavit, & tempus, in quo pila per canalem deſcendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit ſpatia decurſa ſemper eſſe ut temporum quadrata. Notandum vero ſpatia computanda eſſe non in longitudine, ſed in altitudine plani, ut eorum, qua inferius demonſtrabuntur.*

SCHOLION 3.

90. *Eadem experimenta modo tamen diverſo ſapius cum* Grimaldo *ſuo repetiit* Joann. Baptiſta Ricciolus (b) *plurimos globos cretaceos ejuſdem molis, ponaere 8 unciarum, ex diverſarum turrium aut aedium feneſtris demittens & tempus deſcenſus perpendiculi vibrationibus dimetiens. Perpendiculi vibrationes numeravit cum* Grimaldo *a tranſitu cauda Leonis per Meridianum uſque ad alterum tranſitum, ut certo conſtaret, quot vibrationes penduli reſpondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps uſus in obſervationibus aſtronomicis, antequam horologia oſcillatoria ab* Hugenio *fuiſſent inventa. Experimenta ſequens repraſentat tabella.*

Vibrationes penduli.	Tempus		Spatium in fine temporis.	Spatium ſingulis temporibus confectum.
	"	"'	Ped Rom.	Ped. Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

SCHOLION 4.

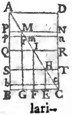
91. *Cum ideo experimenta* Riccioli *in obſervando maxime exercitati in tanto intervallo inſtituta theoria apprime conſentiant; vix attendenda eſſe videntur, quæ in contrarium affert* (c) Dechales, *qui ſe expertum ſcribit, uno minuto ſemiſecundo grave deſcenſu ſuo confeciſſe pedes* $4\frac{1}{4}$, *duobus* $16\frac{1}{2}$, *tribus* 36, *quatuor* 60, *quinque* 90, *ſex* 123. *Sufficit, quod ipſe a reſiſtentia aeris irregularitatem deducat, quam in demonſtratione inſuper habuimus.*

THEOREMA 18.

92. *Si grave in medio non reſiſtente per intervallum non nimis magnum deſcendit, ſpatium ab eo decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum deſcenſus repræſentet, in partes quotcunque æquales diviſa, & ad abſciſſas AP, AQ, AS, AB applicentur perpendiculari-



(a) In Dialogis de motu locali Dial. 3. p. m. 156. 157.
(b) Almageſt. Nov. Tom. 1. lib. 2. cap. 21. prop. 4. ſ. 89. 90.
(c) Staticæ lib. 2. prop. 11. Mund. Matth. Tom. 2. fol. 275.

liter rectæ PM, QI, SH, BC, quæ ſint ut celeritates cadendo in iſtis temporibus acquiſitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et ſpatium tempore AB percurſum eſt ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonſtratione theorematis 15 (§. 80) conſtat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter deſcriptum cum ſit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique illud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipſius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquiſita conficitur, æquale eſt ſpatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro deſcendit.

PROBLEMA I.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data deſcendit, ſpatia definire, quæ ſingulis iſtius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, ſpatium parte temporis prima 1 confectum $= x$; erit (§. 86)

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Eſt ideo ſpatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, ideoque decurſum parte ſecunda $= 3a : t^2$, tertia deſcriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86).

E. gr. ſupra in experimentis *Riccioli* (§. 90) intra 4 ſecunda globus cretaceus deſcendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo ſecundo confectum $= 240 : 16 = 15$, ſpatium confectum ſecundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$. Eſt autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA 2.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non reſiſtente per ſpatium datum deſcendit, determinare tempus, quo aliud ſpatium datum in eodem medio conficiet.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86), quæratur ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*), qui erit quadratum temporis quæſiti.
2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arith.*); prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis *Riccioli* (§. 90) intervallo 4 ſecundorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{(135 . 16 : 240)} = \sqrt{(135 : 15)} = \sqrt{9} = 3$.

PROBLEMA 3.

96. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit, determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

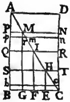
Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis, quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): qui erit ſpatium quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Per experimenta *Riccioli* globus cretaceus intervallo duorum secundorum confecit spatium 60 pedum (§. 90): quæritur quantum spatium confecturus sit intervallo 4 secundorum? Reperietur spatium quæsitum 16 . 60 : 4 = 4 . 60 = 240.

THEOREMA 19.

97. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato, spatium dimidium ejus percurrit, quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.



Concipiatur recta AB tempus datum repræsentans in partes quotcunque æquales divisa & ad eam applicentur normaliter rectæ BC, SH, QI, PM, quæ sint ut velocitates temporis partibus *o*, BS, BQ, BP, BA respondentes, ita ut demissis perpendicularibus HE, IF, MG, rectæ CE, CF, CG, CB sint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc est, BS, BQ, BP, BA amissæ. Quoniam CE : CF = EH : FI, CG : CB = GM : BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodsi B*b* sit tempusculum infinite parvum, motus erit uniformis, ideoque spatiolum a mobili descriptum ut areola B*be*C, consequenter spatium tempore AB confectum ut triangulum ABC, quemadmodum ex demonstratione theor. 15 (§. 80) constat. Enimvero spatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter descriptum est ut rectangulum ABCD (§. 34). Ergo illud hujus dimidium (§. 386 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

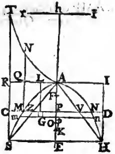
98. *Spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Percurrat mobile tempusculo primo spatium 7 pedum; dico, quod secundo confecturum sit spatium 5 pedum, tertio spatium 3, quarto spatium unius, si motus uniformiter retardetur. Sint enim (*Vid. Fig. præc.*) partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, semiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet; erunt trapezia BSHC, SQIH, QPMI, & △ PAM ut spatia temporibus istis descripta: quod patet ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 97). Sit igitur BC = 4 & BS = SQ = QP = PA = 1; erit SH = 3, QI = 2, PM = 1 (§. 70), BSHC = (4 + 3) 1 : 2 = $\frac{7}{2}$, SQIH = (3 + 2) 1 : 2 = $\frac{5}{2}$, QPMI = (2 + 1) 1 : 2 = $\frac{3}{2}$ (§. 400 *Geom.*), PAM = $\frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*), consequenter spatia æqualibus temporibus descripta sunt ut $\frac{7}{2} . \frac{5}{2} . \frac{3}{2} . \frac{1}{2}$, hoc est, ut 7 . 5 . 3 . 1 (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

99. *Si ad altitudinem* AE *applicentur celeritates* PM, ES, *descensu uniformiter accelerato per spatia* AP, AE *acquisitæ; locus celeritatum* AMS *erit Parabola.*



DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam AP & AE sunt spatia & PM atque ES celeritates descensu per ea acquisitæ; erit $AP : AE = PM^2 : ES^2$ (§. 81), hoc est, quadrata semiordinatarum sunt ut abscissæ. Est igitur AMS Parabola (§. 402 *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

100. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68); si ad spatia AP, AE applicentur tempora PM, ES, quibus describuntur, curva temporis AMS erit itidem parabola.

PROBLEMA 4.

101. *Data celeritate mobilis in motu quomodocunque accelerato per tempus, invenire spatium.*

RESOLUTIO.

Designet in axe curvæ AP tempus & semiordinata PM celeritatem eodem acquisitam, sitque AMS locus celeritatum. Ducatur *pm* ipsi PM infinite propinqua. Fiat $AP = t$, $PM = c$; erit $Pp = dt$ & elementum $PMmp = cdt$ (§. 98 *Analys. infin.*). Enimvero quoniam tempusculo dt motus est æquabilis; erit spatiolum a mobili descriptum $= cdt$ (§. 34), consequenter $\int cdt$ sive area AMP designabit spatium tempore AP descriptum. Quare si detur celeritas c per tempus t, non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento cdt substituto, formula summetur.

E. gr. Sit c ut t^n; erit $cdt = t^n dt$, ideoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ (§. 95 *Analys. infin.*). Sunt igitur spatia APM & AES temporibus AP & AE decursa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, consequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 178 *Arith.*), ideoque, ob $t^n = c$, ut ct ad CT. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquisita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata temporis; spatia sunt in ratione composita celeritatum, atque temporum.

PROBLEMA 5.

102. *Data celeritate mobilis motu continuo, sed quomodocunque accelerati lati per spatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas (*Vid. Fig.* §. 99) $= c$, tempus $= t$, spatium r, elementum spatii dr tempusculo dt percursum est cdt (§. 101). Habemus itaque

$$cdt = dr$$

$$dt = \frac{dr}{c}$$

$$t = \frac{\int dr}{c}$$

Quare si celeritas detur per r, non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento $dr : c$ substituto formula summetur.

E. gr. Sit in hypothesi *Baliani* c ut r; erit $dr : r = dt$, ideoque $t = \frac{\int dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analys. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates sunt ut spatia, tempora sunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\frac{\int dr}{r}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ 1 divisum; ideo (§. 120 *Analys. infin.*)

Theorema. In hypothesi *Baliani*, in qua celeritates sunt ut spatia, tempus exhibetur per spatia hyperbolica, ideoque ejus determinatio a quadratura hyperbolæ pendet.

Similiter si celeritas fuerit in ratione multiplicata vel submultiplicata quacunque spatii, hoc est, c ut r^n; erit $dt = dr : r^n = r^{-n} dr$, consequenter $t = \frac{1}{-n+1} r^{-n+1}$ (§. 93 *Analys. infin.*) $= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n}$, ideoque $T : t = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{R}{R^n} : \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n} = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c} = Rc : rC$

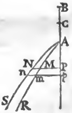
Theo-

Theorema. Si celeritates acquisitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLION.

103. Varignonius, *Geometra eximius* (a), *doctrinam de motu accelerato & retardato analysi generali absolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam analysin faciunt, etsi in Mechanica, ubi in hypothesibus naturæ exemplo* Galilæi *acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut tyrones ad solutiones problematum Physico-mathematicorum præparemus, utque intelligant principia in his elementis stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta analysi cum primis principiis Matheseos connexum exhibere lubet.*

PROBLEMA 6.



104. *Si tempora sint ut abscissæ* AP *& celeritates istis acquisitæ ut semiordinatæ* PN *curvæ* ANS *ejus naturæ, ut semiordinata* PN *sit ad semiordinatam hyperbolæ æquilateræ* PM *in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata dimidii axis* AC *ad abscissam* CP *a centro* C *computatam: invenire spatia dato tempore descripta.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus (§. 101) liquet spatia quæsita esse ut aream APN, ideoque pendere a quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR est hyperbola æquilatera, cujus axis transversus AB, centrum C; si fiat AC $= a$, AP $= t$; erit BP $= 2a + t$, ideoque ob AP . PB $=$ PM^2 (§. 507 *Analys. fin.*), PM$^2 = 2at + t^2$, consequenter PM $= \sqrt{(2at + t^2)}$. Quare cum porro sit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$$(a + t)^n : a^n = \sqrt{(2at + t^2)} : PN;$$

erit PN $= a^n \sqrt{(2at + t^2)} : (a + t)^n = c$. Est nempe c celeritas tempore AP acquisita, quam PN repræsentat *per hypoth.* Quare si in elemento spatii PN$np = cdt$ (§. 101) substituatur valor ipsius c; prodibit elementum speciale $a^n dt \sqrt{(2at + t^2)} : (a + t)^n$. Totum ideo negotium huc redit, ut hoc elementum summabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$$a + t = x$$

erit $$dt = dx$$

$$t = x - a$$

$$2at = 2ax - 2a^2$$

$$t^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$2at + t^2 = x^2 - a^2$$

$$\sqrt{(2at + t^2)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$(a + t)^n = x^n$$

$$\frac{a^n dt \sqrt{(2at + t^2)}}{(a + t)^n} = \frac{a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)}}{x^n}$$

Fiat porro

$x^2 = \frac{a^3}{a - z}$ ideoque $x = \frac{a^{3:2}}{(a - z)^{1:2}}$

erit $2xdx = \frac{a^3 dz}{(a - z)^2}$ $x^n = \frac{a^{3n:2}}{(a - z)^{n:2}}$

$$dx = \frac{a^3 dz}{2x(a - z)^2}$$

$$= \frac{a^3 dz (a - z)^{1:2}}{2a^{3:2}(a - z)^2}$$

$$= \frac{a^{3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}}$$

$$a^n dx = \frac{a^{n+3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}}$$

Jam $x^2 - a^2 = \frac{a^3}{a - z} - a^2$

$$= \frac{a^2 z}{a - z}$$

$$\sqrt{(x^2 - a^2} = \frac{az^{1:2}}{(a - z)^{1:2}}$$

ideoque

$$a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} dz}{2(a - z)^2}$$

Quare

(a) In Commentar. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. 290. & seqq.

Quare tandem habetur

$$\frac{a^n dx\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^n} = \frac{a^{n+5:2}z^{1:2}(a-z)^{n:2}dz}{2a^{3n:2}(a-z)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^{(5-n):2}z^{1:2}(a-z)^{(n-4):2}dz$$

Elementum hoc PNnp areæ APN integrabile est, si n fuerit numerus positivus par binario major.

E. gr. Sit $n=4$; erit $(n-4):2=0$, ideoque $(a-z)^{(n-4):2}=(a-z)^0=1$ (§. 55 *Analys. finit.*), consequenter

$$PNnp = \tfrac{1}{2}a^{1:2}z^{1:2}dz,$$

ideoque $ANP = \tfrac{1}{3}a^{1:2}z^{3:2}$

$$= \tfrac{1}{3}z\sqrt{az}$$

Jam quia

$$x^2 = a^3:(a-z)$$

$$a-z = a^3:x^2$$

$$z = a-a^3:x^2$$

$$az = (a^2x^2-a^4):x^2$$

$$\sqrt{az} = a\sqrt{(x^2-a^2)}:x$$

$$\tfrac{1}{3}z\sqrt{az} = \frac{a^2(x^2-a^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}{3x^3}$$

Porro

$$x = t+a$$

$$x^2 = t^2+2at+a^2$$

$$x^2-a^2 = t^2+2at$$

$$\tfrac{1}{3}z\sqrt{az} = a^2\,\frac{(t^2+2at)\sqrt{(t^2+2at)}}{3(a+t)^3}$$

$$= ANP$$

SCHOLION.

105. *Apparet ideo, exemplum hoc non alium habere usum, quam ad exercendum calculum summatorium. Et idem quoque de sequentibus patebit.*

PROBLEMA 7.

106. *Si celeritas tempore* t *acquisita fuerit ut* $t^{n-1}:(t^{2n}+a^{2n})$, *determinare spatium* r.

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101); erit $dr = t^{n-1}dt:(t^{2n}+a^{2n})$. Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

erit $\quad t = a^{(n-1):n}x^{1:n}$

$$dt = \tfrac{1}{n}a^{(n-1):n}x^{1:n-1}dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n:t$

$$t^{n-1} = a^{n-1}x : a^{(n-1):n}x^{1:n}$$

$$= a^{(nn-2n+1):n}x^{(n-1):n}$$

$$t^{n-1}dt = \tfrac{1}{n}a^{n-1}dx$$

$$t^{2n}+a^{2n} = a^{2n-2}x^2+a^{2n}$$

$$\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}+a^{2n}} = \tfrac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2+a^2} = dr$$

Quare spatium $r = \tfrac{1}{n}a^{1-n}\cdot\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

Si tangens arcus circuli fuerit x, radius a; erit $\int\frac{a^2dx}{x^2+a^2}$ arcus (§. 158 *Analys. infinit.*), ut ideo quadratura curvæ, quæ spatium r exhibet, pendeat a rectificatione arcus circuli.

Varignonius formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad sinum versum: id quod fit hoc modo. Sit

$$x = a\sqrt{(2a:y-1)}$$

$$= a(2ay^{-1}-1)^{1:2}$$

erit $dx = -a^2y^{-2}dy:\sqrt{(2ay^{-1}-1)}$. Elementum hoc in præsente casu sumendum est positivum, quia crescente x decrescit y, consequenter ipsius y differentiale $= dy$.

Porro $x^2 = 2a^3:y-a^2$

$$x^2+a^2 = 2a^3:y$$

Quamobrem

$$\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a^2dy}{2a^3y\sqrt{(2ay^{-1}-1)}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

$$\tfrac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2na^{n+1}}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} = dr$$

PRO-

PROBLEMA 8.

107. *Data celeritate* c *tempore* t *acquisita, quæ sit ut* $t^{n-1}:(t^{2n}-a^{2n})$, *invenire spatium* r.

RESOLUTIO.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

erit $dr = t^{n-1}dt:(t^{2n}-a^{2n})$.

Ponatur ut ante (§. 106)

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

reperietur $\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}-a^{2n}} = \frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2-a^2} = dr$ prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = a\sqrt{(2ay^{-1}+1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{a^2dy}{2a^3\sqrt{(2ay+y^2)}}$ ut ante, ideoque tandem

$$dr = \frac{1}{na^{n+2}}\cdot\frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay+y^2)}}.$$

Ponatur denique

$$v - a = y$$

erit $v^2 - 2av + a^2 = y^2$

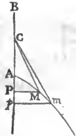
$$2av - 2a^2 = 2ay$$

$$v^2 - a^2 = y^2 + 2ay$$

$$2\sqrt{(v^2-a^2)} = 2\sqrt{(y^2+2ay)}$$

$$dv = dy$$

$$\frac{a^2dv}{2\sqrt{(v^2-a^2)}} = \frac{a^2dv}{2\sqrt{(y^2+2ay)}}.$$



Quoniam $a^2dv:2\sqrt{(v^2-a^2)}$ est elementum sectoris hyperbolici CAM, abscissis a centro computatis (§. 189 *Analys. infinit.*); erit dimidius axis hyperbolæ æquilateræ $= a$ & CP $= v$, consequenter $a^2dy:2\sqrt{(y^2+2ay)}$ exprimit elementum ejusdem sectoris CAM, abscissa AP existente y. Patet itaque determinationem spatii in casu præsente pendere a quadratura hyperbolæ.

SCHOLION 1.

108. *Apparet ex hic problematic, quam utile sit formulas omnes elementorum arcuum, segmentorum & sectorum pro sectionibus conicis aliisque curvis descriptu facilioribus atque cognitarum proprietatum reperire, sibique familiares reddere, ut formulæ non summabiles ad eas tanquam simpliciores reduci possint, quemadmodum & paulo ante vidimus* (§. 106), *posse constructiones curvarum ad alias descriptu faciliores reduci, per quas construantur: cujus rei exempla quoque dedimus in Algebra* (§. 245 & seqq. Analys. infinit.).

SCHOLION 2.

109. *Potest etiam sectoris* CAM *elementum independenter a formula* $a^2dv:2\sqrt{(v^2-a^2)}$ *inveniri hoc modo. Sit* $AC = CB = a$, $AP = y$; *erit* $PB = 2a + y$, *consequenter ob.* $PM^2 = AP \cdot PB$ (507 Analys. finit.) $= 2ay + y^2$, $PM = \sqrt{(2ay+y^2)}$, *quæ in* $\frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}(a+y)$ *ducta, prodit area trianguli* $CMP = \frac{1}{2}(a+y)\sqrt{(2ay+y^2)}$. *Ergo* $CmM + mMPp = \frac{1}{2}dy\sqrt{(2ay+y^2)} + \frac{(ady+ydy)}{\sqrt{(2ay+y^2)}}\cdot\frac{(a+y)}{2} = \frac{2aydy+y^2dy+\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$.

Jam $mMPp = dy\sqrt{(2ay+y^2)} = \frac{2aydy+y^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$. *Ergo* CmM *elementum sectoris* $CMA = \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay+y^2)}}$.

DEFINITIO 18.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempusculo quocunque infinite parvo successive nascitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita resolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempusculi particulis natas. Particulæ istiusmodi elementares quantitatis motus tempusculo infinite parvo genitæ dicuntur *Sollicitationes ad motum*.

COAOILARIUM.

111. Quodsi ergo istæ particulæ ponantur æquales, quatenus spectantur ut effectus ab eadem causa tempusculis æqualibus producti; si sollicitatio ad motum dicatur g, erit nisus elementaris seu quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$.

pRC.

PROBLEMA 9.

112. ***Data accelerationis lege, determinare sollicitationem ad motum.***

RESOLUTIO.

Si sollicitatio sit g; erit quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempusculo isto $= dc$, massa mobilis $= m$. Quoniam tempusculo infinite parvo dt motus æquabilis supponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, ideoque $g = mdc : dt$.

Quare si ex data accelerationis lege determinetur dt per dc vel contra, prodibit valor ipsius g.

E.gr. In hypothesi *Galilæana* gravium seu in motu æquabiliter accelerato celeritas c est ut tempus t, ideoque dt ut dc. Quare g ut $mdc : dc$, hoc est, ut m. Quare patet

Theorema: In hypothesi *Galilæana* gravium seu in motu æquabiliter accelerato sollicitatio ad motum est ut massa, ideoque constans.

Si fuerit c ut t^n

erit $dc = nt^{n-1}dt$

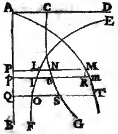
$$g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnt^{n-1}dt}{dt}$$
$$= nmt^{n-1}$$
$$= nmt^{n} : t$$
$$= nmc \; : t$$

Theorema. Si celeritas crescit in ratione temporis multiplicata, erit sollicitatio ad motum ut factum ex massa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe, & ut tempus reciproce; hoc est, si duo fuerint mobilia, sollicitationes ad motum erunt in ratione composita ex directa massarum & celeritatum in exponentes dignitatis temporum ductarum & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMC}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$ seu ut $NMCt$ ad $nmcT$.

PROBLEMA 10.

113. ***Data sollicitatione ad motum, invenire mobilis motu continuo accelerato lati tum velocitatem in locis singulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.***

RESOLUTIO.



Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, PN &c. sint ut sollicitationes ad motum in A, P &c. PM sit ut celeritas a mobili in P acquisita. Ducatur pn ipsi PN infinite propinqua & dicatur $PN = g$, $AP = r$, $PM = c$, massa mobilis $= m$; erit $Pp = dr$. Sit porro tempusculum, quo mobile per Pp descendit, $= dt$: quia motus in spatiolo Pp æquabilis supponitur, erit $c = dr : dt$ (§. 38) & $g = mdc : dt$ (§. 112).

$cdt = dr$ $\quad\quad$ $gdt = mdc$

$dt = dr : c$ $\quad\quad$ $dt = mdc : g$

$$\frac{dr}{c} = \frac{mdc}{g}$$
$$gdr = mcdc$$
$$\int gdr = \tfrac{1}{2}mc^2$$

Est vero $\int gdr$ area APNC & $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}PM^2$. Quare si mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 *Arith.*).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine spatii dati AP acquisita est ut recta, quæ potest aream sollicitationum APNC, seu est in ratione subduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

$$c = dr : dt \qquad \int g\,dr = \tfrac{1}{2}mc^2$$

$$\frac{2\int g\,dr}{m} = c^2$$

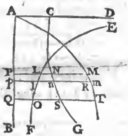
$$\frac{\sqrt{2\int g\,dr}}{\sqrt{m}} = c$$

$$dr : dt = \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}$$

$$dr = dt \,.\, \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}} = dt$$

$$\int dr \,.\, \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}} = t$$



Quodsi ergo fiat $PL = \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}}$ seu, mobili existente eodem, $= 1 : \sqrt{2\int g\,dr}$, area DAPLE designabit tempus. Ponamus jam AQ = R, QS = G; erit $C = \sqrt{2\int G\,dR}$, mobili existente eodem, ut massa poni possit 1, aut ejus nulla habenda sit ratio. Erit ideo

$$C : c = \sqrt{2\int G\,dR} : \sqrt{2\int g\,dr}.$$

Sed $PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2\int G\,dR}} : \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr}}$

$$= \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{2\int G\,dR}$$

Ergo $PL : QO = c : C$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione movetur motu continuo accelerato, erunt tempora QO & PL, quibus spatia data AQ & AP conficit, celeritatibus in fine illorum spatiorum acquisitis reciproce proportionalia, nempe ut PM ad QT.

SCHOLION 1.

114. *Consentit analysis cum iis, quæ* Newtonus (a) *demonstravit, nisi quod is vim centripetam vocet, quod nos* sollicitationem *appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem sumunt tanquam effectum vis motricis eidem proportionalem, atque ideo quantitatem motus tanquam mensuram vis illius. Quare cum* Newtonus *vim illam consideret ut urgentem mobile versus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in casu descensus gravium gravitatem vocant, quia gravitas consideratur ut causa acceleratrix motus gravium & celeritas momentis singulis descendenti superaccedens tanquam effectus illius causa.*

SCHOLION 2.

115. *Ex theoremate per problema præsens erutis omnia deducere licet, quæ de motu gravium in hypothesi* Galilæana *sive in alia quacunque demonstrantur. Etenim in hypothesi* Galilæana *est* c ut t, *ideoque* dc *ut* dt. *Jam* gdr = cdc (§. 113). *Ergo* gdr = cdt, *consequenter* gdr : dt = c, *ideoque ob* dr : dt = c *erit* gc = c. *Cum ideo sit* g = 1, *gravitas in hypothesi* Galilæana *constans est, hoc est, elementa singula, ex quibus quantitas motus tempusculo infinite parvo constat, sunt inter se æqualia. Jam quia* g = 1; *erit in eadem hypothesi* $\int dr = \frac{1}{2}c^2$, *hoc est,* r *ut* c^2 (§. 181 *Arith.*), *quemadmodum supra* (§. 86). *Similiter cum in hypothesi* Baliani *sit* c *ut* r; *erit* gdr = rdr (§. 113), *ideoque* g = r. *Jam initio descensus* r = o: *ergo* g = o, *hoc est sollicitatio ad motum initio nulla est, seu phrasi communi Mathematicorum gravitas nulla est: quod cum sit absurdum, hypothesis* Baliana *impossibilis.*

COROLLARIUM 1.

116. Quoniam $\sqrt{2\int g\,dr}$ = APNC continuo crescit, semiordinata $PL = 1 : \sqrt{2\int g\,dr}$ continuo decrescit. Jam cum sit in A, *dr* = o; erit AD = 1 : o = ∞. Est igitur AD asymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLION 3.

117. *Hinc patet ratio, cur curva temporis* ELF *ita fuerit delineata, ut cum axe* AB *non concurrat, sicuti curva celeritatum* AMT, *neque rectam* AD *ad axem* AB *normalem secet, sicuti curva sollicitationum* CNS.

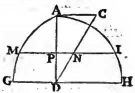
COROLLARIUM 2.

118. Cum sit *gdr* = *cdc* (§. 113), ideoque g = *cdc* : *dr* = PM . R*m* : P*p*. Sollicitatio ad motum in quacunque accelerationis hypothesi erit ut subnormalis curvæ celeritatum (§. 35 *Analys. infinit.*).

PRO-

(a) In Princip. Phil. natural. mathemath. lib. 1. prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

PROBLEMA II.



119. *Si sollicitatio centralis sit distantiæ a centro* AD, PD *&c. proportionalis, invenire velocitatem in quovis puncto* P *& tempus descensus per* AP.

RESOLUTIO.

Quoniam AD : PD = AC : PN *per hypoth.* scala sollicitationum centralium DC est linea recta & figura ADC triangulum (§.268 *Geom.*). Sit AD = a, AP spatium descensus = r, PN sollicitatio in P = g; erit PD = $a - r$. Est vero PN ut PD *per hypoth.*, ideoque g ut $a - r$. Quare cum sit (§.113)

$$\int gdr = \tfrac{1}{2}c^2$$

erit

$$\int adr - \int rdr = \tfrac{1}{2}c^2$$

$$ar - \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}c^2$$

$$2ar - r^2 = c^2$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD = a, AP = r: si ex centro D radio AD describatur Quadrans AIH; erit semiordinata PI = $\sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Analys. finit.*). Habemus itaque sequens

Theorema. Si sollicitatio centralis sit proportionalis distantiæ locorum a centro, velocitates in fine spatii acquisitæ sunt sinibus arcuum respondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem descripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ *per demonstrata*:

Ergo $dr = dt\sqrt{(2ar - r^2)}$

$$dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Quoniam $a\int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ est arcus AI (§. 157 *Analys. infinit.*); erit tempus descensus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque sequens

Theorema. In hypothesi problematis tempora descensus per spatia AP sunt ut arcus circuli AI ex centro D descripti.

Quodsi species curvæ celeritatum AMG desideretur, fiat AC = b.

Cum sit AD : AC = DP : PN *per hyp.*

$$a : b = a - r : \text{PN}$$

erit PN = $g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\tfrac{1}{2}c^2 = \int gdr$ (§. 113)

Ergo $\tfrac{1}{2}c^2 = \int bdr - \int brdr : a$

$$= br - br^2 : 2a$$

$$c^2 = 2br - 2br^2 : 2a$$

Patet itaque (§. 421 *Analys. finit.*) sequens

Theorema. In hypothesi problematis locum celeritatum AMG esse ellipsin, cujus parameter 2AC est dupla sollicitatio initialis, axis major 2AD dupla distantia mobilis initio descensus a centro.

Si $a = r$, erit $GD^2 = 2ab - 2a^2b : 2a = 2ab - ab = ab$, ideoque GD = $\sqrt{ab}$. Cum itaque GD sit axis dimidius conjugatus (§. 423 *Analys. finit.*); erit in D centrum ellipseos & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per spatia AP & AD descendit, si sollicitationes fuerint distantiis a centro proportionales, per idem spatium corpus quodvis eodem tempore descendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLION.

121. *Omnia hæc consona sunt iis, quæ* Newtonus (a) *demonstravit.*

C 2 CAPUT

(a) In Princip. Phil. natur. Mathem. lib. 1. proposit. 38. pag. 113.

CAPUT III.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO 19.

122. *Centrum gravitatis* est, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, si neutra alteram movet.

COROLLARIUM 1.

123. Quodsi ergo descensus centri gravitatis impeditur, grave quiescit.

COROLLARIUM 2.

124. Quare si corpus ex centro gravitatis suspenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM 3.

125. Totam corporis gravitatem in centrum gravitatis coactam supponere licet, idemque pro corpore gravi solum centrum gravitatis surrogari potest in demonstrationibus.

DEFINITIO 20.

126. *Diameter gravitatis* est recta transiens per centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Intersectio itaque duarum diametrorum determinat centrum gravitatis.

DEFINITIO 21.

128. *Planum gravitatis* est figura plana, in qua situm est centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo intersectio duorum planorum gravitatis aut plurium est diameter gravitatis.

DEFINITIO 22.

130. *Gravia homogenea* sunt, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO 23.

131. *Gravia heterogenea* sunt, quorum gravitates non sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ inter se non erunt pondere æquales. Aut si duorum gravium partes sumas volumine æquales & eædem sint pondere inæquales; gravia inter se heterogenea sunt, licet in se homogenea esse possint.

DEFINITIO 24.

132. *Centrum magnitudinis* est punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA 22.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete in medio non resistente eodem tempore per idem spatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Descendat grave A per spatium r; erit tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Descendat etiam grave B per idem vel æquale spatium r; erit etiam tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Si ergo spatium descensus ex quiete idem est, tempus etiam descensus idem est. *Q. e. d.*

SCHOLION.

134. *Idem observatione confirmatur. Nam in spatio ab aere vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aerometria docemus) levissima plumula eodem tempore ex data altitudine descendit, quo globus plumbeus. Imo si corpora magna & ponderosa in aere per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines sint mediocres, monente* Hugenio (a). *Pendulorum imprimis expe-*

(a) In Horologio oscillatorio part. 4. prop. 5.

experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus Ricciolus *globos argillaceos* 20 *unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole illis æquales, sed pondere subduplos per intervallum* 280 *pedum demittens contrarium probare conatur* (a), *ideo non consentiunt, quia resistentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitæ sunt ut tempus (§. 87); velocitates gravium descendentium ex quiete dato tempore æquales sunt.

THEOREMA 23.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendentium dato tempore æquales sunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiæ, quæ cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nisus versus centrum terræ (§. 4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, ideoque illud quod quantitati motus accedit, consequenter sollicitatio ad motum (§. 110). Sed sollicitatio est etiam massæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. *Q. e. d.*

SCHOLION.

137. *Liquet jam veritas definitionis quintæ* (§. 6).

COROLLARIUM 1.

138. Massa igitur corporum recte æstimatur per pondus.

COROLLARIUM 2.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 41), & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus æquales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 42).

(a) Almag. Nov. Tom. 1. lib. 2. cap. 21. prop. 1. f. 89.

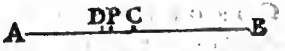
COROLLARIUM 3.

140. Massa invariata pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA 5.

141. *In homogeneis, quæ secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possunt, centrum gravitatis idem est cum centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.



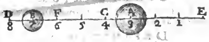
142. Quodsi ergo linea recta AB bifariam secetur in C; erit C centrum gravitatis.

SCHOLION.



143. *Tale corpus homogeneum, quod secundum longitudinem in partes similes secari potest, est e. gr. cylindrus plumbeus. Si enim longitudo* AE *concipiatur in tres partes æquales* ED, DC & CA *vel quotcunque plures divisa; secabitur in cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint* (§. 535 Geom.), *atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium* (§. 570 Geom.).

THEOREMA 24.



144. *Si centra gravitatis duorum corporum* A & B *jungantur recta* AB, *centri gravitatis communis* C *distantiæ* BC & CA *a centris gravitatis particularibus* B & A *sunt reciproce ut pondera* A & B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 libra-

& *d*T, *c* & C vero summæ ipsorum *dc* & *d*C (§. 178 67 *Arith.*)

DEFINITIO 17.

70. *Motus retardatus* est, cujus celeritas decrescit. *Uniformiter retardatus* dicitur, si continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

AXIOMA 2.

71. *Corpus semel quiescens nunquam movebitur, nisi aliunde ad motum concitetur: semel autem motum eadem velocitate & secundum eandem directionem moveri perget, nisi a causa aliqua statum suum mutare cogatur.*

SCHOLION.

72. *Hæc satis manifesta sunt ex axiomate omnis Philosophiæ fundamentali, quod nihil fit sine ratione sufficiente* (§. 25): *quemadmodum idem ostendimus in* Cosmologia. *Nec experientia eidem repugnat, cum semper ratio assignari possit tam motus retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumstantias satis perpendamus.*

COROLLARIUM 1.

73. Corpus itaque, quod nonnisi impulsu semel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

COROLLARIUM 2.

74. Quodsi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur necesse est, altera nempe, qua progrederetur secundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

AXIOMA 3.

75. *Si nisus & renisus duorum corporum fuerint æquales; motus nullus subsequitur; sed corpora se mutuo impellentia juxta se invicem quiescunt.*

AXIOMA 4.

76. *Si corpus motum secundum eandem directionem, qua movetur, impellitur, motus acceleratur* (§. 67).

AXIOMA 5.

77. *Corpus motum a vi resistente retardatur* (§. 20. 70).

OBSERVATIO 1.

78. *Gravitas corporum eadem in qualibet a superficie telluris distantia, in qua experimentum capere licet: quam imposterum* Intervallum non nimis magnum *dicemus*.

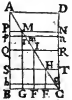
OBSERVATIO 2.

79. *Gravia descendunt motu accelerato.*

THEOREMA 15.

80. *Si corpus ex quiete motu uniformiter accelerato fertur, spatia sunt in ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.



Designet recta AB tempus, quo motus mobilis acceleratur, & rectæ ad AB applicatæ PM, BC sint ut celeritates in fine temporis AP, AB acquisitæ. Quoniam motus uniformiter acceleratur & motus a quiete incipit *per hypoth.*; erit AP : AB = PM : BC (§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB perpendiculares *per constr.* ideoque inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Est igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*), ideoque rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ponamus *pm* esse alteri lineæ PM infinite propinquam: celeritates PM & *pm* non different nisi quantitate infinite parva *mr* in fine tempusculi P*p*, atque ideo tempusculo toto P*p* eadem celeritate fertur mobile (§. 4 *Analys. Infinit.*), consequenter motus isto tempusculo æquabilis est (§. 24). Enimvero

vero in motu æquabili ſpatium eſt ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arith.*), ideoque ſpatium a mobili tempuſculo P*p* confectum eſt ut rectangulum P*pr*M (§. 375 *Geom.*), conſequenter cum ſingulis tempuſculis, quibus AP conſtat, ipſi P*p* æqualibus, iſtiuſmodi parallelogrammula reſpondeant, quæ ſimul ſumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analyſ. infinit.*), area APM exprimit ſpatium a mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit ſpatium a mobili tempore AB confectum. Sunt igitur ſpatia temporibus AP & AB deſcripta ut triangula APM & ABC, conſequenter ob eorundem ſimilitudinem (§. 268 *Geom.*) in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc eſt, temporum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora (§. 68); ſpatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus deſcribuntur, acquiſitarum (§. 80).

COROLLARIUM 2.

82. In motu uniformiter accelerato tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 159 *Arith.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM 3.

83. Etiam celeritates in fine temporum ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum illis deſcriptorum (§. 159 *Arith.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA 16.

84. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, creſcunt temporibus æqualibus ſecundum numeros impares* 1, 3, 5, 7, 9 &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5 &c.; ſpatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (§. 80). Quodſi ergo ſubtrahas ſpatium intra minutum unum percurſum a ſpatio intra duo confecto 4; remanebit ſpatium minuto ſecundo reſpondens 3. Eodem modo reperitur ſpatium minuto tertio abſolutum $9-4=5$, ſpatium quarto reſpondens $16-9=7$, quod quinto convenit $25-16=9$ &c. & ita porro (§. 83 *Analyſ. finit.*). Spatium ergo minuti primi eſt ut 1, ſecundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9 &c. ideoque ſpatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur ſecundum numeros impares, 1, 3, 5, 7, 9 &c. *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

85. *Corpora gravia in medio non reſiſtente per intervalla non nimis magna motu uniformiter accelerato deſcendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia deſcendant motu accelerato (§. 79); vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Eſt vero gravitas in intervallo non nimis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorſum impelli debent (§. 25). Itaque ſi tempuſculo primo impelluntur celeritate *c*, etiam ſecundo celeritate *c* impellentur, imo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non reſiſtit *per hypoth.* celeritatem ſemel acquiſitam con-

ſtanter

ſtanter retinent (§. 71), ideoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, conſequenter motu uniformiter accelerato deſcendunt (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

86. Sunt igitur ſpatia deſcenſus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81) & ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. creſcunt (§. 84).

COROLLARIUM 2.

87. Tempora vero, itemque velocitates ſunt in ratione ſpatiorum ſubduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION I.

88. *Dum gravia deſcendere ſupponimus in medio non reſiſtente, ab omni externo impedimento abſtrahimus, quocunque tandem nomine veniat & a quacunque cauſa ortum trahat. Unde motum quoque ſecludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Aſtronomia adſtruendam, in transverſum capiuntur gravia ipſo deſcenſus tempore: quamvis in intervallo non nimis magno nulla inde in deſcenſum gravium irregularitas irrepat.*

SCHOLION 2.

89. Galilæus Galilæi, *qui legem deſcenſus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experientiis conſonam deprehendit* (a). *In tabula ſcilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiorem, agglutinata intus membrana, ne ſcabritie ſua pilam aeneam bene politam in deſcenſu remoraretur. Eam poſtea ſupra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis ſucceſſive elevavit, & tempus, in quo pila per canalem deſcendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit ſpatia decurſa ſemper eſſe ut temporum quadrata. Notandum vero ſpatia computanda eſſe non in longitudine, ſed in altitudine plani, ut eorum, quæ inferius demonſtrabuntur.*

SCHOLION 3.

90. *Eadem experimenta modo tamen diverſo ſæpius cum* Grimaldo *ſuo repetiit* Joann. Baptiſta Ricciolus (b) *plurimos globos cretaceos ejuſdem molis, pondere 8 unciarum, ex diverſarum turrium aut ædium feneſtris demittens & tempus deſcenſus perpendiculi vibrationibus dimetiens. Perpendiculi vibrationes numeravit cum* Grimaldo *a tranſitu caudæ Leonis per Meridianum uſque ad alterum tranſitum, ut certo conſtaret, quot vibrationes penduli reſpondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps uſus in obſervationibus aſtronomicis, antequam horologia oſcillatoria ab* Hugenio *fuiſſent inventa. Experimenta ſequens repræſentat tabella.*

Vibrationes penduli.	Tempus		Spatium in fine temporis.	Spatium ſingulis temporibus confectum.
	″	‴	Ped Rom.	Ped. Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

SCHOLION 4.

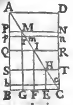
91. *Cum ideo experimenta* Riccioli *in obſervando maxime exercitati in tanto intervallo inſtituta theoriæ apprime conſentiant; vix attendenda eſſe videntur, quæ in contrarium affert* (c) Dechales, *qui ſe expertum ſcribit, uno minuto ſemiſecundo grave deſcenſu ſuo confeciſſe pedes* $4\frac{1}{4}$, *duobus* $16\frac{1}{3}$, *tribus* 36, *quatuor* 60, *quinque* 90, *ſex* 123. *Sufficit, quod ipſe a reſiſtentia aeris irregularitatem deducat, quam in demonſtratione inſuper habuimus.*

THEOREMA 18.

92. *Si grave in medio non reſiſtente per intervallum non nimis magnum deſcendit, ſpatium ab eo decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum deſcenſus repræſentet, in partes quotcunque æquales diviſa, & ad abſciſſas AP, AQ, AS, AB applicentur perpendicu-



lari-

(a) In Dialogis de motu locali Dial. 3. p. m. 156. 157.
(b) Almageſt. Nov. Tom. 1. lib. 2. cap. 21. prop. 4. ſ. 89. 90.

(c) Staticæ lib. 2. prop. 11. Mund. Matth. Tom. 2. fol. 275.

ſimiliter rectæ PM, QI, SH, BC, quæ ſint ut celeritates cadendo in iſtis temporibus acquiſitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et ſpatium tempore AB percurſum eſt ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonſtratione theorematis 15 (§. 80) conſtat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter deſcriptum cum ſit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique illud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipſius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquiſita conficitur, æquale eſt ſpatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro deſcendit.

PROBLEMA 1.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data deſcendit, ſpatia definire, quæ ſingulis iſtius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, ſpatium parte temporis prima 1 confectum $= x$; erit (§. 86)

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Eſt ideo ſpatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, ideoque decurſum parte ſecunda $= 3a : t^2$, tertia deſcriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86).

E. gr. ſupra in experimentis *Riccioli* (§. 90) intra 4 ſecunda globus cretaceus deſcendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo ſecundo confectum $= 240 : 16 = 15$, ſpatium confectum ſecundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$. Eſt autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA 2.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non reſiſtente per ſpatium datum deſcendit, determinare tempus, quo aliud ſpatium datum in eodem medio conficiet.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86), quæratur ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*), qui erit quadratum temporis quæſiti.
2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arith.*); prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis *Riccioli* (§. 90) intervallo 4 ſecundorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{(135 . 16 : 240)} = \sqrt{(135 : 15)} = \sqrt{9} = 3$.

PROBLEMA 3.

96. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit, determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

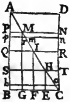
Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis, quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): qui erit ſpatium quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Per experimenta *Riccioli* globus cretaceus intervallo duorum secundorum confecit spatium 60 pedum (§. 90): quæritur quantum spatium confecturus sit intervallo 4 secundorum? Reperietur spatium quæsitum 16 . 60 : 4 = 4 . 60 = 240.

THEOREMA 19.

97. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato, spatium dimidium ejus percurrit, quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.



Concipiatur recta AB tempus datum repræsentans in partes quotcunque æquales divisa & ad eam applicentur normaliter rectæ BC, SH, QI, PM, quæ sint ut velocitates temporis partibus *o*, BS, BQ, BP, BA respondentes, ita ut demissis perpendicularibus HE, IF, MG, rectæ CE, CF, CG, CB sint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc est, BS, BQ, BP, BA amissæ. Quoniam CE : CF = EH : FI, CG : CB = GM : BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodsi B*b* sit tempusculum infinite parvum, motus erit uniformis, ideoque spatiolum a mobili descriptum ut areola B*bc*C, consequenter spatium tempore AB confectum ut triangulum ABC, quemadmodum ex demonstratione theor. 15 (§. 80) constat. Enimvero spatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter descriptum est ut rectangulum ABCD (§. 34). Ergo illud hujus dimidium (§. 386 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

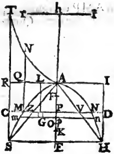
98. *Spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Percurrat mobile tempusculo primo spatium 7 pedum; dico, quod secundo confecturum sit spatium 5 pedum, tertio spatium 3, quarto spatium unius, si motus uniformiter retardetur. Sint enim (*Vid. Fig. præc.*) partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, semiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet; erunt trapezia BSHC, SQIH, QPMI, & △ PAM ut spatia temporibus istis descripta: quod patet ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 97). Sit igitur BC = 4 & BS = SQ = QP = PA = 1; erit SH = 3, QI = 2, PM = 1 (§. 70), BSHC = (4 + 3) 1 : 2 = $\frac{7}{2}$, SQIH = (3 + 2) 1 : 2 = $\frac{5}{2}$, QPMI = (2 + 1) 1 : 2 = $\frac{3}{2}$ (§. 400 *Geom.*), PAM = $\frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*), consequenter spatia æqualibus temporibus descripta sunt ut $\frac{7}{2} . \frac{5}{2} . \frac{3}{2} . \frac{1}{2}$, hoc est, ut 7 . 5 . 3 . 1 (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

99. *Si ad altitudinem* AE *applicentur celeritates* PM, ES, *descensu uniformiter accelerato per spatia* AP, AE *acquisitæ; locus celeritatum* AMS *erit Parabola.*



DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam AP & AE ſunt ſpatia & PM atque ES celeritates deſcenſu per ea acquiſitæ; erit $AP : AE = PM^2 : ES^2$ (§. 81), hoc eſt, quadrata ſemiordinatarum ſunt ut abſciſſæ. Eſt igitur AMS Parabola (§. 402 *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

100. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora (§. 68); ſi ad ſpatia AP, AE applicentur tempora PM, ES, quibus deſcribuntur, curva temporis AMS erit itidem parabola.

PROBLEMA 4.

101. *Data celeritate mobilis in motu quomodocunque accelerato per tempus, invenire ſpatium.*

RESOLUTIO.

Deſignet in axe curvæ AP tempus & ſemiordinata PM celeritatem eodem acquiſitam, ſitque AMS locus celeritatum. Ducatur *pm* ipſi PM infinite propinqua. Fiat $AP = t$, $PM = c$; erit $Pp = dt$ & elementum $PMmp = cdt$ (§. 98 *Analyſ. infin.*). Enimvero quoniam tempuſculo dt motus eſt æquabilis; erit ſpatiolum a mobili deſcriptum $= cdt$ (§. 34), conſequenter $\int cdt$ ſive area AMP deſignabit ſpatium tempore AP deſcriptum. Quare ſi detur celeritas c per tempus t, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento cdt ſubſtituto, formula ſummetur.

E. gr. Sit c ut t^n; erit $cdt = t^n dt$, ideoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ (§. 95 *Analyſ. infin.*). Sunt igitur ſpatia APM & AES temporibus AP & AE decurſa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, conſequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 178 *Arith.*), ideoque, ob $t^n = c$, ut ct ad CT. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquiſita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata temporis; ſpatia ſunt in ratione compoſita celeritatum, atque temporum.

PROBLEMA 5.

102. *Data celeritate mobilis motu continuo, ſed quomodocunque accelerati lati per ſpatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas (*Vid. Fig. §. 99*) $= c$, tempus $= t$, ſpatium r, elementum ſpatii dr tempuſculo dt percurſum eſt cdt (§. 101). Habemus itaque

$$cdt = dr$$
$$dt = \frac{dr}{c}$$
$$t = \frac{\int dr}{c}$$

Quare ſi celeritas detur per r, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento $dr : c$ ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit in hypotheſi *Baliani* c ut r; erit $dr : r = dt$, ideoque $t = \frac{\int dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analyſ. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates ſunt ut ſpatia, tempora ſunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\frac{\int dr}{r}$ eſt ſpatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ 1 diviſum; ideo (§. 120 *Analyſ. infin.*)

Theorema. In hypotheſi *Baliani*, in qua celeritates ſunt ut ſpatia, tempus exhibetur per ſpatia hyperbolica, ideoque ejus determinatio a quadratura hyperbolæ pendet.

Similiter ſi celeritas fuerit in ratione multiplicata vel ſubmultiplicata quacunque ſpatii, hoc eſt, c ut r^n; erit $dt = dr : r^n = r^{-n} dr$, conſequenter $t = \frac{1}{-n+1} r^{-n+1}$ (§. 95 *Analyſ. infin.*) $= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n}$, ideoque $T : t = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{R}{R^n} : \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n} = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c} = Rc : rC$

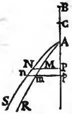
Theo-

Theorema. Si celeritates acquisitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLION.

103. Varignonius, *Geometra eximius* (a), *doctrinam de motu accelerato & retardato analysi generali absolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam analysin faciunt, etsi in Mechanica, ubi in hypothesibus naturæ exemplo* Galilæi *acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut tyrones ad solutiones problematum Physico-mathematicorum præparemus, utque intelligant principia in his elementis stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta analysi cum primis principiis Matheseos connexum exhibere lubet.*

PROBLEMA 6.



104. *Si tempora sint ut abscissæ* AP *& celeritates istis acquisitæ ut semiordinatæ* PN *curvæ* ANS *ejus naturæ, ut semiordinata* PN *sit ad semiordinatam hyperbolæ æquilateræ* PM *in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata dimidii axis* AC *ad abscissam* CP *a centro* C *computatam: invenire spatia dato tempore descripta.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus (§. 101) liquet spatia quæsita esse ut aream APN, ideoque pendere a quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR est hyperbola æquilatera, cujus axis transversus AB, centrum C; si fiat AC $= a$, AP $= t$; erit BP $= 2a + t$, ideoque ob AP . PB $=$ PM^2 (§. 507 *Analys. fin.*), PM$^2 = 2at + t^2$, consequenter PM $= \sqrt{(2at + t^2)}$. Quare cum porro sit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$$(a + t)^n : a^n = \sqrt{(2at + t^2)} : PN;$$

erit PN $= a^n \sqrt{(2at + t^2)} : (a + t)^n = c$. Est nempe c celeritas tempore AP acquisita, quam PN repræsentat *per hypoth.* Quare si in elemento spatii PN$np = cdt$ (§. 101) substituatur valor ipsius c; prodibit elementum speciale $a^n dt \sqrt{(2at + t^2)} : (a + t)^n$. Totum ideo negotium huc redit, ut hoc elementum summabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$$a + t = x$$

erit

$$dt = dx$$

$$t = x - a$$

$$2at = 2ax - 2a^2$$

$$t^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$2at + t^2 = x^2 - a^2$$

$$\sqrt{(2at + t^2)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$(a + t)^n = x^n$$

$$\frac{a^n dt \sqrt{(2at + t^2)}}{(a + t)^n} = \frac{a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)}}{x^n}$$

Fiat porro

$$x^2 = \frac{a^3}{a - z} \quad \text{ideoque} \quad x = \frac{a^{3:2}}{(a - z)^{1:2}}$$

$$\text{erit } 2xdx = \frac{a^3 dz}{(a - z)^2} \quad x^n = \frac{a^{3n:2}}{(a - z)^{n:2}}$$

$$dx = \frac{a^3 dz}{2x(a - z)^2}$$

$$= \frac{a^3 dz (a - z)^{1:2}}{2a^{3:2}(a - z)^2}$$

$$= \frac{a^{3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}}$$

$$a^n dx = \frac{a^{n+3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}}$$

$$\text{Jam } x^2 - a^2 = \frac{a^3}{a - z} - a^2$$

$$= \frac{a^2 z}{a - z}$$

$$\sqrt{(x^2 - a^2} = \frac{az^{1:2}}{(a - z)^{1:2}}$$

ideoque

$$a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} dz}{2(a - z)^2}$$

Quare

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. 290. & seqq.

Quare tandem habetur

$$\frac{dx\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^n} = \frac{a^{n+5:2}z^{1:2}(a-z)^{n:2}dz}{2a^{3n:2}(a-z)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^{(5-n):2}z^{1:2}(a-z)^{(n-4):2}dz$$

lementum hoc PN*np* areæ APN ingrabile eſt, ſi *n* fuerit numerus poſivus par binario major.

E. gr. Sit $n = 4$; erit $(n-4):2 = 0$, ideoe $(a-z)^{(n-4):2} = (a-z)^0 = 1$ (§. 55 *nalyſ. finit.*), conſequenter

$$PNnp = \tfrac{1}{2}a^{1:2}z^{1:2}dz,$$

:oque $ANP = \tfrac{1}{3}a^{1:2}z^{3:2}$

$$= \tfrac{1}{3}z\sqrt{az}$$

n quia

$$x^2 = a^3:(a-z)$$

$$a-z = a^3:x^2$$

$$z = a - a^3:x^2$$

$$az = (a^2x^2 - a^4):x^2$$

$$\sqrt{az} = a\sqrt{(x^2-a^2)}:x$$

$$\tfrac{1}{3}z\sqrt{az} = \frac{a^2(x^2-a^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}{3x^3}$$

Porro

$$x = t + a$$

$$x^2 = t^2 + 2at + a^2$$

$$x^2 - a^2 = t^2 + 2at$$

$$\tfrac{1}{3}z\sqrt{az} = a^2\frac{(t^2+2at)\sqrt{(t^2+2at)}}{3(a+t)^3}.$$

$$= ANP$$

SCHOLION.

105. *Apparet ideo, exemplum hac non alium ha... uſum, quam ad exercendum calculum ſumma... rum. Et idem quoque de ſequentibus patebit.*

PROBLEMA 7.

106. *Si celeritas tempore* t *acquiſita* ... *rit ut* $t^{n-1}:(t^{2n}+a^{2n})$, *determina...* *ſpatium* r.

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101); erit $r = t^{n-1}dt:(t^{2n}+a^{2n})$. Ut elemen... um integrabile reddatur, fiat

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

erit $t = a^{(n-1):n}x^{1:n}$

$$dt = \tfrac{1}{n}a^{(n-1):n}x^{1:n-1}dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n:t$

$$t^{n-1} = a^{n-1}x:a^{(n-1):n}x^{1:n}$$

$$= a^{(nn-2n+1):n}x^{(n-1):n}$$

$$t^{n-1}dt = \tfrac{1}{n}a^{n-1}dx$$

$$t^{2n} + a^{2n} = a^{2n-2}x^2 + a^{2n}$$

$$\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}+a^{2n}} = \frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2+a^2} = dr$$

Quare ſpatium $r = \frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

Si tangens arcus circuli fuerit x, radius a; erit $\int\frac{a^2dx}{x^2+a^2}$ arcus (§. 158 *Analyſ. infinit.*), ut ideo quadratura curvæ, quæ ſpatium r exhibet, pendeat a rectificatione arcus circuli.

Varignonius formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad ſinum verſum: id quod fit hoc modo. Sit

$$x = a\sqrt{(2a:y-1)}$$

$$= a(2ay^{-1}-1)^{1:2}$$

erit $dx = -a^2y^{-2}dy:\sqrt{(2ay^{-1}-1)}$. Elementum hoc in præſente caſu ſumendum eſt poſitivum, quia creſcente x decreſcit y, conſequenter ipſius y differentiale $= dy$.

Porro $x^2 = 2a^3:y - a^2$

$$x^2 + a^2 = 2a^3:y$$

Quamobrem

$$\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a^2dy}{2a^3y\sqrt{(2ay^{-1}-1)}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

$$\frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2na^{n+1}}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} = dr$$

PRO-

PROBLEMA 8.

107. *Data celeritate* c *tempore* t *acquisita, quæ sit ut* $t^{n-1} : (t^{2n} - a^{2n})$, *invenire spatium* r.

RESOLUTIO.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

erit $dr = t^{n-1}dt : (t^{2n} - a^{2n})$.

Ponatur ut ante (§. 106)

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

reperietur $\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n} - a^{2n}} = \frac{1}{n}a^{1-n} \cdot \frac{dx}{x^2 - a^2} = dr$ prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = a\sqrt{(2ay^{-1} + 1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{a^2dy}{2a^3\sqrt{(2ay + y^2)}}$ ut ante, ideoque tandem

$$dr = \frac{1}{na^{n+2}} \cdot \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay + y^2)}}.$$

Ponatur denique

$$v - a = y$$

erit $v^2 - 2av + a^2 = y^2$

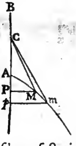
$$2av - 2a^2 = 2ay$$

$$v^2 - a^2 = y^2 + 2ay$$

$$2\sqrt{(v^2 - a^2)} = 2\sqrt{(y^2 + 2ay)}$$

$$dv = dy$$

$$\frac{a^2dv}{2\sqrt{(v^2 - a^2)}} = \frac{a^2dv}{2\sqrt{(y^2 + 2ay)}}.$$



Quoniam $a^2dv : 2\sqrt{(v^2 - a^2)}$ est elementum sectoris hyperbolici CAM, abscissis a centro computatis (§. 189 *Analys. infinit.*); erit dimidius axis hyperbolæ æquilateræ $= a$ & CP $= v$, consequenter $a^2dy : 2\sqrt{(y^2 + 2ay)}$ exprimit elementum ejusdem sectoris CAM, abscissa AP existente y. Patet itaque determinationem spatii in casu præsente pendere a quadratura hyperbolæ.

SCHOLION 1.

108. *Apparet ex his problematis, quam utile sit formulas omnes elementorum arcuum, segmentorum & sectorum pro sectionibus conicis aliisque curvis descriptu facilioribus atque cognitarum proprietatum reperire, sibique familiares reddere, ut formulæ non summabiles ad eas tanquam simpliciores reduci possint, quemadmodum & paulo ante vidimus* (§. 106), *posse constructiones curvarum ad alias descriptu faciliores reduci, per quas construantur: cujus rei exempla quoque dedimus in Algebra* (§. 245 & seqq. Analys. infinit.).

SCHOLION 2.

109. *Potest etiam sectoris* CAM *elementum independenter a formula* $a^2dv : 2\sqrt{(v^2 - a^2)}$ *invenire hoc modo. Sit* AC $=$ CB $= a$, AP $= y$; *erit* PB $= 2a + y$, *consequenter ob* $PM^2 = AP \cdot PB$ (507 Analys. finit.) $= 2ay + y^2$, PM $= \sqrt{(2ay + y^2)}$, *qua in* $\frac{1}{2}$CP $= \frac{1}{2}(a + y)$ *ducta, prodit area trianguli* CMP $= \frac{1}{2}(a + y)\sqrt{(2ay + y^2)}$. *Ergo* CmM + mMPp $= \frac{1}{2}dy\sqrt{(2ay + y^2)} + \frac{(ady + ydy)}{\sqrt{(2ay + y^2)}} \cdot \frac{(a + y)}{2} = \frac{2aydv + y^2dy + \frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$.

Jam mMPp $= dy\sqrt{(2ay + y^2)} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$. *Ergo* CmM *elementum sectoris*

$$CMA = \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay + y^2)}}.$$

DEFINITIO 18.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempusculo quocunque infinite parvo successive nascitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita resolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempusculi particulis natas. Particulæ istiusmodi elementares quantitatis motus tempusculo infinite parvo genitæ dicuntur *Sollicitationes ad motum*.

COROLLARIUM.

111. Quodsi ergo istæ particulæ ponantur æquales, quatenus spectantur ut effectus ab eadem causa tempusculis æqualibus producti; si sollicitatio ad motum dicatur g, erit nisus elementaris seu quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$.

PROBLEMA 9.

112. *Data accelerationis lege, determinare sollicitationem ad motum.*

RESOLUTIO.

Si sollicitatio sit g; erit quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempusculo isto $= dc$, massa mobilis $= m$. Quoniam tempusculo infinite parvo dt motus æquabilis supponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, ideoque $g = mdc : dt$.

Quare si ex data accelerationis lege determinetur dt per dc vel contra, prodibit valor ipsius g.

E.gr. In hypothesi *Galilaeana* gravium seu in motu æquabiliter accelerato celeritas c est ut tempus t, ideoque dt ut dc. Quare g ut $mdc : dc$, hoc est, ut m. Quare patet

Theorema: In hypothesi *Galilaeana* gravium seu in motu æquabiliter accelerato sollicitatio ad motum est ut massa, ideoque constans.

Si fuerit c ut t^n

erit $dc = nt^{n-1}dt$

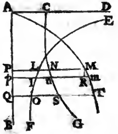
$$g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnt^{n-1}dt}{dt}$$
$$= nmt^{n-1}$$
$$= nmt^n : t$$
$$= nmc \;: t$$

Theorema. Si celeritas crescit in ratione temporis multiplicata, erit sollicitatio ad motum ut factum ex massa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe, & ut tempus reciproce; hoc est, si duo fuerint mobilia, sollicitationes ad motum erunt in ratione composita ex directa massarum & celeritatum in exponentes dignitatis temporum ductarum & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMC}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$ seu ut $NMCt$ ad $nmcT$.

PROBLEMA 10.

113. *Data sollicitatione ad motum, invenire mobilis motu continuo accelerato lati tum velocitatem in locis singulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.*

RESOLUTIO.



Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, PN &c. sint ut sollicitationes ad motum in A, P &c. PM sit ut celeritas a mobili in P acquisita. Ducatur pn ipsi PN infinite propinqua & dicatur $PN = g$, $AP = r$, $PM = c$, massa mobilis $= m$; erit $Pp = dr$. Sit porro tempusculum, quo mobile per Pp descendit, $= dt$: quia motus in spatiolo Pp æquabilis supponitur, erit $c = dr : dt$ (§. 38) & $g = mdc : dt$ (§. 112).

$$cdt = dr \qquad gdt = mdc$$
$$dt = dr : c \qquad dt = mdc : g$$
$$\frac{dr}{c} = \frac{mdc}{g}$$
$$gdr = mcdc$$
$$\int gdr = \tfrac{1}{2}mc^2$$

Est vero $\int gdr$ area APNC & $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}PM^2$. Quare si mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 *Arith.*).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine spatii dati AP acquisita est ut recta, quæ potest aream sollicitationum APNC, seu est in ratione subduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

$$c = dr : dt \qquad \int g\,dr = \tfrac{1}{2} m c^2$$

$$\frac{2\int g\,dr}{m} = c^2$$

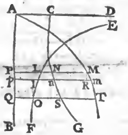
$$\frac{\sqrt{2\int g\,dr}}{\sqrt{m}} = c$$

$$dr : dt = \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}$$

$$dr = dt \,.\, \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}} = dt$$

$$\int dr \,.\, \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}} = t$$



Quodsi ergo fiat $PL = \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{m}}$ seu, mobili existente eodem, $= 1 : \sqrt{2\int g\,dr}$, area DAPLE designabit tempus. Ponamus jam $AQ = R$, $QS = G$; erit $C = \sqrt{2\int G\,dR}$, mobili existente eodem, ut massa poni possit 1, aut ejus nulla habenda sit ratio. Erit ideo

$$C : c = \sqrt{2\int G\,dR} : \sqrt{2\int g\,dr}.$$

$$\text{Sed } PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2\int G\,dR}} : \frac{1}{\sqrt{2\int g\,dr}}$$

$$= \sqrt{2\int g\,dr} : \sqrt{2\int G\,dR}$$

$$\text{Ergo} \quad PL : QO = c : C$$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quaeunque sollicitatione movetur motu contiouo accelerato, erunt tempora QO & PL, quibus spatia data AQ & AP conficit, celeritatibus io fine illorum spatiorum acquisitis reciproce proportionalia, oeoipe ut PM ad QT.

SCHOLION 1.

114. *Consentit analysis cum iis, quæ* Newtonus (a) *demonstravit, nisi quod is vim centripetam vocet, quod nos* sollicitationem *appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem sumunt tanquam effectum vis motricis eidem proportionalem, atque ideo quantitatem motus tanquam mensuram vis illius. Quare cum* Newtonus *vim illam consideret ut urgentem mobile versus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in casu descensus gravium gravitatem vocant, quia gravitas consideratur ut causa acceleratrix motus gravium & celeritas momentis singulis descendenti superaccedens tanquam effectus illius causa.*

SCHOLION 2.

115. *Ex theorematis per problema præsens eruti omnia deducere licet, quæ de motu gravium in hypothesi* Galilæana *sive in alia quacunque demonstrantur. Etenim in hypothesi* Galilæana *est* c *ut* t, *ideoque* dc *ut* dt. *Jam* $g\,dr = c\,dc$ (§. 113). *Ergo* $g\,dr = c\,dt$, *consequenter* $g\,dr : dt = c$, *ideoque ob* $dr : dt = c$ *erit* $gc = c$. *Cum ideo sit* $g = 1$, *gravitas in hypothesi* Galilæana *constans est, hoc est, elementa singula, ex quibus quantitas motus tempusculo infinite parvo constat, sunt inter se æqualia. Jam quia* $g = 1$; *erit in eadem hypothesi* $\int dr = \frac{1}{2}c^2$, *hoc est,* r *ut* c^2 (§. 181 *Arith.*), *quemadmodum supra* (§. 86). *Similiter cum in hypothesi* Baliani *sit* c *ut* r; *erit* $g\,dr = r\,dr$ (§. 113), *ideoque* $g = r$. *Jam initio descensus* $r = 0$: *ergo* $g = 0$; *hoc est sollicitatio ad motum initio nulla est, seu phrasi communi Mathematicorum gravitas nulla est: quod cum sit absurdum, hypothesis* Baliana *impossibilis.*

COROLLARIUM 1.

116. Quoniam $\sqrt{2\int g\,dr}$ = APNC continuo crescit, semiordinata $PL = 1 : \sqrt{2\int g\,dr}$ continuo decrescit. Jam cum sit in A, $dr = 0$; erit $AD = 1 : 0 = \infty$. Est igitur AD asymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLION 3.

117. *Hinc patet ratio, cur curva temporis* ELF *ita fuerit delineata, ut cum axe* AB *non concurrat, sicuti curva celeritatum* AMT, *neque rectam* AD *ad axem* AB *normalem secet, sicuti curva sollicitationum* CNS.

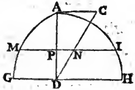
COROLLARIUM 2.

118. Cum sit $g\,dr = c\,dc$ (§. 113), ideoque $g = c\,dc : dr = PM \,.\, Rm : Pp$. Sollicitatio ad motum io quacunque accelerationis hypothesi erit ut subnormalis curvæ celeritatum (§. 35 *Analys. infinit.*).

PRO-

(a) In Princip. Phil. natural. mathemath. lib. 1. prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

PROBLEMA II.



119. ***Si sollicitatio centralis sit distantiæ a centro* AD, PD *&c. proportionalis, invenire velocitatem in quovis puncto* P *& tempus descensus per* AP.**

RESOLUTIO.

Quoniam AD : PD = AC : PN *per hypoth.* scala sollicitationum centralium DC est linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit AD $= a$, AP spatium descensus $= r$, PN sollicitatio in P $= g$; erit PD $= a - r$. Est vero PN ut PD *per hypoth.*, ideoque g ut $a - r$. Quare cum sit (§. 113)

$$\int g\,dr = \tfrac{1}{2}c^2$$

erit

$$\int a\,dr - \int r\,dr = \tfrac{1}{2}c^2$$

$$ar - \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}c^2$$

$$2ar - r^2 = c^2$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD $= a$, AP $= r$: si ex centro D radio AD describatur Quadrans AIH; erit semiordinata PI $= \sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Analys. finit.*). Habemus itaque sequens

Theorema. Si sollicitatio centralis sit proportionalis distantiæ locorum a centro, velocitates in fine spatii acquisitæ sunt sinibus arcuum respondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem descripto.

Porro $dr = c\,dt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ *per demonstrata*:

Ergo

$$dr = dt\sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Quoniam $a\int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ est arcus AI (§. 157 *Analys. infinit.*); erit tempus descensus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque sequens

Theorema. In hypothesi problematis tempora descensus per spatia AP sunt ut arcus circuli AI ex centro D descripti.

Quodsi species curvæ celeritatum AMG desideretur, fiat AC $= b$.

Cum sit AD : AC = DP : PN *per hyp.*

$$a : b = a - r : \text{PN}$$

erit PN $= g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\tfrac{1}{2}c^2 = \int g\,dr$ (§. 113)

Ergo

$$\tfrac{1}{2}c^2 = \int b\,dr - \int br\,dr : a$$

$$= br - br^2 : 2a$$

$$c^2 = 2br - 2br^2 : 2a$$

Patet itaque (§. 421 *Analys. finit.*) sequens

Theorema. In hypothesi problematis locum celeritatum AMG esse ellipsin, cujus parameter 2AC est dupla sollicitatio initialis, axis major 2AD dupla distantia mobilis initio descensus a centro.

Si $a = r$, erit GD$^2 = 2ab - 2a^2b : 2a = 2ab - ab = ab$, ideoque GD $= \sqrt{ab}$. Cum itaque GD sit axis dimidius conjugatus (§. 423 *Analys. finit.*); erit in D centrum ellipseos & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per spatia AP & AD descendit, si sollicitationes fuerint distantiis a centro proportionales, per idem spatium corpus quodvis eodem tempore descendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLION.

121. *Omnia hæc consona sunt iis, quæ* Newtonus (a) *demonstravit.*

(a) In Princip. Phil. natur. Mathem. lib. 1. propofit. 38. pag. 119.

CAPUT III.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO 19.

122. **C***Entrum gravitatis* eſt, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, ſi neutra alteram movet.

COROLLARIUM 1.

123. Quodſi ergo deſcenſus centri gravitatis impeditur, grave quieſcit.

COROLLARIUM 2.

124. Quare ſi corpus ex centro gravitatis ſuſpenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM 3.

125. Totam corporis gravitatem in centrum gravitatis coactam ſupponere licet, ideoque pro corpore gravi ſolum centrum gravitatis ſurrogari poteſt in demonſtrationibus.

DEFINITIO 20.

126. *Diameter gravitatis* eſt recta tranſiens per centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Interſectio itaque duarum diametrorum determinat centrum gravitatis.

DEFINITIO 21.

128. *Planum gravitatis* eſt figura plana, in qua ſitum eſt centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo interſectio duorum planorum gravitatis aut plurium eſt diameter gravitatis.

DEFINITIO 22.

130. *Gravia homogenea* ſunt, quorum gravitates ſunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO 23.

131. *Gravia heterogenea* ſunt, quorum gravitates non ſunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ inter ſe non erunt pondere æquales. Aut ſi duorum gravium partes ſumas volumine æquales & eædem ſint pondere inæquales; gravia inter ſe heterogenea ſunt, licet in ſe homogenea eſſe poſſint.

DEFINITIO 24.

132. *Centrum magnitudinis* eſt punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA 22.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete in medio non reſiſtente eodem tempore per idem ſpatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Deſcendat grave A per ſpatium r; erit tempus deſcenſus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Deſcendat etiam grave B per idem vel æquale ſpatium r; erit etiam tempus deſcenſus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Si ergo ſpatium deſcenſus ex quiete idem eſt, tempus etiam deſcenſus idem eſt. *Q. e. d.*

SCHOLION.

134. *Idem obſervatione confirmatur. Nam in ſpatio ab aere vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aerometria docemus) leviſſima plumula eodem tempore ex data altitudine deſcendit, quo globus plumbeus. Imo ſi corpora magna & ponderoſa in aere per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines ſint mediocres, monente* Hugenio (a). *Pendulorum imprimis expe-*

(a) In Horologio oſcillatorio part. 4. prop. 5.

experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus Ricciolus *globos argillaceos* 20 *unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole illis aquales, sed pondere subduplos per intervallum* 280 *pedum demittens contrarium probare conatur* (a), *ideo non consentiunt, quia resistentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitæ sunt ut tempus (§. 87); velocitates gravium descendentium ex quiete dato tempore æquales sunt.

THEOREMA 23.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendentium dato tempore æquales sunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiæ, quæ cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nisus versus centrum terræ (§. 4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, ideoque illud quod quantitati motus accedit, consequenter sollicitatio ad motum (§. 110). Sed sollicitatio est etiam massæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. *Q. e. d.*

SCHOLION.

137. *Liquet jam veritas definitionis quintæ* (§. 6).

COROLLARIUM 1.

138. Massa igitur corporum recte æstimatur per pondus.

COROLLARIUM 2.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 41); & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46); in quibus vero quantitates motus æquales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 42).

(a) Almag. Nov. Tom. 1. lib. 2. cap. 21. prop. 1. f. 89.

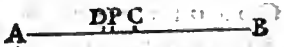
COROLLARIUM 3.

140. Massa invariata pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA 5.

141. *In homogeneis, quæ secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possunt, centrum gravitatis idem est cum centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.



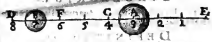
142. Quodsi ergo linea recta AB bifariam secetur in C; erit C centrum gravitatis.

SCHOLION.



143. *Tale corpus homogeneum, quod secundum longitudinem in partes similes secari potest, est e. gr. cylindrus plumbeus. Si enim longitudo* AE *concipiatur in tres partes æquales* ED, DC & CA *vel quotcunque plures divisa; secabitur in cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint* (§. 535 Geom.), *atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium* (§. 570 Geom.).

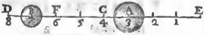
THEOREMA 24.



144. *Si centra gravitatis duorum corporum* A & B *jungantur recta* AB, *centri gravitatis communis* C *distantiæ* BC & CA *a centris gravitatis particularibus* B & A *sunt reciproce ut pondera* A & B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 libra-



brarum, pondus B 2, & AC : CB = 1 : 3. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec BD = AC & AE = CB; erit EC = CD (§. 88 *Arith.*). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales divisa, quot nempe librarum sunt pondera junctim sumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomodocunque varietur figura (§. 140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffusa concipiatur, centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur ideo gravitas ipsius B per FD & gravitas ipsius A per EF uniformiter (§. 142), consequenter pondera A & B junctim sumta rectam ED repræsentabunt. Hujus vero centrum gravitatis commune est in C (§. *cit.*). Ergo idem est centrum gravitatis commune ponderum A & B. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

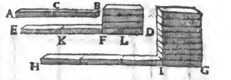
145. Quodsi gravitates corporum A & B fuerint æquales, centrum gravitatis commune C erit in medio rectæ AB centra gravitatis conjungentis.

COROLLARIUM 2.

146. Quia A : B = BC : AC; erit A . AC = B . BC. Unde patet vires æquiponderantium æstimandas esse per factum ex massa in distantiam a centro gravitatis. Factum hoc *Momentum* ponderum vulgo vocant.

SCHOLION.

147. *Theorema hoc utilissimum experimento non ineleganti illustrari potest. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter se æqualia & quorum latitudo sit dupla profunditatis, longitudo vero sextupla latitudinis: quamvis necesse non sit, ut hæ rationes accurate observentur, sufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimensiones. Paren-*



tur præterea alia quædam: unum sit longitudinis duplæ, alterum triplæ, tertium quadruplæ & ita porro. Quodsi parallelepipedum longitudinis duplæ collocet super latere prismatis trigoni, ita ut latus prismatis ipsum dividat in partes æquales AC *&* CB; *partes* AC *&* CB *æquiponderabunt: quæ ipso axiomate (§. 141) confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum triplæ longitudinis* DE *ea lege super prismate, ut ejus latus ipsum dividat in partes* DF *&* FE, *quæ sunt in ratione subdupla: pars* FE *præponderabit. Quodsi vero tria parallelepipeda simplicis longitudinis ipsi* DF *superimposueris; quatuor parallelepipeda duobus* FK *&* KE *in unum* FE *conjunctis æquiponderabunt. Est enim ipsius* FE *centrum gravitatis in* K *& ipsius* DF *in media* L *per experimentum primum. Distantiæ igitur centrorum gravitatis a fulcro* LF *&* FK *sunt ut* DF *&* FE *seu ut pondera* (§. 130 Mech. & §. 573 Geom.). *Est ergo ibi centrum gravitatis commune, ut habet theorema nostrum* (§. 144). *Eodem modo deprehenditur 9 prismata sibi mutuo superimposita æquiponderare uni* IH, *cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.*

COROLLARIUM 3.

148. Quoniam (*Vid. Fig.* 1.) A : B = BC : AC (§. 144); erit etiam A + B : A = BC + AC : BC (§. 290 *Arith.*).

COROLLARIUM 4.

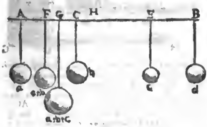
149. Reperitur ideo centrum gravitatis commune duorum ponderum C, si factum ex pondere uno A in distantiam centrorum gravitatis separatorum AB (= AC + CB) dividatur per summam ponderum A & B (§. 302 *Arith.*). Sit e. gr. A = 12, B = 4, AB = 24; erit BC = 24 . 12 : 16 = 18.

COROLLARIUM 5.

150. Quodsi pondus A detur & distantia centrorum gravitatis particularium AB una cum centro gravitatis communi C, reperitur pondus B = A . AC : BC (§. 302 *Arith.*), hoc est, si momentum ponderis dati dividatur per distantiam ponderis quæsiti B a centro gravitatis communi (§. 146). Sit e. gr. A = 12, BC = 18, AC = 6; erit B = 6 . 12 : 18 = 12 : 3 = 4.

PRO-

PROBLEMA 12.



151. *Ponderum plurium datorum* a, b, c, d *centrum gravitatis commune in recta* AB *determinare.*

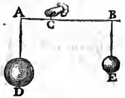
RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis commune duorum ponderum *a* & *b* (§. 149): quod sit in F.
2. In F concipiatur applicari pondus *a* + *b* duobus reliquis *a* & *b* æquale (§. 125) & quæratur porro in recta FE centrum gravitatis commune ponderum *a* + *b* & *c* (§. 149): quod sit in G.
3. Denique in G concipiatur applicari pondus *a* + *b* + *c* duobus *a* + *b* & *c* æquale (§. 125) & quæratur inter ipsum & pondus *d* centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod sit in H.

Est ideo H centrum gravitatis commune ponderum *a*, *b*, *c* & *d*. Patet etiam, quomodo sit progrediendum, si plura pondera dentur.

Sit e. gr. *a* = 20; *b* = 10, *c* = 15, *d* = 5, AC = 9, CE = 6, EB = 12; erit AF = *b*. AC : (*a* + *b*) = 10.9 : 30 = 3, ideoque FC = 6 & FE = FC + CE = 12. Hinc reperitur FG = *c*. FE : (*a* + *b* + *c*) = 15.12 : 45 = 4. Quare GE = FE − FG = 8 & GB = GE + EB = 20. Invenitur ideo GH = *d*. GB : (*a* + *b* + *c* + *d*) = 5.20 : 50 = 2. Unde HB = GB − GH = 18 & (ob AB = AC + CE + EB = 27) AH = 9.

PROBLEMA 13.



152. *Duobus ponderibus* D & E *extra centrum gravitatis commune in* C *suspensis, determinare, quodnam eorum & quantum præponderet.*

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in distantiam suam a centro suspensionis; nempe D in AC & E in BC: ex qua parte factum majus prodit, versus eam est præponderatio.
2. Factum minus a majore subtrahatur: erit residuum præpondium.

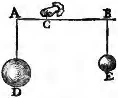
E. gr. Sit D = 30 librarum, E = 20, AC = 2, BC = 4; erit D. AC = 60, E. BC = 80, ideoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit AC : CB = *d* : *md* & pondus D = *mp*; æquiponderabit eidem in B pondus *p* (§. 144). Sed pondus E majus est quam *p*. Dicatur ergo excessus *r*, ita ut sit E = *p* + *r*. Quoniam momentum ipsius *r* æquale est momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur *mrd* (§. 146); excessus momenti ponderis E supra momentum alterius D est *mrd*. Sed *mrd* est differentia inter *mpd* & *mpd* + *mrd*, hoc est, inter D. AC & E. BC. Relinquitur ideo excessus momenti ipsius E supra momentum alterius D, si factum D. AC ex E. CB subtrahitur. *Q. e. d.*

COROL-

Corollarium 1.

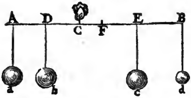


153. Ponderum D & E itaque extra centrum gravitatis in C suspensorum momenta sunt in ratione composita ipsorummet ponderum D & E & distantiarum a puncto suspensionis AC & CB.

Corollarium 2.

154. Ponderis itaque ex ipso puncto C suspensi momentum respectu reliquorum D & E nullum est, seu eadem ratione D & E inter se ponderant, ac si pondus in C plane abesset, quia scilicet distantia ejus nulla est.

Problema 14.



155. *Determinare præponderationem, ponderibus pluribus* a, b, c, d *extra centrum gravitatis in* C *suspensis.*

Resolutio.

1. Ducantur pondera *c* & *d* in suas distantias a puncto suspensionis CE & CB; summa dabit momentum ponderum *c* & *d* junctim, seu ponderationem versus dexteram (§. 153).
2. Ducantur quoque pondera *a* & *b* in suas distantias AC & CD; summa denuo dabit ponderationem versus sinistram (§. *cit.*).
3. Quodsi ergo ponderationem majorem a minore subtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæsita.

E. gr. Sit AC = 6, DC = 4, CE = 5, CB = 8, *a* = 12, *b* = 15, *c* = 20, *d* = 8; erit ponderatio versus dexteram = *c*. EC + *d*. CB = 20 . 5 + 8 . 8 = 164; versus sinistram = *a*. AC + *b*. DC = 12 . 6 + 15 . 4 = 132. Præponderant ergo *c* & *d* versus dexteram momento ut 32.

Problema 15.

156. *Ponderibus quotcunque extra centrum gravitatis in* C *suspensis & versus dexteram præponderantibus, determinare punctum* F, *ex quo si summa omnium ponderum suspendatur, eadem maneat præponderatio versus dexteram, quæ fuerat ante in dato ponderum* a, b, c, d *situ.*

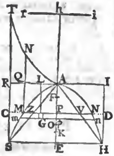
Resolutio.

1. Inveniatur momentum, quo pondera *c* & *d*, vel quotcunque fuerint, versus dexteram præponderant (§. 155).
2. Cum momentum summæ ponderum in F suspendendæ eidem æquale esse debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in summa ponderum (§. 153). Quare si per summam ponderum dividatur; quotus erit distantia CF, ex qua suspendenda est ponderum summa, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arith.*).

E. gr. Sint omnia ut in problemate præcedenti: erit momentum, quo pondera versus dexteram præponderant 32. Quodsi hoc dividas per summam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ est distantia CF quæsita.

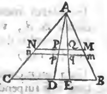
COROL-

COROLLARIUM.



157. Si elementa figurarum, quale $mMNn$, concipiantur instar ponderum ad axem AE appensorum & in vertice A punctum suspensionis; determinabitur punctum in AE, ex quo summa omnium ponderum suspensa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc est, centrum gravitatis (§. 125), summa momentorum omnium ponduscolorum per summam ponduscolorum divisa (§. 153). Sit enim AP $= x$, MP $= y$, P$p = dx$; erit unum pondusculum $2ydx$, summa omnium $2\int ydx$, momentum unius ponduscoli $2yxdx$ (§. 153), summa omnium $2\int yxdx$, consequenter distantia centri gravitatis a vertice AF $= \int yxdx : \int ydx$. Quodsi ideo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in analysi infinitorum docuimus, centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA 16.



158. *Determinare centrum gravitatis in triangulo* BAC.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD basin BC bifariam secans in D. Quoniam △ BAD = △ DAC (§. 440 *Geom.*): utrumque in totidem ponduscula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata resolvi potest; ideoque centrum gravitatis △ BAC erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat AD $= a$, BC $= b$, AP $= x$, MN $= y$; erit (§. 268 *Geom.* & §. 187 *Arith.*)

$$AP : MN = AD : BC$$
$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur AE $= c$ perpendicularis ad BC; erit AD : AE = AP : AQ (§. 268 *Geom.*), ideoque AQ $= cx : a$ & Q$q = cdx : a$. Unde momentum $yxdx = cbx^2 dx : a^2$ & $\int yxdx = cbx^3 : 3a^2$, quæ summa per aream trianguli AMN $= cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Geom.*) divisa dat distantiam centri gravitatis a vertice $= 2abx^3 : 3abx^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodsi pro x substituatur a; prodibit distantia centri gravitatis totius trianguli a vertice $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$AD.

PROBLEMA 17.

159. *Determinare centrum gravitatis in parabola.*

RESOLUTIO.

Ad parabolam est (*Vid. Fig.* §. 157)

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx \quad (\text{§. 103 } \textit{Anal. infin.})$$
$$xydx = a^{1:2}x^{3:2}dx$$
$$\int xydx = \tfrac{2}{5}a^{1:2}x^{5:2}$$

sed $\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$ (§. *cit.*)

Ergo $\int xydx : \int ydx = \frac{3}{5}x =$ AF (§. 157).

PROBLEMA 18.

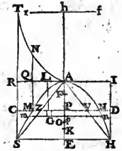
160. *Determinare centrum gravitatis in omnibus parabolis superiorum generum & curvis agnatis in infinitum.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis est (§. 105 *Analys. infinit.*)

$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$
$$xydx = a^{n:r}x^{(m+r):r}dx$$
$$\int xydx = \frac{r}{m+2r}a^{n:r}x^{(m+2r):r}$$
$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{(m+r):r} \quad (\text{§. } \textit{cit.})$$
$$\int xydx : \int ydx = \frac{(m+r)}{m+2r}x = \text{AF} \; (\text{§. 157}).$$

E. gr. In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analys. finit.*) Ergo AF $= \frac{4}{7}$AP.



In paraboloide biquadratico $m = 1$, $r = 4$. Ergo AF $= \frac{5}{9}$AP.

In paraboloide surdesolidali $m = 1$, $r = 5$. Ergo AF $= \frac{6}{11}$AP.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$, AF $= \frac{5}{8}$AP.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, AF $= \frac{7}{11}$AP.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, AF $= \frac{9}{14}$AP.

COROLLARIUM.

161. Distantia ergo centri gravitatis a basi FP est $= x - \frac{(m - r)}{m + 2r}x = \frac{mx + 2rx - mx - rx}{m + 2r}$ $= \frac{r}{m + 2r}x$.

E. gr. In parabola *Apolloniana* $m = 1$, $r = 2$. Ergo PF $= \frac{2}{5}$AP.

In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{7}$AP.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{8}$AP.

PROBLEMA 19.

162. *Determinare centrum gravitatis in parabola exteriore (Vid. Fig. præc.)* AST.

RESOLUTIO.

Si AQ $= x$, QM $= y$, parameter $= 1$; erit (§. 388 *Analys. finit.*) $x^2 = y$ & hinc

$$xydx = x^3dx$$
$$\int xydx = \tfrac{1}{4}x^4$$
$$\int ydx = \tfrac{1}{3}x^3$$
$$\int xydx : \int ydx = \tfrac{3}{4}x = \tfrac{3}{4}\text{AQ} = \text{AL}.$$

PROBLEMA 20.

163. *Determinare centrum gravitatis in infinitis parabolis exterioribus superiorum generum & aliis curvis agnatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter $= 1$, pro infinitis parabolis superioribus & curvis agnatis est $x^r = y^n$ (§. 519 *Analys. finit.*).

Quare

$$ydx = x^{r:n}dx$$
$$xydx = x^{(r+n):n}dx$$
$$\int xydx = \frac{nx^{(r+2n):n}}{r + 2n}$$
$$\int ydx = \frac{n}{r + n}x^{(r+n):n}$$
$$\int xydx : \int ydx = \frac{(r + n)}{r + 2n}x = \text{AL}.$$

E. gr. in paraboloide cubicali $r = 3$, $n = 1$. Ergo AL $= \frac{4}{5}$AQ.

In paraboloide biquadratico $r = 4$, $n = 1$. Ergo AL $= \frac{5}{6}$AQ.

In paraboloide surdesolidali $r = 5$, $n = 1$. Ergo AL $= \frac{6}{7}$AQ.

In curva, ad quam $x^3 = y^2$, $r = 3$, $n = 2$. Ergo AL $= \frac{5}{7}$AQ.

In curva, ad quam $x^4 = y^3$, $r = 4$, $n = 3$. Ergo AL $= \frac{7}{10}$AQ.

PROBLEMA 21.

164. *Determinare centrum gravitatis in curva, ad quam* $b^2y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$ (§. 111 *Analys. infinit.*)

$$xydx = (bx^3dx - x^4dx) : b^2$$
$$\int xydx = x^4 : 4b - x^5 : 5b^2 = (5bx^4 - 4x^5) : 20b^2$$
$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2 = (4bx^3 - 3x^4) : 12b^2$$
$$\int xydx : \int ydx = \frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)}$$
$$= \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = \text{AF}.$$

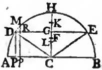
Est ideo $20b - 15x : 15b - 12x = x :$ AF.

PRO-

PROBLEMA 22.

165. *Determinare centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.*

RESOLUTIO.

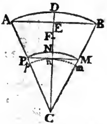


Sit Mp ad AB normalis ipsi DP infinite propinqua; erit arculus DM infinite parvus. Sit chordæ DE, arcus dati DHE, diameter AB parallela, quæ instar axis consideretur, ad quem pondufcula MD applicata, quorum ideo momenta erunt ut MD . PD. Quoniam itaque ad radium HC, qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) bisecat, pondufcula & numero & momento æqualia utrinque disponuntur; transit is per centrum gravitatis (§. 122). Sit jam $PC = DG = x$, $DC = a$; erit $DR = Pp = dx$. Jam cum sit angulus CDM rectus (§. 309 *Geom.*) & PDE itidem rectus (§. 230 *Geom.*), ideoque PDC = RDM (§. 91 *Arith.*), sintque etiam anguli DRM & DPC recti *per constru&.* erit $MD:DR = DC:PD$ (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur $MD . PD = DR . DC = adx$ (§. 297 *Arith.*). Summa ergo momentorum arcus DH $ax = DC . DG$, quæ divisa per arcum DH centri gravitatis K distantiam a centro circuli C determinat (§. 157). Est itaque arcus $DH:DG = DC:CK$.

Quodsi pro DH ponatur quadrans AH & pro DG radius AC; prodibit distantia centri gravitatis semiperipheriæ $AC^2:AH$, hoc est, distantia hæc CF est tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

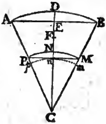
PROBLEMA 23.

166. *Determinare centrum gravitatis in sectore circuli* ACB.



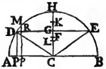
RESOLUTIO.

Ex antecedentibus liquet, si DC sectorem bifariam secet, centrum gravitatis fore in recta DC. Ducatur radio PC arcus PNM & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam segmentum annulare est pondusculum ex centro C suspensum, & quidem simul differentiale sectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp seu Nn momentum segmenti annularis $PNMmnp$, hoc est, differentiale momenti sectoris. Jam momentum arcus $ADB = 2AC . AE$ & momentum arcus $PNM = 2PC . Pn$ (*per demonstrata in* §. 165) & $\triangle ACB = EC . AE$ atque $\triangle PCM = Pn . Cn$ (§. 392 *Geom.*). Est igitur $\triangle ACB : \triangle PCM = EC . AE : Cn . Pn$ & momenta arcuum ADB & PNM $= AC . AE : PC . Pn$ (§. 181 *Arith.*). Est vero $AC:PC = EC:Cn$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $\triangle ACB : \triangle PCM = AC . AE : PC . Pn$ (§. 184 *Arith.*), consequenter momentum arcus ADB est ad momentum arcus PNM ut $\triangle$ ACB ad $\triangle$ PCM (§. 167 *Arith.*), hoc est, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus $AD = p$, $AC = a$, $AE = b$; erit momentum arcus $ADB = 2ab$ (*per demonstrata in* §. 165). Sit porro $PC = x$; reperietur per modo demonstrata momentum arcus PNM



$= 2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$; momentum vero ſegmenti annularis $PMmp = 2bx^2dx : a$. Hujus ſumma $2bx^3 : 3a$ eſt momentum ſectoris CPM. Quare ſi fiat $x = a$, erit momentum ſectoris $CAB = 2a^3b : 3a = \frac{2}{3}a^2b$, quo per ſummam ponderum ſeu aream ſectoris $ACB = ap$ diviſo, prodibit diſtantia centri gravitatis ſectoris $ACB = 2ab : 3p = 2AC . AE : 3AD$. Eſt vero $AC . AE : AD$ diſtantia centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Diſtantia igitur centri gravitatis ſectoris a centro circuli eſt ad diſtantiam centri gravitatis arcus ut 2 ad 3.

Corollarium.



167. Diſtantia ergo centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli C eſt $\frac{2}{3}AC^2 : AH$ (§. 165). Quare ut $\frac{2}{3}AH$ ſeu arcus 60° ad $\frac{2}{3}AC$ ita $\frac{2}{3}AC$ ad diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli (§. 185 *Arith.*).

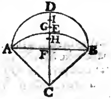
Problema 24.

168. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti* DHED.

Resolutio.

1. Quæratur centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158); quod ſit in L.
2. Quæratur centrum gravitatis ſectoris DCEHD (§. 166); quod ſit in F.
3. Cum F ſit commune centrum gravitatis trianguli DCE & ſegmenti DEHD; quæratur ad ſegmentum DEHD, triangulum DCE & LF quarta proportionalis FK; erit FK diſtantia centri gravitatis ſegmenti K a centro gravitatis ſectoris F (§. 144). Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præſtare licebit data circuli quadratura.

Problema 25.



169. *Invenire centrum gravitatis Lunulæ Hippocratis* ADBΣA.

Resolutio.

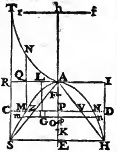
1. Quæratur centrum gravitatis ſemicirculi ADB (§. 167): quod ſit in G.
2. Quæratur porro centrum gravitatis ſegmenti AEBFA (§. 168): quod ſit in H.
3. Cum ideo G ſit centrum gravitatis commune Lunulæ *Hippocratis* ADBEA & ſegmenti AEBA; quæratur ad Lunulam, ſegmentum & HG quarta proportionalis GI: erit GI diſtantia centri gravitatis Lunulæ I a centro gravitatis ſemicirculi G (§. 144).

Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, niſi numeris utamur.

PRO-

PROBLEMA 26.

170. *Invenire centrum gravitatis in parabola truncata* SMNH.



RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis parabolæ MAN(§.159): quod sit in F.
2. Quæratur item centrum gravitatis parabolæ SAH (§.*cit.*): quod sit in O.
3. Quoniam centrum gravitatis commune parabolæ MAN & parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratur porro ad parabolam truncatam SMNH, parabolam MAN & distantiam FO quarta proportionalis OK; erit in K centrum gravitatis parabolæ truncatæ (§. 144).

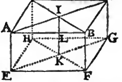
SCHOLION.

171. *Patet, eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illustravimus, semper inveniri centrum gravitatis differentiæ duarum figurarum, quarum centra gravitatis dantur.*

PROBLEMA 27.

172. *Invenire centrum gravitatis in parallelogrammo & parallelepipedo.*

RESOLUTIO.



1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per centrum magnitudinis (§. 132), ideoque & gravitatis transit (§.122), consequenter in I est centrum gravitatis parallelogrammi (§. 141). Eodem modo patet in K esse centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum CBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*); utrumque per ejus centrum magnitudinis (§. 132), ideoque & gravitatis transit (§. 141), consequenter communis intersectio IK est diameter gravitatis (§. 126).
2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum transiens per L & basibus parallelum parallelepipedum bifarium dividit (§. 535 *Geom.*); per centrum gravitatis transit (§.141), ideoque in L gravitatis centrum est.

SCHOLION.

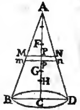
173. *Attendentibus statim manifestum est, non absimili modo centrum gravitatis in prismatibus & cylindris reperiri, esseque illud punctum medium rectæ centra gravitatis basium oppositarum conjungentis. In polygonis autem regularibus centrum gravitatis idem esse cum centro circuli circumscribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum vero centrum gravitatis segmentorum & sectorum, imo lunularum circuli per superiora inveniri potest; ita per problema præsens constat, quomodo variorum segmentorum cylindricorum centrum gravitatis inveniri possit, quorum nempe bases sunt circuli segmenta, sectores, annuli, lunulæ.*

PROBLEMA 28.

174. *Invenire centrum gravitatis Coni & Pyramidis.*

RESO-

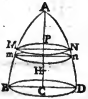
RESOLUTIO.



Centrum gravitatis coni esse in axe AC satis claret ex superioribus. Si AP $= x$; Pp $= dx$ & pondusculum in cono est $prx^2dx : 2a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*), ideoque momentum ejus $prx^3dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc summa momentorum est $prx^4 : 8a^2$, quæ per summam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*) divisa dat distantiam centri gravitatis portionis AMN a vertice A $= 6a^2prx^4 : 8a^2prx^3 = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$AP(§.157), ideoque coni integri centrum gravitatis distat a vertice $\frac{3}{4}$AC.

Eodem prorsus modo invenitur distantia centri gravitatis a vertice in pyramide $= \frac{3}{4}$AC.

PROBLEMA 29.



175. *Invenire centrum gravitatis Conoidis parabolici* ABCD *ex rotatione parabolæ Apollonianæ* ABC *circa axem* AC *geniti*.

RESOLUTIO.

Pondusculum conoidis MNnm $= pxdx : 2r$ (§. 202 *Analys. infinit.*) ideoque momentum $= px^2dx : 2r$ (§.153), consequenter summa momentorum $= px^3 : 6r$, quæ per summam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analys. infinit.*) divisa dat distantiam centri gravitatis portionis conoidicæ AMPN a vertice A $= 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3}x$. Est ideo distantia centri gravitatis a vertice in conoide parabolico ABD $= \frac{2}{3}$AC.

PROBLEMA 30.

176. *Invenire centrum gravitatis conoidis paraboloidici ex rotatione paraboloidis cujuscunque* (*Vid. Fig.* §. 175) AMBC *circa axem* AC *geniti*.

RESOLUTIO.

Pondusculum Conoidis paraboloidici indefinitum est $px^{2:m}dx : 2r$ (§. 202 *Analys. infin.*), ideoque momentum ejus $px^{(2+m):m}dx : 2r$ (§. 153). Hinc summa momentorum $mpx^{(2+2m):m} : (4m + 4)r$, quæ per summam ponderum $mpx^{(2+m):m} : (2m+4)r$ (§. 202 *Analys. infinit.*) divisa dat distantiam centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice A $= (2m+4)mrpx^{(2+2m):m} : (4m + 4)\, mrpx^{(2+m):m} = \frac{m+2}{2m+2}x = \frac{m+2}{2m+2}$AP, consequenter in integro Conoide $\frac{m+2}{2m+2}$AC.

Sit e. gr. $m = 2$; erit AH $= \frac{2}{3}$AC.
Sit $m = 3$; erit AH $= \frac{5}{8}$AC.
Sit $m = 4$; erit AH $= \frac{3}{5}$AC.
Sit $m = 5$; erit AH $= \frac{7}{12}$AC.

PROBLEMA 31.

177. *Invenire centrum gravitatis segmenti sphæræ*.

RESOLUTIO.

In segmento sphærico pondusculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analys. infinit.*), ideoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde summa momentorum $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ per summam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Analys. infinit.*) divisa definit distantiam centri gravitatis a vertice

$= 12r$

$= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Est ideo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc est, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Arith.*) ita x ad distantiam centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quodsi pro x substituatur r seu semidiameter sphæræ, prodibit distantia centri gravitatis a vertice in hemisphærio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo si pro x substituatur $2r$, sphæræ integræ centrum gravitatis reperitur distare a vertice semidiametro r, hoc est, idem cum centro sphæræ.

PROBLEMA 32.

179. *Invenire centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico pondusculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Analys. infinit.*), ideoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum summa $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ per summam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *cit. Analys. infinit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ divisa distantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4pbx^3) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Est ideo ut $6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad distantiam centri gravitatis a vertice. Constat vero esse a axem transversum hyperbolæ genitricis, x altitudinem conoidis, seu illius abscissam (§. 459 *Analys. finit.*).

PROBLEMA 33.

180. *Invenire centrum gravitatis segmenti sphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In sphæroide elliptico pondusculum $pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*), ideoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r - pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare momentorum summa $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ per summam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ divisa distantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Est ideo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc est, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$ ita x ad distantiam centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem ellipsis genetricis, seu ipsum axem majorem sphæroidis; x autem altitudinem segmenti, seu portionem axis inter verticem & basin interceptam (§. 420 *Analys. finit.*).

COROLLARIUM 1.

181. Quodsi pro x ponatur a, prodit pro centro gravitatis totius sphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Est nempe in medio axe.

COROLLARIUM 2.

182. Sphæræ igitur & sphæroidis elliptici communem axem habentium centrum gravitatis idem est (§. 178).

COROLLARIUM 3.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit distantia centri gravitatis in dimidio sphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem ideo quæ in hemisphærio (§. 178). Nam si ut ibi fiat $a = 2r$; erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

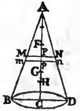
PROBLEMA 34.

184. *Invenire centrum gravitatis in Cono truncato* (*Vid. Fig.* §. 174) BMND *& in Pyramide truncata.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur centrum gravitatis coni AMN (§. 174): quod sit in F.

2. In-



2. Inveniatur quoque centrum gravitatis coni majoris BAD (§. *cit.*): quod sit in G.
3. Quæratur ad conum truncatum BMND, conum minorem MAN & FG quarta proportionalis GH; erit in H centrum gravitatis coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem coni truncati BMND ad minorem MAN lineis esse exprimendam, nisi numeris utamur.

Eodem prorsus modo in pyramide truncata invenitur centrum gravitatis.

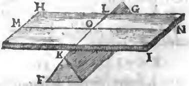
SCHOLION.

185. *Eadem methodo centrum gravitatis reperies in conoidibus truncatis, itemque in sphara & sphæroidibus truncatis. Enimvero quamvis multa adhuc ea de re addi possent; filum tamen abrumpi consultum ducimus, cum ex hactenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant usum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum centrum gravitatis aut punctum ipsi in superficie corporis cujuscunque respondens, mechanice explorandi, quantum ad praxin sufficit.*

PROBLEMA 35.

186. *Determinare centrum gravitatis mechanice in corpore quocunque.*

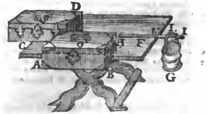
RESOLUTIO.



1. Super fune extenso aut latere prismatis trigoni FG corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, transit per centrum gravitatis (§. 124).
2. Super eodem corpus mutato situ æquilibretur: erit MN denuo latus plani per centrum gravitatis transeuntis (§. *cit.*).

Intersectio ideo rectarum MN & KL determinat punctum O in superficie corporis quæsitum, quod nempe est in diametro gravitatis (§. 126).

ALITER.



1. Corpus datum O ita collocetur super tabula horizontali, ut, si vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).
2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, sit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. *cit.*).

Communis ideo intersectio rectarum AB & CD in superficie corporis punctum C centro gravitatis imminens determinat (§. 129).

ALITER.

Laminæ centrum gravitatis invenies,

nies, si cuspidi alicujus styli eam imposueris & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo sustentatur, centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

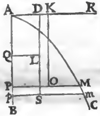
187. Corporis ideo humani in directum extensi centrum gravitatis, vi modi primi, observante Borello (a), inter nates & pubim existit. Quare totius corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura concessit locum.

SCHOLION.

188. *Quoniam subinde etiam in applicatione methodi superioris distantia centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in solidis, ut illic per intersectionem duorum, hic trium normalium prodeat centrum gravitatis; ideo unum saltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus suspendendis utile etiam est nosse perimetrorum centra gravitatis; ideo nec inconsultum videtur uno altereque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illustrata* (§. 157 & seqq.) *huc applicetur.*

PROBLEMA 36.

189. *Invenire centrum gravitatis in spatio parabolico mixtilineo* APM.



RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua. Quæratur primo distantia centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum elementum PM*mp*, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 *Analys. infinit.*), consideretur instar pondusculi ad axem librationis AB in P suspensi, erit momentum ejus $= PMmp \cdot \frac{1}{2}PM$ (§. 146), centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§. 172). Sit jam $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = dx$, ideoque $PpmM = ydx$, consequenter momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2dx$. Jam in parabola $y^2 = x$, parametro existente 1 (§. 388 *Analys. finit.*), atque hinc $2ydy = dx$. Quare momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2dx = y^3dy$, eorumque summa $= \frac{1}{4}y^4$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $= \int ydx = \int 2y^2dy = \frac{2}{3}y^3$. Ergo $QL = \int \frac{1}{2}y^2dx : \int ydx$ (§. 157) $= 3y^4 : 8y^3 = \frac{3}{8}y$. Quare si fiat $AD = \frac{3}{8}PM$ & ex puncto D ducatur DL ipsi AB parallela; erit in ea centrum gravitatis spatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex centro gravitatis O parallelogrammuli PM*mp* ad AR normalis OK, & consideretur instar pondusculi ad axem librationis AR suspensi; erit PM*mp*.OK momentum ejus $= xydx$ (§. 146). Est vero in parabola $y = x^{1:2}$ (§. 392 *Analys. finit.*). Ergo momentum pondusculi $= x^{3:2}dx$, consequenter eorum summa $= \int xydx = \frac{2}{5}x^{5:2}$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2}$ (§. 103 *Analys. infinit.*). Ergo $DL = \int xydx : \int ydx$ (§. 157) $= 3x^{5:2} : 5x^{3:2} = \frac{3}{5}x$. Quare si fiat $AQ = \frac{3}{5}AP$ & in Q erigatur normalis QL ipsi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L centrum gravitatis spatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

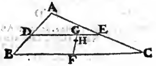
PROBLEMA 37.

190. *Invenire centrum gravitatis perimetri trianguli.*

(a) De motu animalium part. 1. prop. 134. p. m. 167.

RESOLUTIO.





Sit triangulum ABC æquilaterum, vel scalenum.

1. Bisecentur rectæ in D, E & F; erunt puncta ista centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§. 142).

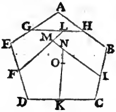
2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam divisa in triangulo æquilatero, reciproce vero lateribus AB & AC in scaleno; erit G centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§. 145. 144).

3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC instar ponderum consideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens (§. 125), fiatque ducta recta GF ut AB + AC + BC : BC = GF : GH; erit in H centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 151).

PROBLEMA 38.

191. *Invenire centrum gravitatis perimetri figuræ irregularis cujuscunque, v. gr. Pentagonæ.*

RESOLUTIO.



1. Bisecentur singula latera AE, ED, DC, CB, BA in G, F, K, I, H; erunt in istis divisionum punctis eorum centra gravitatis particularia (§. 142).

2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque AB + AE : AE = GH : HL; erit in L centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 151).

3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque AB + AE + ED : ED = LF : LM; erit in M centrum gravitatis commune laterum AB, AE & ED (*§. cit.*).

4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque AB + AE + ED + BC : BC = MI : MN; erit in N centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (*§. cit.*).

5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque AB + BC + CD + DE + EA : DC = NK : NO; erit in O centrum gravitatis commune totius perimetri (*§. cit.*).

SCHOLION.

192. *Me non monente apparet, hac ratione determinari posse centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomodocunque in eodem plano sitorum.*

THEO-

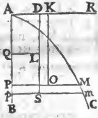
THEOREMA 25.

193. *Omnis figura sive superficialis, sive solida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis, seu lineam, quam centrum gravitatis describit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale facto ex pondere moto in viam centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ instar gravium homogeneorum considerentur; pondera ipsarum sunt ut volumina (§. 130), ideoque pondus motum est magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis. *Q. e. d.*

ALITER.



Idem etiam analytice ostenditur de solido rotatione genito hoc modo. Sit $AP = x$, $PM = y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $= r : p$; erit solidum rotatione genitum $= \int py^2dx : 2r$ (§. 197 *Analys. infinit.*). Sit jam in L centrum gravitatis & $QL = pS$ distantia ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio pS descripti via rotationis centri gravitatis. Quare cum sit $pS = \frac{1}{2}\int y^2dx : \int ydx$ (*per demonstr. in* §. 189); erit via rotationis centri gravitatis $= p\int y^2dx : 2r\int ydx$. Quare si in hanc viam ducatur planum generans $\int ydx$ (*per demonstr. in* §. 189); erit solidum rotatione genitum $= p\int y^2dx : 2r$, ut ante.

COROLLARIUM 1.



194. Hinc cum parallelogrammum ABDC describatur, si recta AB juxta ductum alterius AC motu sibi semper parallelo descendat (§. 102 & 257 *Geom.*) & ex coroll. 2. theor. 26 (§. 215) independenter ab his constet, viam centri gravitatis E æqualem esse rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc est, altitudini parallelogrammi (§. 115 *Geom.*); area ejusdem æquatur facto ex basi CD seu linea describente in altitudinem EF.

SCHOLION 1.

195. *Hæc consona sunt iis, quæ de parallelogrammorum areis investigandis demonstrata sunt in* Geometria (§. 370. 375. 387 Geom.).

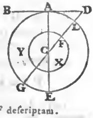
COROLLARIUM 2.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quaconque juxta ductum alicujus rectæ AC descendit, soliditatem haberi, si planum describens per altitudinem multiplicetur.

SCHOLION 2.

197. *Hæc denuo consentiunt cum iis, quæ de prismates & cylindris dimetiendis in* Geometria *demonstrata sunt* (§. 539 & 541 Geom.).

COROLLARIUM 3.



198. Cum circulus describatur, si radius CL circa centrum C rotetur (§. 131 *Geom.*); centrum vero gravitatis radii CL sit in medio F (§. 142); via centri gravitatis est peripheria circuli a radio subduplo descripta, consequenter area circuli æquatur facto ex radio CL in peripheriam radio subduplo CF descriptam.

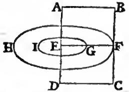
SCHOLION 3.

199. *Hæc iis consontanea esse, quæ in* Geometria *de circulo demonstrata sunt* (§. 410 Geom.),

 statim

ſtatim patet conſideranti, quod peripheria radio ſubduplo deſcripta ſit peripheriæ integro deſcripta dimidia (§. 412 Geom.).

COROLLARIUM 4.



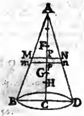
200. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipſum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri ſuperficiem deſcribit (§. 465 *Geom.*). Eſt vero centrum gravitatis rectæ BC in medio F (§. 142) & centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via ideo hujus eſt peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF deſcripta. Quare ſuperficies cylindri eſt factum ex altitudine BC in peripheriam circuli radio EF deſcriptam ſive baſin, ut in *Geometria* demonſtravimus (§. 526 *Geom.*): ſolditas vero cylindri eſt factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui eſt ipſius EF ſeu ſemidiametri cylindri ſubduplus, deſcriptam.

SCHOLION 4.

201. *Sit altitudo plani deſcribentis, ideoque cylindri*, BC $= a$, *ſemidiameter baſis* DC $= r$; *erit* EG $= \frac{1}{2}r$ *& poſita ratione ſemidiametri ad peripheriam* $= 1 : m$, *peripheria radio* $\frac{1}{2}r$ *deſcripta* $= \frac{1}{2}mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}mr$ *in aream rectanguli* AC $= ar$; *erit ſoliditas cylindri* $= \frac{1}{2}mar^2$. *Eſt vero* $\frac{1}{2}mar^2 = \frac{1}{2}r \cdot mr \cdot a$ & $\frac{1}{2}r \cdot mr$ *area circuli radio* DC *deſcripti. Conſtat ergo cylindrum reperiri æqualem facto ex baſi in altitudinem, ut in* Geometria (§. 541) *demonſtratum*.

COROLLARIUM 5.

202. Similiter cum centrum gravitatis rectæ AB ſit in medio M (§. 142) & ſuperficies coni deſcribatur, ſi triangulum ABC circa axem AC rotetur (§. 467 *Geom.*), ſitque præterea PM $= \frac{1}{2}$BC (§. 268 *Geom.*), ſuperficies coni æqualis eſt facto ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, ſeu ſemidiametri baſeos BC ſubduplo deſcriptam.



SCHOLION 5.

203. *Sit* BC $= r$, AB $= a$, *ratio radii ad peripheriam* $1 : m$; *erit* PM $= \frac{1}{2}r$ *& peripheria hoc radio deſcripta* $= \frac{1}{2}mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}mr$ *in latus coni* AB, *prodit ſuperficies* $\frac{1}{2}amr$. *Sed* $\frac{1}{2}amr$ *eſt etiam factum ex* $\frac{1}{2}a$ *&* mr. *Ergo ſuperficies coni producitur ex peripheria baſeos in latus dimidiam, ut in* Geometria (§. 519) *demonſtratam*.

COROLLARIUM 6.

204. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, conum deſcribit (§. 467 *Geom.*). Sed ſi, CB diviſa biſariam in D, ducatur recta AD, fiatque AO $= \frac{2}{3}$AD; erit in O centrum gravitatis (§. 158). Æquatur ergo coni ſoliditas facto ex triangulo CAB in peripheriam radio PO deſcriptam (§. 193). Eſt vero AD : AO $=$ DB : OP (§. 268 *Geom.*). Sed AO $= \frac{2}{3}$AD *per demonſtr.* & DB $= \frac{1}{2}$CB *per conſtruct.* Ergo OP $= \frac{2}{3}$DB $= \frac{1}{3}$CB.



SCHOLION 6.

205. *Sit* CB $= r$, AB $= a$, *ratio radii ad peripheriam* $= 1 : m$; *erit* OP $= \frac{1}{3}r$, *peripheria hoc radio deſcripta* $\frac{1}{3}mr$, $\triangle$ ACB $= \frac{1}{2}ar$, *ideoque ſoliditas coni* $\frac{1}{3}mr \cdot \frac{1}{2}ar = \frac{1}{6}amr^2$. *Eſt vero etiam* $\frac{1}{6}amr^2 = \frac{1}{2}r \cdot mr \cdot \frac{1}{3}a$, *ſeu factum ex baſi coni in tertiam altitudinis partem, ut in* Geometria *aliunde demonſtratum* (§. 548 Geom.).

SCHOLION 7.

206. *Elegans hoc theorema, quod inter præcipua ſeculi ſuperioris in Geometria inventa referri ſolet, jam olim* Pappus *commemoravit* (a); *ſed* Paulus Guldinus, *e Societate Jeſu, expreſſius plurimorum exemplorum inductione oſtendit* (b). *Uſi ſunt eodem Geometræ, præſertim ante inventum a* Leibnitio *calculum ſummatorium, cum* Guldino, *quemadmodum indicaverat* Pappus, *in dimetiendis ſolidis & ſuperficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: ſed idem uſum habere adhuc poteſt in quibuſdam caſibus, ubi calculi ſummatorii ope idem difficilius præſtaretur. Ego in tyronum gratiam exemplis tritis regulam illuſtrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, ſimulque aſtendi, eidem locum eſſe, ſi magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri poſſe a* Guldino *etiam annotatum reperio* (c); *unde nec cum* Pappo *ad ſolum rotationis motum theorema reſtrinxi. Illuſtris* Leibnitius (d) *invenit, ſuccedere quoque negotium, ſi axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante*.

CAPUT

(a) Sub finem præfat. ad lib. 7. Collect. Mathem.
(b) Lib. 2. & 3. de centro gravitatis.
(c) Lib. 2. cap. 8. prop. 3. f. 147.
(d) In Actis Erudit. A. 1695. p. 493.

CAPUT IV.

De Quiete & Lapsu Corporum Gravium.

DEFINITIO 25.

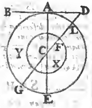
207. **L***inea horizontalis vera* eſt, cujus ſingula puncta a centro telluris æqualiter diſtant.

COROLLARIUM.

208. Linea horizontalis eſt arcus circuli ex centro telluris per punctum datum deſcriptus (§. 37. 42 *Geom.*).

DEFINITIO 26.

209. *Linea horizontalis apparens* BD eſt recta, quæ veram in dato puncto A tangit.



COROLLARIUM.

210. Eſt ideo ad ſemidiametrum telluris in puncto contactus A perpendicularis (§. 308 *Geom.*).

DEFINITIO 27.

211. *Lapſus* eſt mutatio ſitus vi gravitatis.

THEOREMA 26.

212. *Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem eſt perpendicularis, & contra.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directionis eorundem ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 *Mech.* & §. 38 *Analyſ. infinit.*), quam apparentem perpendicularis (§. 209). *Quod erat unum.*

II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis, ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 210). Continuata igitur in centrum telluris incidit (§. 470 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

213. Cum terra ſit propemodum ſphærica, ut in Geographia demonſtratur, ingentes marium tractus, imo omnium fluidorum tractuumque terreſtrium æquabilium ſuperficies in omnibus ſuis punctis a centro telluris æqualiter abſunt (§. 471 *Geom.*). Quare cum experientia conſtet, gravia per lineas perpendiculares ad ſuperficiem aquarum deſcendere; gravia niti verſus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLION.

214. *Quodſi terræ figura non ſit perfecte ſphærica, ex deſcenſu perpendiculari gravium concludi nequit, quod verſus centrum illius nitantur: cum in ſolo circulo, cujus rotatione ſphæra generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant* (§. 38 Analyſ. infinit.). *Sed ſuo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique aſſumi poſſe citra erroris aſſignabilis periculum, gravia niti verſus centrum terræ. Imo in ſtaticis ſufficit, deſcenſum perpendicularem ad libellam aquarum experientia conſtare.*

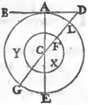
COROLLARIUM 2.

215. Quoniam pro corpore gravi, ſalva gravitate, ſolum gravitatis centrum ſubſtitui poteſt (§. 125); linea directionis corporis gravis eſt recta ex centro gravitatis ad lineam horizontalem ſive apparentem, ſive veram perpendicularis.

PRO-

P R O B L E M A 39.

216. *Data semidiametro Telluris* AC *vel* LC *una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis* AD, *determinare distantiam puncti extremi* D *a linea horizontali vera* AL.



R E S O L U T I O.

1. Quadrato semidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta CD (§. 417 *Geom.*).
3. Inde subtrahatur semidiameter CL: quod relinquitur, est distantia lineæ horizontalis apparentis a vera DL.

E. gr. Ponamus semidiametrum telluris, qualis vulgo statuitur, 860 milliarium Germanicorum & AD unius milliaris; erit

$$AC^2 = 739600$$
$$AD^2 = 1$$
$$DC^2 = 739601$$
$$\text{Unde } DC = 860.00057$$
$$CL = 860$$
$$LD = 0.00057 \text{ seu } \frac{57}{100000}$$

A L I T E R.

Quoniam GD : AD = AD : DL (§. 334 *Geom.*; erit DL = AD^2 : GD (§. 302 *Arith.*). Est vero DL ipsius GL seu diametri telluris particula admodum exigua, quippe in distantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, seu $\frac{57}{172000000}$ diametri telluris. Quamobrem AD^2 : GL sensibiliter non differt ab AD^2 : GD. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Parisinorum seu 129600 linearum (pes enim Parisinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta *Picardum* (a) 39231564 pedum Parisinorum seu linearum 5649345216. Quodsi ergo AD^2 = 16796160000 per GL = 5649345216 dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

S C H O L I O N.

217. *Hac posteriore methodo* Picardus (b) *tabulam construxit, quam huc transferre in usum futurum lubuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis* AD *in pedibus Parisinis; altera puncti extremi* D *altitudinem* DL *supra lineam horizontalem veram* AL.

AD	DL	AD	DL
300 ped.	0 dig. 0 $\frac{1}{3}$ lin.	3300 ped.	3 dig. 6 lin.
600	1 $\frac{1}{3}$	3600	4 0
900	3	3900	4. 8
1200	5 $\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	8 $\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. 9 $\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

C O R O L L A R I U M.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem sensibilem pro vera assumi, consequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi potest.

P R O B L E M A 40.

219. *Explorare, utrum planum aliquod propositum sit horizontale, nec ne.*

R E S O L U T I O.

1. Ex trabeculis ligneis construatur triangulum æquicrurum FCG, continuatis cruribus in A & B, quo longius, eo melius.



2. Ex

(a) Traitè du Nivellement p. 196.
(b) Loc. cit. cap. 1. p. 7.

2. Ex vertice C suspendatur globus plumbeus D & basis trianguli FG dividatur bifariam in E.
3. Libella sic constructa collocetur super plano dato, ita ut cruribus suis AC & CB eidem insistat.

Dico, si filum CD transeat per punctum medium E, planum esse horizontale.

Demonstratio.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate sua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 17). Quodsi ergo FG bifariam secet in E; erit ad FG perpendicularis (§. 184 *Geom.*). Quoniam vero $AC = CB$ *per construct.* ideoque $AC : CB = CF : CG$; erit $x = o$ (§. 207 *Geom.*), consequenter AB ipsi FG parallela (§. 255 *Geom.*) & CD etiam ad AB (§. 230 *Geom.*), hoc est, linea directionis globi ad planum, cui libella insistit, perpendicularis. Planum ideo horizontale est (§. 212).

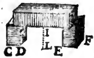
Scholion.

220. *Figura instrumenti variis modis mutari solet, eodem tamen semper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes staticas plerumque sufficit; ita inferius artem libellandi exposituri alia libellarum genera hac accuratiora describemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus amplissimos continuatur.*

Definitio 28.

221. Per *Basin corporis gravis* intelligo figuram, in cujus perimetro circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra quibus ipsæ incumbunt.

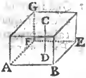
E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur basis ejus.



Theorema 27.

222. *Si linea directionis corporis gravis intra basin cadit; nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; corpus in situ suo acquiescit: sin illa extra basin cadit vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; in eam labitur partem, versus quam cadit centrum gravitatis.*

Demonstratio.



I. Incumbat corpus GB plano cuidam alteri firmo ac stabili AFEB, sitque linea directionis CD. Cum hæc ex centro gravitatis C educatur (§. 215); centrum gravitatis descendere nititur per rectam CD (§. 17). Sed juxta eandem ipsi renititur corpus, cui incumbit, idque satis firmum ac stabile, ut cedere nesciat *per hypoth.* Descensus ideo centri gravitatis impeditur (§. 75) ideoque corpus quiescit (§. 123). *Quod erat unum.*

II. Incumbant extrema alicujus corporis duobus fulcris (*Vid. Fig.* §. 221.) FE & DC, & linea directionis IL intra basin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur (§. 215); centrum gravitatis per rectam IL descendere nititur (§. 17). Sed corpus proprio pondere eousque incurvari nequit, ut a fulcris recedant ejus extrema, *per hypoth.* Ergo centrum gravitatis impeditur, quominus descendat, consequenter corpus in hoc situ acquiescit (§. 123). *Quod erat secundum.*

III. Ca-

III. Cadat linea directionis CM corporis IL extra basin. Cum centrum gravitatis sit C (§. 215); id secundum rectam CM descendere nititur (§. 17).



Quare cum nihil secundum eandem directionem ipsi resistat; actu descendet, ideoque corpus labitur in eam partem, versus quam cadit centrum gravitatis (§. 211). *Quod erat tertium.*

IV. Denique corpus grave duobus fulcris FE & DC ita incumbat, ut linea directionis IL intra basin FEDC cadat.



Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur, centrum gravitatis per rectam IL descendere nititur (§. 17). Quare cum corpus proprio pondere eousque incurvari possit, ut a fulcris recedat, *per hypoth.* centrum gravitatis actu descendit, ideoque corpus labitur in eam partem, versus quam linea directionis cadit (§. 211). *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur, ut linea directionis extra basin emoveatur, consequenter, quo longius ea distat a perimetro basis, eo firmius corpus in loco suo consistit.

PROBLEMA 41.

224. *Invenire, utrum corpus grave in dato situ extra lapsus periculum constituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis corporis gravis (§. 186).
2. Ex eo demittatur perpendicularis in lineam horizontalem apparentem, juxta probl. 40 (§. 219), si opus sit determinandam: quæ erit linea directionis (§. 215).

Quodsi perpendiculum intra basin corporis cadit, extra lapsus periculum constituitur; sin minus, certo ruet in eam partem, versus quam perpendiculum cadit (§. 222).

SCHOLION 1.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres inclinata* Bononiensis & Pisana *non corruant, etsi illa anno 1110 excitata ad altitudinem pedum 130 assurgat & perpendiculum a basi intervallo 9 pedum recedat, hac vero anno 1173 exstructa altitudinem habent cubitorum 78 & intervallum inter basin atque perpendiculum cubitorum* $7\frac{1}{3}$ *admittat: id quod expressius ostendit* Paulus Casatus (a).

SCHOLION 2.

226. *Idem problema motibus animalium explicandis inservit: qualia inprimis dedit* Joannes Alphonsus Borellus (b). E. gr. *Cum centrum gravitatis in homine inter nates & pubim existat; linea directionis intra spatium calcaneis interjectum ideoque intra basin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento insistit: quare in hoc situ firmiter consistit. Enimvero si pes alteruter elevetur, basis definietur spatio, quod pes unus occupat* (§. 221). *Cadit ideo linea directionis extra basin, nempe versus dexteram, si pes dexter elevetur, consequenter homo super solo pede sinistro stare non poterit* (§. 222), *nisi corpus in latere sinistro incurvet, quo lineam directionis in pedem sinistrum retrahatur. Enimvero talia fusius prosequi non est nostri instituti: apprime autem observanda sunt in picturis & sculpturis.*

SCHOLION 3.

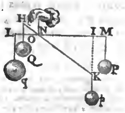
227. *Imo hinc ratio reddi potest multorum in structura corporis animalis occurrentium.* E. gr. *Cum homo erectus stare ac incedere debeat, necessarium utique fuit, ut planum per medium transiens corpus divideret ipsum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales sunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent, quæ sui similes non habent, ut frons, nasus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram, ut in partes æquales & similes, ideoque in æquiponderantes, dividi possint.*

DEFI-

(a) Mechanic. lib. 1. cap. 9. pag. 50 & seqq.
(b) De motu animalium cap. 18 usque ad 25. pag. 165. & seqq. conf. Casatum Mechan. lib. 1. cap. 12. pag. 62. & seqq.

DEFINITIO 29.

228. ***Centrum motus*** est punctum, circa quod grave, aut plura gravia commune centrum gravitatis habentia rotari possunt.



E. gr. Si pondera *p* & Q rotari possint circa punctum N, ita ut descendente *p* ipsum Q ascendat; dicetur N centrum motus.

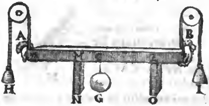
THEOREMA 28.

229. *Distantia* IN *centri gravitatis ponderis particularis a centro gravitatis communi aut centro motus* N, *est ad lineam directionis* I*p* *perpendicularis*.

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis I*p* corporis *p* transeat per centrum gravitatis ipsius (§. 215) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto centrum gravitatis corporis existat (§. 78); distantia centri gravitatis corporis *p* a centro motus vel centro gravitatis communi IN eadem est, quæ distantia ipsius N a linea directionis. Sed distantia ipsius N a linea directionis I*p* est perpendicularis NI (§. 225 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI est distantia centri gravitatis corporis *p* a puncto N. *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.



230. *Dato centro gravitatis* C *una cum pondere corporis* AB, *determinare vires in* A *&* B *requisitas, ut in situ horizontali sustentetur.*

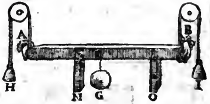
RESOLUTIO.

1. Quæratur ad summam distantiarum virium in A & B applicatarum a centrum gravitatis corporis sustentati C, pondus ejusdem G & distantiam vis in B applicatæ BC numerus quartus proportionalis: dico, hunc esse vim in A applicandam.
2. Quare si is subtrahatur a pondere G, relinquetur vis in B applicanda.

Sit e. gr. G = 300 librarum, AC = 5'; CB = 8'; erit AC + CB = AB = 13'; ideoque vis in A applicanda = G. CB : AB = 300. 8 : 13 = 184 $\frac{8}{13}$, consequenter vis in B = 115 $\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB sustentatur a viribus A & B *per hypoth.* necesse est ut eadem vi renitantur, quantum illud deorsum nititur (§. 75). Nititur autem corpus AB deorsum tota vi gravitatis, hoc est, quanta est ponderis G eidem æqualis & ex centro gravitatis C suspensi (§. 125). Ergo vires A & B junctim sumtæ ponderi huic æquantur, consequenter eorum centrum gravitatis commune in C (*vi* §. *cit.*). Sed cum linea AB sit horizonta-



lis *per hypoth.* ideoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (§. 215), vires autem in A & B secundum eandem directionem renitantur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares, & hinc a centro gravitatis communi C distant intervallis AC & CB (§. 229). Est ideo AC + CB : CB = G : A (§. 148). *Q. e. d.*

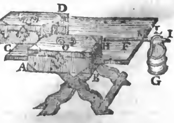
COROLLARIUM.

231. Corpus ideo AB gravitat in fulcra, a quibus sustentatur, in ratione reciproca distantiarum a centro gravitatis ipsius.

SCHOLION.

232. *Ne mirentur tyrones, nos ad vires resistentes quascunque & grave sursum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorsum nitentibus demonstrata sunt: eodem enim manente effectu, pondera* H *&* I *facili negotio, si ita visum fuerit, substitui possunt.*

PROBLEMA 43.



233. *Dato centro gravitatis* F *corporis* IH *una cum gravitate ipsius, determinare punctum* M, *quod si plano horizontali incumbat pondus datum* G *in* L *appensum, corpus* IH *ex situ horizontali dimovere nequit.*

RESOLUTIO.

Concipiatur in centro gravitatis F appensum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 125) & quæratur ejusdem atque ponderis dati G centrum gravitatis commune M (§. 149). Quodsi enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus HI e situ suo dimovere nequit (§. 124). *Q. e. i. & d.*

Sit e. gr. baculi centrum gravitatis F, situla aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, LF = 18″. Reperietur LM = LF. F : (G + F) = 18 . 2 : 26 = 18 : 13 = 1″ 4‴ fere. Mirum ergo non est (quod Statices ignari mirantur) situlam baculo IH supra mensam posito appensam non decidere.

PROBLEMA 44.

234. *Dato corporis* (*Vid. Fig.* 1) AB *centro gravitatis* C *una cum pondere ejus* G, *determinare puncta* L *&* M, *in quibus supponenda sunt fulcra* MN *&* LO, *ut in data ratione premantur.*

RESOLUTIO.

Sumantur in linea horizontali AB, quæ per centrum gravitatis C transit, rectæ MC & CL in data ratione. Quodsi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis supponas, ea premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodsi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus supponant operarii; pondus portare poterunt, si viribus eorum proportionatum. Unde patet, quomodo onus ferendum in data ratione distribui possit.

SCHOLION.

236. *Si pondus ferendum ex longurio extra centrum gravitatis ipsius suspendatur; quærendum est centrum gravitatis commune ponderis atque longurii, & supposito in eodem pondere utrique æquali, reliqua peraguntur ut in resolutione problematis. Exempla specialia, quibus problemata hæc illustrantur, dedit* Stevinus (a).

CAPUT

(a) Stat. lib. 2. prop. 7. 8, Operum fol. 474. & seqq.

CAPUT V.

De Motu Rectilineo Composito.

DEFINITIO 30.

237. M*otus simplex* est, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO 31.

238. *Motus compositus* est, qui efficitur a viribus pluribus conspirantibus. Dicuntur autem *vires conspirare* si directio unius non est opposita directioni alterius, veluti cum radius circuli circa centrum rotari & interea punctum per eum recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus est compositus (§. 74).

DEFINITIO 32.

240. *Angulus directionis* est, quem lineæ directionis duarum virium conspirantium comprehendunt.

THEOREMA 29.



241. *Si mobile* A *duplici vi urgeatur, altera quidem secundum directionem* AB, *altera vero secundum directionem* AC, *ita ut celeritates sint ut latera* AB *&* AC; *motu composito diagonalem parallelogrammi* AD *describit.*

DEMONSTRATIO.

Si mobile A sola vi secundum AB impressa moveretur, momento primo foret in aliquo puncto rectæ AB, veluti in H, & ad rectam HL ipsi AC parallelam accederet. Si sola vi secundum AC impressa progrederetur, eodem momento foret in aliquo puncto ipsius rectæ AC, veluti in I, & ad rectam IL ipsi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium sibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, ideoque eodem momento mobile accedet tum ad HL, tum ad IL, consequenter erit in puncto L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam vero celeritates sunt ut AB ad BD *per hypoth.* & spatia AH & HL eodem tempore descripta ut celeritates (§. 33), consequenter AH : HL = AB : BD; erit AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*), consequenter AL pars diagonalis AD (§. 337 *Geom.*). Eodem modo patet, ductis RM & MG ipsis AB & AC parallelis, quod mobile momento secundo futurum sit in M, tandemque in D. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

242. Quodsi ergo concipiamus rectam AC motu æquabili sibi semper parallelo juxta ductum alterius rectæ AB moveri, ac interea punctum motu æquabili in eadem descendere, punctum repræsentabit corpus, quod duplici vi juxta directiones AB & AC celeritatibus, quæ sunt ut AB & AC, movetur, ideoque motu composito describetur triangulum ABD.

SCHOLION.

243. *Solent igitur nonnulli in demonstrando theoremate præsente punctum in linea AC descendens, dum ipsa interea juxta ductum recta AB promoveatur,*



tur, pro corpore ſumere, quod duplici vi juxta hypotheſin theorematis movetur: id quod etiam ad juvandam imaginationem utiliter ſumi poteſt, cum ſic pateat poſſibilitas hypotheſeos intuitiva ratione.

COROLLARIUM 2.

244. Mobile motu compoſito eodem tempore deſcribit diagonalem AD, quo motu disjuncto deſcriberet latera parallelogrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM 3.

245. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC conſtrui poſſit, conſtructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam ſuper baſi communi (*vi* §. 337. 205 *Geom.*); omnis motus rectilineus, ubi ad demonſtrandum utile fuerit, in compoſitum reſolvi poteſt.

COROLLARIUM 4.

246. Quoniam vero laterum AC & AB ratio varia eſſe poteſt, pro diverſitate angulorum CAD & DAB; motu quoque variis modis compoſito eadem recta AD deſcribi (§. 245), ideoque & idem motus rectilineus in varios ſimplices reſolvi poteſt.

THEOREMA 30.

247. *In motu compoſito uniformi velocitas a viribus conſpirantibus producta eſt ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis (Vid. Fig. ut ſupra) AD parallelogrammi ABDC, juxta cujus latera agunt ſeparatæ, ad latus alterutrum AB vel AC.*

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC ſigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 241). Eſt ergo diagonalis AD ſpatium a viribus conſpirantibus dato tempore deſcriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore ſunt ut ſpatia (§. 33). Eſt ergo celeritas a viribus conſpirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

248. Datis itaque viribus conſpirantibus, hoc eſt, data celeritatum ratione per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per eaſdem rectas poſitione datas, aut per angulum directionis, datur motus obliqui celeritas & directio, quia diagonalis & magnitudine & poſitione datur (§. 339 & *ſeqq. Geom.*).

COROLLARIUM 2.

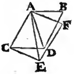
249. Non tamen vice verſa motu obliquo dato dantur ſimplices, quia idem ex diverſis ſimplicibus componi poteſt (§. 246).

COROLLARIUM 3.

250. Motus ideo ſimplex per diagonalem AD celeritate ut AD æquipollet motibus per latera AB & AC celeritatibus ut AB & AC conjunctis, hoc eſt, perinde eſt, ſive mobile juxta directionem AD celeritate ut AD, ſive ſimul juxta directiones AB & AC celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241. 246).

THEOREMA 31.

251. *In motu compoſito ab iiſdem viribus producto major eſt velocitas, ſi angulus directionis minor: illa autem minor, ſi hic major.*



DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eædem ſunt *per hypoth.* erit AC utique parallelogrammo AFEC & ABDC communis, & præterea AB = AF. Evidens eſt in hypotheſi anguli majoris deſcribi diagonalem AD, in hypotheſi minoris vero ipſam AE & quidem eodem tempore ob AB = AF (§. 244). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 33).

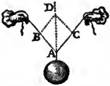
Quare

Quare cum AD $<$ AE; velocitas in hypothesi anguli majoris minor est, quam in hypothesi minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Cum datis eruribus AC & CE eum angulo intercepto A‿E, angulus CEA (§. 40 *Trigon.*) & inde porro AE (§. 36 *Trigon.*) reperistur; data virium conspirantium celeritate & angulo directionis in easu quocunque speciali celeritas motus compositi inveniri, consequenter ratio celeritatum ab iisdem viribus sub diversis directionum augulis productarum definiri potest.

THEOREMA 32.



253. *Si mobile a duabus viribus secundum directiones* AB *&* AC *trahitur, quæ æquipollent tertiæ trahenti secundum directionem* AD; *erunt sollicitationes ad motum inter se reciproce ut sinus angulorum, quos lineæ directionis* BA *&* AC *cum lineæ directionis tertiæ* AD *comprehendunt, & alterutra earum erit ad sollicitationem a media pendentem ut sinus anguli, quem linea directionis alterius cum linea directionis tertiæ comprehendit ad sinum anguli* BAC.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipsi AC & DC ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*); erit angulus BDA = DAC & ADC = BAD (§. 233 *Geom.*) ac BACD parallelogrammum (§. 102 *Geom.*). Quoniam vires secundum directiones AB & AC trahentes in sollicitando mobili ad motum, seu quatenus mobile ad motum urgent (§. 110), æquipollent vi mobile secundum directionem AD trahenti *per hypoth.* sollicitationes laterales sunt ut AB & BD = AC (§. 335 *Geom.*), media vero sollicitatio ut AD (§. 250). Erunt igitur (§. 33 *Trigon.*) laterales ut sinus angulorum BDA & BAD, & lateralis secundum directionem AB trahens ad mediam secundum directionem AD trahentem ut sinus anguli BDA seu DAC ad sinum anguli ABD seu BAC (§. 233 *Geom.* & §. 5 *Trigon.*), lateralis vero agentis secundum directionem AC sive BD ut sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

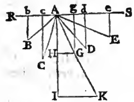
254. *Sollicitationes sunt in ratione composita massarum & celeritatum initialium* (§. 110. 22), *consequenter celeritatum in motu æquabili, ubi e est ut de. Rectæ, per quas exponuntur motus in resolutione compositi in simplices, sunt ut celeritates* (§. 250). *Quare si per eas exponuntur sollicitationes, massæ corporum, in quibus concipiuntur vires, supponendæ sunt æquales* (§. 181 Arith.), *id quod semper facere licet, cum corpori cuicunque data celeritate lato, vel data celeritate initiali instructo, dari possit aliud eidem in sollicitatione ad motum æquivalens, quod habet massam datam* (§. 146), *quia celeritates initiales sunt ut distantiæ a centro motus. Atque hæc ratio est, cur in præsente tractatione præcisa massa corporum ea consideramus instar punctorum, in quibus non spectatur nisi celeritas initialis.*

DEFINITIO 33.

255. Per *Tendentiam* intelligimus rectam velocitatis & directionis repræsentatricem. Et *Tendentia media* vocatur, quæ in motu composito pluribus datis simul substitui potest.

PRO-

PROBLEMA 42.



256. *Si mobile* A *urgetur secundum directiones* BA, CA, DA, EA *celeritatibus ut* AB, AC, AD, AE, *determinare directionem & celeritatem mobilis in motu composito, qui ex simplicibus istis resultat, seu, datis quotcunque tendentiis* AB, AC, AD, AE, *invenire medium* AK.

RESOLUTIO.

1. Per centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiæ mediæ, ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A.
2. In hanc ex A transferatur AG toties, quot sunt tendentiæ datæ.

Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex singulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, G*g*; tendentiæ BA æquivalebunt laterales B*b* & *b*A, secundæ CA laterales C*c* & *c*A, tertiæ DA laterales D*d* & *d*A, quartæ EA laterales E*e* & *e*A (§. 250. 255). Jam cum directiones B*b*, C*c*, D*d* & E*e* sibi mutuo non sint contrariæ, tendentiæ cognomines in determinanda media sunt attendendæ; ex adverso cum directiones *b*A & *c*A sint contrariæ directionibus A*d* & A*e*, sintque velocitates versus partem S majores velocitatibus versus partem R *per hypoth.* excessus tendentiarum versus S supra tendentias versus R attendendus erit in media determinanda. Jam si parallelogrammum A*g*GH compleatur; tendentiæ perpendiculares B*b*, C*c*, D*d* & E*e* æquivalebunt mediæ 4AH & excessus contrariarum fortiorum supra debiliores A*e* + A*d* — A*b* — A*c* æquivalet tendentiæ mediæ parallelæ 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero si AH continuetur in I, donec fiat AI = 4AH & ducatur IK parallela ipsi HG, erit etiam IK = 4 HG & AK = 4AG (§. 263 *Geom.*). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleant diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque BA, CA, DA & EA tendentiæ AK æquipollent, ideoque ipsa AK media est (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

257. *Ex demonstratione ideo problematis præsentis patet, si mobile ad motum urgeatur viribus* B, C, D & E *eo modo, ut, si* B *sola ageret, mobile* A *progrederetur secundum directionem* AB *celeritate ut* AB; *si sola* C *ipsum impelleret, secundum directionem* AC *celeritate ut* AC; *si sola vis* D *mobile urgeret, secundum directionem* AD *celeritate ut* AD; *si denique sola vis* E *mobile* A *ad motum concitaret, secundum directionem* AE *celeritate ut* AE; *idem mobile* A *viribus* B, C, D, E *una agentibus moveri secundum directionem* AK *celeritate ut* AK. *Patet vero eodem prorsus modo tendentiam mediam determinari, si plures quotcunque dentur. Opus autem est in demonstratione resolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonstrari possit,* AK *esse directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas sit ut* 4AK *absque ea patet* (§. 156).

CAPUT

CAPUT VI.

De Descensu Gravium in Plano Inclinato.

DEFINITIO 34.

258. PLanum *inclinatum* est, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO 35.

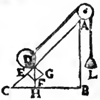
259. *Gravitatem absolutam* voco, qua corpus descendit libere in medio non resistente, seu in descensu libero ad motum sollicitatur.

DEFINITIO 36.

260. *Gravitatem respectivam* appello, qua corpus descendit, parte aliqua ad superandam resistentiam impensa, seu qua in descensu per resistentiam impedito ad motum sollicitatur. Talis est, qua descendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad resistentiam plani vincendam impenditur, seu qua ad motum sollicitatur super plano inclinato.

THEOREMA 33.

261. *Si grave in plano inclinato consistit, gravitas absoluta est ad gravitatem respectivam ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB.



DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D secundum directionem AC descendere nitatur in plano inclinato, libere autem descenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212); si erigatur in D perpendicularis ad AC & ducatur GF ipsi AC parallela occurrens ipsi DH in F, exponet DF gravitatem absolutam, DG vero partem, qua resistentiam plani vincit, & FG gravitatem respectivam (§. 250). Quodsi parallelogrammum DGFE compleatur; erit EF = DG & FG = ED (§. 335 *Geom.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ut DF ad FG sive DE. Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares existant *per hypoth.* inter se parallelæ sunt (§. 256 *Geom.*), ideoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti sunt *per hypoth.* erit DF : DE = CA : AB (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas absoluta ad respectivam ut CA ad AB (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

262. Cum ideo globus D super plano inclinato gravitate tantum respectiva gravitet, pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, si fuerit ad ipsum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC.

COROLLARIUM 2.

263. Quodsi longitudo plani CA sumatur pro sinu toto, erit AB sinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ponderis super plano inclinato, ideoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipsum sustentans, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROL-

COROLLARIUM 3.

264. Hinc gravitates respectivæ ejusdem corporis super diversis planis inclinatis sunt inter se ut sinus anguli inclinationis. Est enim ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas absoluta ad respectivam super eodem (§. 263) & ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas absoluta ad respectivam super hoc plano (§. *cit.*). Quare ut sinus anguli inclinationis planorum, ita sunt gravitates respectivæ ejusdem corporis super iisdem (§. 196 *Arith.*).

COROLLARIUM 4.

265. Major ergo gravitas respectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa est, quo minor hic existit: cum crescentibus angulis crescant, decrescentibus decrescant sinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2 *Trigon.*).

COROLLARIUM 5.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas respectiva degenerat in absolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas respectiva prorsus exspirat, hoc est, grave secundum longitudinem plani nullum nisum exercet.

COROLLARIUM 6.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipsi æqualis est: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA 43.

268. *Invenire sinum anguli inclinationis plani, super quo data vi pondus datum sustentari possit.*

RESOLUTIO.

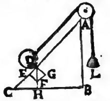
Fiat ut pondus datum D ad vim datam L, ita sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani (§. 263).

E. gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum; reperietur angulus inclinationis 2° 52′

Log. 1000 = 3.0000000
Log. 50 = 1.6080700
Log. Sin. tot. 10.0000000

Log. Sin. inclin. = 8.6980700, cui in tabulis quam proxime respondent 2° 52′.

THEOREMA 34.



269. *Si pondus* L *juxta directionem perpendicularem* AB *descendit & pondus* D *juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo ascensus ponderis* D *est ad altitudinem descensus alterius* L *ut sinus anguli inclinationis* C *ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ascendat enim pondus D ex C usque in D; erit altitudo, ad quam ascendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari descendat *per hypoth.* erit altitudo, per quam ipsum descendit, ipsi CD æqualis. Altatitudo igitur ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut DH ad CD. Enimvero si CD sumatur pro sinu toto, DH est sinus anguli inclinationis C (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut sinus anguli inclinationis & sinus totus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

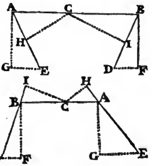
270. Est igitur altitudo descensus CD ponderis L ad altitudinem ascensus DH ponderis D ut reciproce pondus D ad pondus L ipsi æquiponderans (§. 263).

COROLLARIUM 2.

271. Quare cum sit CD . L = DH . D (§. 297 *Arith.*) & nisus atque renisus æquiponderantium D & L æquales sint (§. 75); momenta ponderum D & L sunt in ratione composita massarum & altitudinum, per quas in plano sive inclinato, sive perpendiculari vel ascendunt, vel descendunt (§. 159 *Arith.*).

THEO-

THEOREMA 35.



272. *Si pondera* E *&* D *trahentia rectam* AB *habeant centrum gravitatis commune in* C; *erunt ea inter se in ratione reciproca distantiarum* CH *&* CI, *nempe* $E:D = CI:CH$.

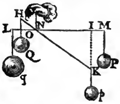
DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendiculares & ex centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipsi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac si planis inclinatis BD & AE incumberent; perinde erit ac si in B suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod est ad D ut BF ad BD, & in A suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod est ad E ut AG ad AE (§. 261). Sit pondus prius P, alterum Q; erit $P:D = BF:BD$ & $Q:E = AG:AE$. Enimvero propter parallelismum linearum GE & DF atque AB angulus $GEA = HAC$ & $FDB = ABD$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I sint recti *per construct.* erit $BF:BD = CI:CB$ & $AG:AE = CH:CA$ (§. 267 *Geom.*), consequenter $P:D = CI:CB$ & $Q:E = CH:CA$ (§. 167 *Arith.*). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem sint in æquilibrio *per demonstr.* erit $P:Q = AC:CB$ (§. 144), consequenter $P:E = CH:CB$ (§. 198 *Arithm.*) & hinc tandem $D:E = CH:CI$ (§. 200 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

273. Quoniam pondera D & E sibi invicem æquilibrantur, si sub obliqua quacunque directione rationem reciprocam distantiarum habuerint, hoc est, si $D:E = CH:CI$ (§. 272), est vero $E.CH = D.CI$ (§. 297 *Arith.*); vires æquiponderantium etiam sub directionibus obliquis æstimandæ sunt per factum ex massa in distantiam a centro gravitatis.

COROLLARIUM 2.



274. Si pondera sive ex centro gravitatis communi, sive ex alio quocunque extra illud posito suspendantur; momenta sunt in ratione composita massarum & distantiarum a puncto suspensionis N, nempe in eo situ, quo centrum gravitatis ipsius P descendit per altitudinem IK & centrum gravitatis alterius ponderis Q ascendit per altitudinem OH, ut Q. ON & P. IN (§. 146. 271. 133). Sed cum verticales ad N sint æquales (§. 156 *Geom.*) & lineæ directionum KI & HO sint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); $ON:NI = HO:IK$ (§. 267 *Geom.*). Quare momenta ponderum Q & P sunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc est in ratione composita massarum & altitudinum, per quas perpendiculariter centrum gravitatis vel ascendit, vel descendit. Superior igitur (§. 146. 271) constituta virium æstimatio cum præsente consentit.

COROLLARIUM 3.

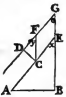
275. Vires ideo æquales sunt, quæ pondera elevant per altitudines ipsis reciproce proportionales.

SCHOLION 1.

276. *Hoc principium ad demonstrandas machinarum vires sine demonstratione assumit* Cartesius (a). *Ait enim*, quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli potest, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

SCHOLION 2.

277. *Hinc etiam ratio patet, cur currus onustus difficilius trahatur super plano inclinato, quam super horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ est ad pondus totum ipsius in ratione altitudinis ad longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilius trahatur in via lutosa & arenosa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si enim recta* FD *sit longitudini plani* AC *parallela, hoc est, linea directionis currus, atque* FC *altitudini* EB *parallela ope perpendiculi definiatur, & ex* C *ducatur* DC *perpendicularis ipsi* FD, *erit* y = o & o = x (§. 233 Geom.); *hincque* y = x (§. 87 Arith.). *Quare ob rectos* D & B, FC : FD = EA : EB (§. 267 Geom.).



THEOREMA 36.

278. *Vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & velocitatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, sed non actu moveant pondera, sunt vires mortuæ (§. 9), ideoque in quacunque directione in ratione composita massarum & distantiarum a centro motus (§. 146. 272). Enimvero si ponamus centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æquabiliter, eodem tempore describent arcus distantiis proportionales (§. 138. 412 *Geom.*): qui cum sint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 185 *Arith.*). *Q. e. d.*

(a) In Tract. de Mechanica (qui inter posthuma habetur) pag. 13.

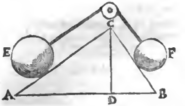
SCHOLION.

279. *In conatu jam adest celeritas initialis* dc, *elementum ejus, qua moveretur mobile, si motus actu sequeretur. Quare cum celeritas sit ut elementum ejus* dc; *mirum non est, quod vires hic sint in ratione celeritatum prodituratum & massarum composita. Sunt nempe in ratione composita massarum & celeritatum initialium, quibus instruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, consequenter distantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.*

COROLLARIUM.

280. Quodsi ergo massæ æquales sunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA 37.



281. *Pondera* E & F *super planis inclinatis* AC & CB *ejusdem altitudinis* CD *æquiponderantia, sunt ut longitudines planorum* AC & CB.

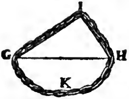
DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant *per hypoth.* eadem vis, quæ pondus E super plano inclinato AC sustentare valet, etiam alterum F super plano inclinato CB sustentabit, & hæc dicatur V. Est vero V : E = DC : AC & V : F = DC : CB (§. 262). Ergo E : F = AC : CB (§. 196 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

282. Simon Stevinus (b) *ingeniosam affert hujus theorematis demonstrationem, quam ob miram* facr-

(b) Element. Static. lib. 1. prop. 19. f. 448. Operum.



facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo GIH, *illud per se patet, partes* GK *&* HK *æquilibrari: æquipollet enim* GKH *catena in punctis* G *&* H *suspensa. Quodsi jam* IH *non æquiponderet ipsi* GI; *pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa* GIH *orietur, qui cum sit absurdus, patet partes catenæ* IH *&* GI, *ideoque pondera quævis alia, quæ itidem sunt ut longitudines planorum* IH *&* GI *æquiponderare. Supponit ideo motum perpetuum esse absurdum, seu id axiomatis instar sumit.*

COROLLARIUM.

283. Quodsi communis planorum altitudo (*Vid. Fig. §. 281*) CD sumatur pro sinu toto; CB & CA sunt cosecantes angulorum inclinationis B & A (*§. 11 Trigon.*). Pondera igitur F & E super planis inclinatis CB & CA æquiponderantia sunt ut cosecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut sinus angulorum inclinationis A & B (*§. 33 Trigon.*).

THEOREMA 38.

284. *Grave super plano inclinato descendit motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO.

Gravitas respectiva est ad absolutam in constante ratione (§. 261), cumque ideo hæc non mutetur (§. 78), illa quoque omni descensus tempore eadem. Quare cum eodem semper modo vis gravitatis grave ad motum sollicitet (§. 25); singulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato descendit (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

285. Sunt igitur spatia descensus in ratione duplicata temporum (§. 80), itemque velocitatum (§. 81).

COROLLARIUM 2.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus crescunt secundum numeros impares (§. 84).

COROLLARIUM 3.

287. Tempora vero sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem ratione existunt (§. 83).

COROLLARIUM 4.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato descendente decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM 5.

289. Descensus ideo gravium super planis inclinatis iisdem legibus adstringitur, quibus descensus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLION.

290. *Hinc* Galilæus *leges illas exploraturus experimenta sumsit in planis inclinatis* (§. 89): *tardior enim, ut in theoremate sequente demonstratur, est descensus in plano inclinato, & hinc spatia facilius notari possunt.*

THEOREMA 39.

291. *Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati est ad celeritatem, quam perpendiculariter descendens eodem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.*

DEMONSTRATIO.

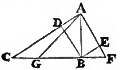
Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatum descendit, producuntur a gravitate respectiva, dum vero perpendiculariter descendit, ab absoluta. Si celeritates sint ut C & c, tempusculum dt, massa mobilis m, gravitas absoluta & respectiva ut G & g; erit $G : g = \frac{mdC}{dt} : \frac{mdc}{dt}$ (§. 112), $= dC : dc$ (§. 178 *Arith.*) $= C : c$ (§. 187 *Arith.*). Sed G ad g ut longitudo plani ad altitudinem ipsius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis t celeritates C & c sunt

ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato descendentis est in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 40.



293. *Spatium a gravi in plano inclinato confectum* AD *est ad spatium* AB, *quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in descensu perpendiculari in fine temporis dati.*

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in D constitutum habet, duplum ipsius AD spatium confecisset (§. 288). Similiter si ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in B habet, duplum ipsius AB confecisset (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur spatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percursa *per hypoth.* ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB sunt ut eædem celeritates (§. 181. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

294. Est igitur spatium in plano inclinato percursum ad spatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari descenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC (§. 291), itemque ut sinus anguli inclinationis C ad sinum totum (§. 292).

COROLLARIUM 2.

295. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter descendit in B, super plano inclinato perveniet in D (§. 294).

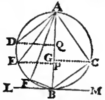
COROLLARIUM 3.

296. Dato igitur spatio descensus perpendicularis in altitudine plani AB, habetur spatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, si ex B ad CA perpendicularis demittatur.

COROLLARIUM 4.

297. Similiter dato spatio in plano inclinato percurso AD, invenitur spatium AB, per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidisset, si ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM 5.



298. Cum in semicirculo anguli D, E, F, C recti sint (§. 317 *Geom.*); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore descendit, quo nempe per diametrum AB, si ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 297).

PROBOEMA 44.

299. *Dato spatio* (*Vid. Fig.* §. 293) AD *in plano inclinato* AC *percurso, determinare spatium, quod in alio plano inclinato* AF *eodem tempore percurreret.*

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B; erit AB spatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§. 297).

2. Qua-

2. Quare si ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE spatium, quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A in B (§. 295), consequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

300. Cum sit AB ad AD ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis C, & AB ad AE ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis F (§. 294); spatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diversis planis inclinatis percurrere valet, sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F (§. 196 *Arith.*) & reciproce ut pondera super eisdem planis æquiponderantia (§. 283), consequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AF & AC æquealtorum (§. 281). Et hinc problema per calculum variis modis resolvitur.

THEOREMA 41.

301. *Velocitates quæ in diversis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, sunt ut spatia eodem tempore percursa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto (*Vid. Fig. §. 293*) B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE; erunt AD, AB & AE spatia eodem tempore percursa (§. 299). Cum igitur sit, ut AB ad AC ita velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam, & ut AB ad AF ita velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam (§. 291), consequenter, ob AB : AC = AD : AB & AB : AE = AF : AB (§. 330 *Geom.* & §. 169 *Arith.*), velocitas per AD aquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AD ad AB, & velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AE ad AB (§. 167 *Arith.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquisitæ sunt ut spatia AD & AE isto tempore percursa (§. 196 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Velocitates in diversis planis inclinatis eodem tempore acquisitæ sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera super istis planis æquiponderantia, nec non reciproce ut eorundem planorum æquealtorum longitudines AF & AC (§. 300).

THEOREMA 42.

303. *Si grave per planum inclinatum (Vid. Fig. §. 293) AC ad lineam horizontalem CB pervenit, eandem celeritatem acquisivit, quam in descensu perpendiculari AB usque ad eandem lineam horizontalem CB acquireret.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD spatium eodem tempore percursum, quo percurritur AB (§. 296), ideoque celeritas per AB acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC : AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquisita est ad celeritatem per AD acquisitam in ratione subduplicata ipsius AC ad AD (§. 287) $= \sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arith.*). Quare cum sit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*), ideoque AC ad AD in ratione duplicata AC : AB (§. 216 *Arith.*) $= AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arith.*), consequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} = AC : AB$; erit celeritas per AC acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 167 *Arith.*). Celeritas igitur per AC acquisita est celeritati per AB acquisitæ æqualis (§. 177 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

304. Grave igitur per diversa plana inclinata AC, AG, AF cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

CPROL-

COROLLARIUM 2.

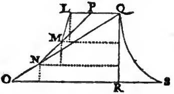


305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 303). Quare si per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac si statim ab initio in plano inclinato HK motum fuisset.

COROLLARIUM 3.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior sit quam per perpendiculum IM (§. 291); grave per LI & IK descendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam si constanter per LM perperdiculariter descendisset (§. 90 *Arith.*).

COROLLARIUM 4.

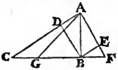


307. Quodsi grave descendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodsi ergo ubi ad M pervenit, motum suum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, nisi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. *cit.*). Quamobrem si ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum est, quam acquireret per OQ, seu QR (§. *cit.* & §. 303). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, NO motum continuans, eam acquiret celeritatem, ac si perpendiculariter per QR descendisset.

COROLLARIUM 5.

308. Cum itaque curvæ ex rectis infinite parvis componantur; grave per curvam QS descendens eandem adipiscitur celeritatem, quam ex casu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA 43.



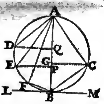
309. *Tempus descensus per planum inclinatum* AC *est ad tempus descensus perpendicularis per* AB *ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB: *tempora vero descensuum per diversa plana inclinata æqualta* AC & AG *sunt ut longitudines planorum.*

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquisita, & tempus per AB æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquisita (§. 288). Sed celeritates istæ dimidiæ æquales sunt (§. 303). Tempora igitur sunt ut AC & AB (§. 32). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, tempora descensuum per AC & AG esse ut AC & AG. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 44.



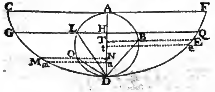
310. *Si diameter circuli* AB *fuerit ad lineam horizontalem* LM *perpendicularis, grave ex quovis peripheriæ puncto*

sto D, E *vel* C *eodem tempore descendit in* B, *quo nempe diametrum* AB *percurrit*.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC; erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut GB ad BC (§. 309). Tempus vero, quo GB percurritur, est ad tempus, quo AB percurritur, in ratione subduplicata GB ad AB (§. 87), hoc est, cum sit GB : BC = BC : AB (§. 330 *Geom.*), in ratione GB ad BC (§. 216 *Arith.*). Tempus ideo descensus per GB ad tempus descensus per BC & ad tempus descensus per diametrum AB eandem rationem habet (§. 167 *Arith.*). Ergo tempus, quo percurritur BC, æquale est tempori, quo AB percurritur (§. 177 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 45.



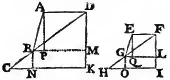
311. *Descensus per semicycloidem* DEF *& per quemcunque ejus arcum* DG *sunt æquidiuturni*.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infinitesimas resolutus, quarum una sit M*m*, & semicyclois DEF in numero totidem divisa, quarum una E*e*; erit DG : DF = M*m* : E*e* (§. 171 *Arith.*). Concipiamus porro semicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut sit DF : DG = DE : DM = E*e* : M*m* (§. 167 *Arith.*). Ducantur denique semiordinatæ TE, *te*, NM, *nm*, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam DF = 2AD, DE = 2DB, DM = 2DO & DG = 2DL (§. 168 *Analys. infinit.*), & DF : DE = DG : DM *per hypoth.* erit DA : DB = DL : DO (§. 181 *Arith.*) & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 260 *Arith.*). Quoniam vero DA : DB = DB : DT (§. 330 *Geom.*); erit $DA^2 : DB^2 = DA : DT$ (§. 216. 259 *Arith.*). Similiter quia DA : DL = DL : DH & DA : DO = DO : DN (§. 330 *Geom.*); erit $DA^2 : DL^2 = DA : DH$ & $DA^2 : DO^2 = DA : DN$ (§. 216. 259 *Arith.*), consequenter $DL^2 : DO^2 = DH : DN$ (§. 196 *Arith.*). Quamobrem ulterius DA : DT = DH : DN (§. 167 *Arith.*) & AT : DT = HN : DN (§. 193 *Arith.*), adeoque AT : HN = DT : DN (§. 173 *Arith.*) & $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} = \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ (§. 260 *Arith.*). Sed ut $\sqrt{AT}$ ad $\sqrt{HN}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 308. 87), ita etiam DB ad DO (§. 310. 301), imo DE ad DM (§. 168 *Analys. infinit.* & §. 181 *Arith.*). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut E*e* ad M*m* *per demonstr.* consequenter cum tempus per E*e* sit ut spatium E*e* per velocitatem in E divisum, & tempus per M*m* ut spatium M*m* per velocitatem in M divisum (§. 39); tempus per E*e* æquale est tempori per M*m* (§. 185. 149 *Arith.*), & hinc tempus per omnia E*e*, hoc est per DF, æquale est tempori per omnia M*m*, hoc est per DG (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 46.



312. *Si plana* DC *&* FH *cum horizontalibus* CK *&* HI *æquales efficiunt angulos, similiter inclinata sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum efficiunt obliquum (§. 258); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus suis efficiunt, distingui potest eorum inclinatio (§. 476 *Geom.*). Jam anguli æquales sunt similes (§. 174 *Geom.*), ideoque per eos planorum inclinatio distingui nequit (§. 24 *Arith.*). Ergo plana, quæ cum suis horizontalibus angulos efficiunt æquales, similiter inclinata sunt (§. *cit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

313. Cum in planis similiter inclinatis DC & FH anguli C & H sint æquales (§. 312) & demissis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 78 *Geom.*); erit CD : FH = DK : FI (§. 267 *Geom.*), hoc est, altitudines longitudinibus proportionales sunt.

THEOREMA 47.

314. *Si duo gravia per duo aut plura plana* AB, BC *&* EG, GH *similiter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe sit* AB : BC = EG : GH, *tempora descensus erunt in subduplicata ratione longitudinum* AB + BC *&* EG + GH.

DEMONSTRATIO.

Sit AB : BC = $a : b$; erit, ob AB : BC = EG : GH *per hypoth.* EG = ma & GH = mb. Cum plana AB & EG sint similiter inclinata *per hypoth.* non aliter quam partes ejusdem plani percurruntur, ideoque tempus per AB est ad tempus per EG ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{ma}$ (§. 287). Eodem modo ostenditur, esse tempus per BC ad tempus per GH ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{mb}$, & ita porro, si plura fuerint plana. Quare tempus per AB + BC est ad tempus per EG + GH ut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma} + \sqrt{mb}$ (§. 192 *Arith.*). hoc est, ut $1 : \sqrt{m}$ (§. 181 *Arith.*), seu ut $\sqrt{(a+b)}$ ad $\sqrt{(ma+mb)}$ (§. 178 *Arith.*): quæ est ratio subduplicata planorum AB + BC & EG + GH. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

315. Quoniam AB : EG = AP : EQ & CB : GH = BN : GO (§. 313), sunt proportiones inter se similes ob AB : EG = CB : GH *per hypoth.* erit AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO (§. 192 *Arith.*) = (ob AP + BN = DM + MK = DK, & EQ + GO = FL + LI = FI (§. 226. *Geom.*)) DK : FI (§. 168 *Arith.*). Tempus igitur per plana similiter inclinata & proportionalia AB, BC & EG, GH cum sit in ratione subduplicata AB + BC & EG + GH (§. 314); in ratione quoque subduplicata altitudinum DK & FI existit.

COROLLARIUM. 2.



316. Et quia superficies curvæ AB & DE similes ac similiter positæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & similiter inclinatis constant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione subduplicata AB ad DE.

CAPUT

CAPUT VII.

De Ascensu gravium, cum Perpendiculari, tum in Plano inclinato.

THEOREMA 48.

317. *SI grave in medio non resistente vi impressa sive perpendiculariter, sive per planum inclinatum ascendit, motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impressa perpendiculariter ascendit, a vi gravitatis absolutæ secundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum ascendit, a vi gravitatis respectivæ secundum directionem plani (§. 261) continuo deorsum impellitur. Motus ideo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam absolutæ, quam respectivæ in omnibus locis, per quæ grave descendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), consequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

318. Grave igitur sive perpendiculariter, sive per declive in medio non resistente ascendens, spatium percurrit subduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi describeret eum ea celeritate, quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM 2.

319. Ejusdem igitur spatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decrescunt ut numeri impares 7. 5. 3. 1. 0 (§. 98), ideoque ascensus tandem sistitur, consequenter ubi vis impressa fuerit absumta, corpus vi gravitatis rursus descendit.

COROLLARIUM 3.

320. Sunt ideo inverse ut spatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes divisum; momento primo grave A descendet per spatium 1, B ascendet per 7; secundo A descendet per 3, B ascendet per 5; tertio A descendet per 5, B ascendet per 3; ultimo A descendet per 7, B ascendet per 1 (§. 86. 319).

COROLLARIUM 4.

321. Unde grave vi impressa ascendens ad eam altitudinem ascendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua sursum propellitur.

COROLLARIUM 5.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim ascendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non resistente.

PROBLEMA 45.

323. *Dato tempore, quo grave impetu impresso ad altitudinem datam ascendit, determinare spatia singulis momentis confecta.*

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem descendisse & quærantur spatia singulis momentis percursa (§. 94): hæc enim inverso ordine sumta eadem sunt cum spatiis ascensus quæsitis (§. 320).

E. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 secunda ascendit per intervallum 240 pedum. Quæruntur spatia singulis temporibus confecta? Quodsi corpus descendisset, primo minuto descendisset per 15 pedes, secundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque ascendit per 105, secundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15 pedes.

PROBLEMA 46.

324. *Dato tempore, quo grave vi impressa ad datam altitudinem ascendit, determinare tempus, quo ad altitudinem aliam datam pervenit.*

RESOLUTIO.

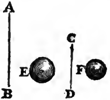
Quæratur tempus, quo grave per altitudinem desideratam decidere potest (§. 95): eodem enim ad eandem ascendet (§. 320. 322).

Vide supra exemplum probl. 2. (§. 95).

THEOREMA 49.

325. *Vires corporum vivæ sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.



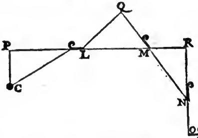
Corpus E cadendo per AB acquirit vim ascendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiscitur, qua per altitudinem CD elevari potest (§. 322). Sunt ideo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur in ratione composita altitudinum AB & CD atque massarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ consumuntur. Sed AB & CD sunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per istas altitudines acquisitarum (§. 86). Ergo vires E & F sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote non solo nisu, sed impetu concepto agentes, ideoque tum motu actuali conjunctæ (§. 9). Constat igitur vires vivas esse in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

326. Quare si massæ fuerint æquales; vires sunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 *Arith.*).

SCHOLION 1.

327. *Errant qui promiscue vires omnes in ratione composita massarum & velocitatum esse statuunt, propterea quod mortua in eadem deprehenduntur* (§. 278). *Errorem communem detexit & emendavit* (a) *Vir illustris* Leibnitius. *Aliam theorematis* Leibnitiani *demonstrationem invenit & per literas mecum pro humanitate sua communicavit celeberrimus* Bernoullius, *quam ipsis viri ingeniosissimi verbis huc transcribo.*



„ Concipe, *inquit*, corpus C moveri oblique in „ elastrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP existente 30 gr. cujus nempe sinus CP est semissis radii CL. Suppono autem „ eam esse resistentiam in elastro, ut ad illud „ tendendum requiratur præcise unus velocitatis gradus in illo corpore, si perpendicula„ riter impingeret. Quid ergo jam fiet post in„ cursionem obliquam corporis C in elastrum L? „ Quoniam motus per CL componitur, ut no„ tum est, ex duobus collateralibus per CP & „ PL (*vide* §. 241), & eum CP, secundum quam „ corpus directe impingit in elastrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, „ consumetur hic motus per CP, tenso elastro „ (perinde enim esset ac si corpus C celeritate CP „ perpendiculariter incurreret in elastrum, „ quod

(a) Act. Erudit. An. 1686. pag. 161, & seqq.

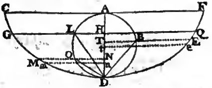
„ quod per hypothesin eam celeritatem destruere potest) remanente corporis celeritete & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit = PL = √3 (ponitur enim CL = 2) & applicato in M elio simili elastro faciente cum LM angulum LMQ, cujus sinus LQ = CP = 1; per eandem retionem manifestum est, corpus C post tensionem elestri L tensurum esse elastrum M amisso motu per LQ & servato motu per QM. Prolongata iteque QM ad N, ut fiat MN = QM = √2, ibique substituto elastro simili tertio, constituente cum MN enguium MNR semirectum, quo scilicet MR iterum sit = CP = 1; patet similiter motum per MR totum impendi in tensionem elestri N, corpore interim moveri pergente directioue & celeritate RN = 1. Denique si hec celeritate residua impingat perpendiculariter in elastrum O, huic flectendo totem suem vim reliquam dabit; ipsum iteque corpus ad quietem redigetur. Hisce ite præmissis, patet nunc potentiam corporis C tantam fuisse, ut per se solum tendere possit præcise quetuor elastre telia, ed quæ singule seorsim tendenda requiritur dimidie velocites corporis æquelis ipsi C, ideoque cum effectus illius quadruplo major sit, quem effectus hujus; evidens est quoque vim corporis velocitate 2 gr. quadruplam esse vis corporis ejusdem vel æqualis velocitete 1 gr. Haud ebsimili modo demonstrarem corpus C velocitate 3 gr. tendere posse 9 elastra, ad quorum unum tendendum unus velocitetis gradus in eo corpore requiritur, & tandem in genere numerum elastrorum tensorum semper esse quadratum numeri graduum velocitatis. Unde igitur sequetur, vires corporum æquelium esse in duplicata ratione celeritetum. *Q. e. d.*

SCHOLION 2.

328. *Prodiit nuper Parisiis Tractatus Mathematici hujus eminentis* (a), *in quo hanc virium mensuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnatam multo apparatu stabilivit. Praterea Viri celeberrimi* Grevesendius (b), Hermennus, & Bulffingerus (c) *eandem mensuram aliis modis demonstrarunt*, & Polenus (d) *experimentis confirmavit. Ego in Principiis Dynamicis* (e) *analysi vere dynamica eandem virium mensuram erui. Qui vires vivas a mortuis non distinguunt, vires promiscue astimant per celeritatem in massam ductam.*

(a) Discours sur les Lois de la communication du mouvement, a Paris 1727.
(b) In Element. Phys. Tom. I. pag. 112 edit. poster.
(c) In Comment. Acad. Scient. Petropolitanæ pag. 1. 45.
(d) In Tractatu de Castellis pag. 56. & seqq.
(e) In Comment. Acad. Scient. Petropolit pag. 232.

THEOREMA 50.



329. *Si grave vel perpendiculariter per* AD, *vel per quamcunque superficiem* FED *descendat & impetu concepto per aliam* DC *rursus ascendat, in punctis æquealtis, veluti in* G, H *&* Q, *eandem vim eandemque celeritatem habebit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave vi cadendo per AD vel FD acquisita ad C usque ex D per DGC ascendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipsi superest vis, qua ad C usque ascendere valet. Sed eandem vim adipiscitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q (*§. cit.*). In punctis ideo æquealtis G, H & Q eandem vim habet. *Quod erat unum.*

Sunt autem vires cadendo acquisitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales sint *per demonstr.* celeritatum quoque quadrata, consequenter ipsæ celeritates æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

330. Quod si ideo grave per superficiem quemcunque FED descendat & per eliam similem ec æqualem similiterque positem DGC rursus ascendet; idem omnino est, ac si eadem linea eadem velocitate singulis sui partibus bis percurreretur (§. 329). Unde tempora descensus & escensus per æqualia spatia æqualia sunt (§. 25).

CAPUT VIII.

De Descensu & Ascensu Corporum in Lineis Curvis.

DEFINITIO 37.

331. *Curva isochrona* dicitur, in qua grave sine acceleratione descendit, hoc est æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva isochrona tempora descensus ut altitudines ejusdem.

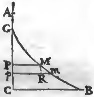
SCHOLION.

333. *Problema de curva isochrona invenienda proposuit* Leibnitius (a) *& suppressa analysi demonstrationem syntheticam dedit* (b). *Dedit autem solutionem ope calculi differentialis tunc temporis nascentis* Jacobus Bernoulli (c): *dedere post eum alii alias.*

PROBLEMA 47.

334. *Invenire curvam isochronam.*

RESOLUTIO.



Sit linea horizontalis BC, altitudo, per quam grave ad eandem descendit AC, curva isochrona GMB. Sit AP $= x$, PM $= y$; erit ducta pm ipsi PM infinite propinqua P$p = dx$, mR $= dy$ & M$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam in curva isochrona tempora descensus sunt ut altitudines, per quas descenditur (§. 332); erit tempus per Mm ut Pp, ideoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquisita eadem est cum celeritate in P acquisita (§. 308), ideoque in ratione subduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arculus infinite parvus Mm percurritur, $= \sqrt{x}$. Jam cum per arculum Mm grave motu æquabili feratur, erit ipse tanquam spatium a mobili percursum (§. 12) $= dx\sqrt{x}$ (§.34). Est itaque in curva isochrona

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$xdx^2 = dx^2 + dy^2$$

$$xdx^2 - dx^2 = dy^2$$

h. e. $$dx^2(x-1) = dy^2$$

$$dx\sqrt{(x-1)} = dy$$

Fiat $$x - 1 = v$$

Erit $$dx = dv$$

$$dx\sqrt{(x-1)} = dv\sqrt{v} = v^{1:2}dv$$

ideoque $$v^{1:2}dv = dy$$

$$\tfrac{2}{3}v^{3:2} = y$$

$$\tfrac{4}{9}v^3 = y^2 \text{ sive } v^3 = \tfrac{9}{4}y^2.$$

Apparet ideo, curvam isochronam esse e numero paraboloidum quadratico-cubicalium (§. 519 *Analys. finit.*), cujus abscissa $= v$, semiordinata PM $= y$, parameter $\frac{9}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, est x, sed $v = x - 1$; curva BMG lineam verticalem AC non secat in A, sed in G, consequenter mobile cadere debet per altitudinem AG, antequam in curva GMB descendere possit. Et quia AG $= 1$, parameter vero $= \frac{9}{4}$; si fit parameter $= p$, erit $p = \frac{9}{4}$AG, ideoque

(a) Nouvelles de la Republ. des lettres Septemb. 1687.
(b) In Actis Erudit. An. 1689 pag. 196. & seqq.
(c) In Actis Erudit. An. 1690. pag. 217. & seqq.

que $\frac{4}{9}p =$ AG, hoc est, altitudo AG, per quam descendere debet grave, antequam per curvam ita descendere possit, ut altitudines descensus sint tempori proportionales, quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile ideo non ex quiete descensum inchoat, sed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem.

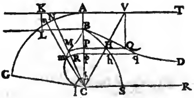
Scholion.

335. *Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter se parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero problema in hypothesi directionum convergentium solvit* Varignonius (a). *Lubet igitur solutionem in eadem hypothesi subjungere.*

Problema 48.

336. *Invenire lineam isochronam in hypothesi directionum in centro Telluris convergentium.*

Resolutio.



Sit distantia AC puncti horizontalis A, unde grave cadit, a centro Telluris C, $= b$, AP $= x$ ut ante, AN arcus radio AC descriptus $= y$, quia ad AC perinde ac in problemate præcedente semiordinatæ ad eandem altitudinem perpendicularis (§. 38 *Analys. infinit.*). Sit porro radius Cn ipsi CN infinite propinquus & radiis CP atque Cp, particula infinite parva Pp differentibus, describantur arcus concentrici PM & pm; erit MR $=$ P$p = dx$, N$n = dy$ & ob similitudinem sectorum CnN & CmR (§. 138. 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = Cm : mR$$

$$b : dy = b - x$$

ideoque $mR = (b - x)\, dy : b$.

Porro ob angulum ad R rectum (§. 38 *Analys. infinit.*)

$MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*)

ideoque $Mm^2 = dx^2 + (b-x)^2 dy^2 : b^2$

$= (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) . b^2$

Enimvero vi analyseos præcedentis (§. 334)

$$Mm^2 = x dx^2$$

Ergo $x dx^2 = (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) : b^2$

$$b^2 x dx^2 - b^2 dx^2 = (b-x)^2 dy^2$$

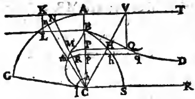
$$b dx \sqrt{(x-1)} = (b-x) dy$$

$$\frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x} = dy$$

$$\int \frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x} = y$$

Cum y sit arcus AN & eo dato determinetur punctum M, ducto ex centro C radio CN & intervallo CP, ob AP $= x$ noto seu $= b - x$, arcu PM; non alia re opus est, quam ut arcus AN ex assumta AP sive x determinetur: id quod fit ope curvæ BQD. Si enim elementum ejus PpQq ponatur $= b dx \sqrt{(x-1)} : (b-x)$; cum sit P$p = dx$, erit semiordinata PQ $= b\sqrt{(x-1)} : (b-x)$. Quare si area BPQ dividatur per AB $= 1$; prodibit recta arcui AN æqualis. Construatur itaque parallelogrammum rectangulum ABLK æquale areæ BPQ, cujus altitudo constans AB $= 1$; erit BL $=$ AK $=$ AN arcui, qui ideo circuli quadratura præsupposita determinari potest. Apparet itaque curvæ isochronæ in

(a) In Comment. Acad Reg. Scient. A. 1709. p. 1. & seqq



in præſenti caſu conſtructionem pendere a quadratura curvæ BQD & quadratura circuli.

Ut curvæ BQD natura inveſtigetur, fiat

$$PQ = b\sqrt{(x-1)}:(b-x) = 0$$

$$\text{erit} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Patet ideo ſemiordinata PQ evaneſcente, x degenerare in $AB = 1$, ſive in B, ubi $PQ = 0$, eſſe AB adhuc $= 1$. Fiat porro $PQ = b\sqrt{(x-1)}:(b-x) = \infty$

$$\text{erit} \quad b - x = 0$$

$$b = x$$

Ergo ubi $AP = x$ degenerat in $AC = b$, ſemiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis eſt aſymptotus curvæ BQD.

Ut curvæ BQD conſtructio detegatur, fiat $BP = v$; erit ob $AP = x$ & $AB = 1$

$$x = v + 1$$

$$x - 1 = v$$

$$PQ = \frac{b\sqrt{(x-1)}}{b-x} = \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Quoniam $\sqrt{v}$ eſt ſemiordinata parabolæ, cujus vertex in B, abſciſſa BP, parameter $AB = 1$ (§. 392 *Anal. finit.*); conſtruatur circa axem BC parabola AHS, erit $PH = \sqrt{v}$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectæ AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP \;:\; PH = CA \;:\; AV$$

$$b - v - 1 : \sqrt{v} = b : \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Eſt igitur $AV = PQ$, ideoque punctum curvæ Q, a qua conſtructio iſochronæ pendet, habetur ſi parallelogrammum PAVQ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum ſi ſit $VQ = AP = y$ & $AV = PQ = x$, $AB = a$; erit

$$x = \frac{b\sqrt{(ay-a^2)}}{b-y}$$

$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b-y)^2}$$

$$x^2(b-y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

ſeu ob $(b-y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$

$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0.$$

Si fiat $\quad x = 0$

$$\text{erit} \quad a^2b^2 - ab^2y = 0$$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

Eſt igitur ſemiordinata $AB = a$ in origine abſciſſarum A, quod convenit cum ſuperioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Analyſ. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Analyſ. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad curvam iſochronam in hypotheſi directionum convergentium eruatur, fiat præter $AB = 1$, $BP = v$, arculus mR radio $Cp = CR$ deſcriptus $= dz$; cum ſit $Pp = dv$, erit $Mm^2 = dz^2 + dv^2$ (§. 417 *Geom.*). Eſt vero $Mm^2 = x\,dx^2$ vi ſuperioris analyſeos (§. 334). Quare cum ſit

$x = v$

$$x = v + 1$$

erit $dx = dv$

$$dx^2 = dv^2$$

$$xdx^2 = (v + 1)dv^2$$
$$= vdv^2 + dv^2.$$

Habemus itaque

$$dz^2 + dv^2 = vdv^2 + dv^2$$

$$dz^2 = vdv^2$$

$$dz = v^{1:2}dv$$

$$z = \tfrac{2}{3}v^{3:2}$$

$$\tfrac{9}{4}z^2 = v^3$$

hoc est, $\tfrac{9}{4}AB \,.\, PM^2 = BP^3$.

Quoniam PM est arcus circuli radio CP descriptus, curva isochrona BMC in hypothesi directionum convergentium transcendens est (§. 380 *Anal. fin.*).

Ut curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$ seu $\frac{dz}{dv} = \sqrt{v}$

$$v = 0$$

erit $\frac{dz}{dv} = 0$

$$dv = \infty$$

Est vero in B $v = 0$ & $dv = \infty$. Axis igitur CB curvam BMC in B tangit, ideoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quodsi fiat $CP = 0$, arculus quoque radio CP descriptus $mR = dz = 0$, punctum ergo M coincidit cum C, ideoque curva BMC cum axe in C concurrit, qui in B eam tangit. Necesse igitur est ut ibidem sit ad axem concava, consequenter punctum flexus contrarii habet.

Jam in puncto flexus contrarii M est $Mm^2 = CP \,.\, dPp$ (§. 309 *Analys. infinit.*). Fiat igitur $CB = c$. Cum sit $BP = v$; erit $CP = c - v$, ideoque $Pp = -dv$. Jam

$$dz = v^{1:2}dv$$

ideoque $v^{-1:2}dz = dv$

$$-v^{-1:2}dz = -dv$$

$\tfrac{1}{2}v^{-3:2}dzdv = -ddv = dPp$, ob constantem dz,

$$\tfrac{1}{2}(c - v)v^{-3:2}dzdv = CP \,.\, dPp$$

Porro $Mm^2 = dz^2 + dv^2$
$= vdv^2 + dv^2$

Habemus itaque

$$vdv^2 + dv^2 = \tfrac{1}{2}(c - v)v^{-3:2}dzdv$$
$$= \tfrac{1}{2}(c - v)v^{-1}dv^2$$

$$v + 1 = (c - v) : 2v$$

$$v^2 + v = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}v$$

$$v^2 + \tfrac{3}{2}v = \tfrac{1}{2}c$$

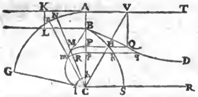
$$v^2 + \tfrac{3}{2}v + \tfrac{9}{16} = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16}$$

$$v + \tfrac{3}{4} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})}$$

$$v = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}AC \,.\, AB + \tfrac{1}{16}AB^2)} - \tfrac{3}{4}AB$$

ob $c + 1 = AC$.

Sit C*l* ultimum elementum curvæ; erit $bl = dz$ & $bC = dv$, & ob rectum ad b (§. 38 *Anal. infin.*) bl ad bC ut sinus anguli bCl ad sinum anguli blC (§. 33 *Trigon.*), ideoque $dz : dv =$ sin. bCl : sin. blC. Si C*l* sit ultimum curvæ elementum, punctum *l* infinite parvo intervallo ab axe AC distat, seu cum eo coincidit, atque ideo punctum *l* est in axe AC & angulus bCl idem cum ACG, intra quem curva BMC comprehenditur. Quare $dz : dv =$ sin. ACG : Cosin. ACG. Est vero $dz = dv\sqrt{v}$, ideoque $dz : dv = \sqrt{v} : 1 = \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$. Est igitur



igitur ſinus anguli ACG, intra quem curva continetur, ad ejus coſinum in ratione ſubduplicata rectarum CB & BA (§.167 *Arith.*). Et per hoc theorema angulus ACG, conſequenter arcus AG determinatur, qui curvæ iſochronæ toti conſtruendæ ſufficit.

Denique in æquatione $dz = dv\sqrt{v}$ ſubſtituatur valor ipſius $v = x - 1$; erit $dz = dx\sqrt{(x - 1)}$.

Fiat $dz = 0$

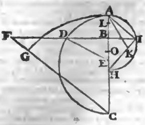
erit $dx\sqrt{(x - 1)} = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$= AB$.

Quare cum x denotet altitudinem, per quam grave cadit, ſeu motus acceleratricem, & dz in puncto B ſit $= 0$, ubi axis BC curvam tangit, *per demonſtrata*; grave non ex quiete motum in curva BMC incipere debet, ſed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem AB.



Angulus, intra quem continetur curva iſochrona in hypotheſi directionum convergentium, determinatur, ſi ſuper AC, hoc eſt, recta inter locum A, unde deſcenſus incipit, & centrum Telluris C interjecta, deſcribatur ſemicirculus, & in B, ubi curva axem tangit, erigatur perpendicularis BD, factaque BE = BA ducatur ex C rectæ ED parallela CF perpendiculari BD ultra ſemicirculum continuatæ in F occurrens: eſt enim ACF angulus quæſitus, conſequenter arcus AG ex centro C radio CA deſcriptus curvæ conſtruendæ ſufficit. Etenim AB : BD = BD : BC (§.327 *Geom.*). Quare AB ad BD in ratione ſubduplicata AB : BC (§. 216. 159 *Arth.*), ſeu $AB : BD = \sqrt{AB} : \sqrt{BC}$, conſequenter $\sqrt{BC} : \sqrt{AB} = BD : AB$ (§. 169 *Arith.*). Quoniam FC parallela ipſi DE *per conſtruct.* erit DB : BE = FB : BC (§. 268 *Geom.*), ideoque $\sqrt{BC} : \sqrt{AB} = BF : BC$ (§.167 *Arith.*). Eſt vero etiam BF : BC = ſin. BCF : ſin. CFB (§. 33 *Trigon.*) = ſin. ACG : Coſ. ACG. Ergo ſin. ACG : Coſ. ACG $= \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$ (§. 167 *Arith.*). Eſt igitur ACG angulus quæſitus.

Quodſi ſuper $AH = \frac{1}{2}AC$ ſemicirculus AIH deſcribatur & in B perpendicularis excitetur, ductiſque AI & IH fiat $IK = AL = \frac{1}{4}AB$ & LO = KA, erit O punctum axis, cui punctum flexus contrarii reſpondet. Eſt enim AB : AI = AI : AH ſive $\frac{1}{2}AC$ (§.330 *Geom.*), ideoque $AI = \sqrt{\frac{1}{2}AC \cdot AB}$ (§.377 *Geom.*). Quare cum angulus AIK ſit rectus (§. 317 *Geom.*), erit $AK = \sqrt{(\frac{1}{2}AC \cdot AB + \frac{1}{16}AB^2)}$. Et quia $LB = \frac{3}{4}AB$ & LO = AK *per conſtruct.* erit $BO = \sqrt{(\frac{1}{2}AC \cdot AB + \frac{1}{16}AB^2)} - \frac{3}{4}AB$. Quare in O eſt punctum axis, quod puncto flexus contrarii reſpondet.

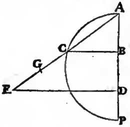
SCHO-

SCHOLION 1.

337. *Atque ita calculo analytico eruimus pracipuas curvæ isochronæ proprietates in hypothesi directionum convergentium, quæ præsenti instituto inserviunt. Constat enim, quomodo sit construenda supposita quadratura curvæ cujusdam per parabolam construenda & quadratura circuli. Constat præterea, quænam sint puncta, quibus ductus curvæ determinatur, nempe quod in* B *axem tangat, eique convexitatem obvertat, punctum* O *respondeat flexui contrario, ita ut curvæ portioni axis* OC *concavitatem obvertat, in* C *denique eadem cum axe concurrat, tota autem intra angulum* ACG *contineatur. Quoniam tamen curva ista & rectificabilis, & quadrabilis est, quadraturam & longitudinem in corollariis determinare libet.*

COROLLARIUM 1.

338. Quoniam (*Vid. Fig. 1 pag. præc.*) $Mm = dx\sqrt{x}$ (§. 336) $= x^{1:2}dx$, erit arcus curvæ $BM = \frac{2}{3}x^{3:2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Sed $x = v + 1$ (§. *cit.*). Ergo $BM = (\frac{2}{3} + \frac{2}{3}v)\sqrt{(v+1)} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}AP.\frac{\sqrt{AP}}{AB} - \frac{2}{3}AB$. Quare



si super AP describatur semicirculus & erecta in B perpendiculari BC & in D (est autem $AD = \frac{2}{3}AP$) perpendiculari DE, ducatur recta AE occurrens ipsi DE in E, tandemque ex EA resecetur $EG = \frac{2}{3}AB$; erit AG longitudo arcus. Est enim $AP : AC = AC : AB$ (§. 330 *Geom.*), ideoque $AC = \sqrt{AP}$ ob $AB = 1$. Porro cum ED ipsi BC parallela (§. 256 *Geom.*); $AB : AC = AD : AE$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $AE = \frac{AD.AC}{AB} = \frac{\frac{2}{3}AP.\sqrt{AP}}{AB}$. Quare cum $GE = \frac{2}{3}AB$ *per construct.* erit utique recta AG arcui curvæ æqualis.

COROLLARIUM 2.

339. Quoniam elementum areæ est sector infinite parvus (*Vid. Fig. 1 pag. præc.*) $CmR = mR.\frac{1}{2}CR = v^{1:2}dv(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v)$ (§. 336) $= \frac{1}{2}cv^{1:2}dv - \frac{1}{2}v^{3:2}dv$; erit area $BMC = \frac{1}{3}cv^{3:2} - \frac{1}{5}v^{5:2} = (\frac{1}{3}cv - \frac{1}{5}v^2)\sqrt{v} = (5cv - 3v^2)\sqrt{v} : 15 = \frac{(5CB.BP - 3BP^2)\sqrt{BP}}{15AB}$ ob $AB = 1$. Quodsi fiat $v = c$; erit area integra $= (5c^2 - 3c^2)\sqrt{c} : 15 = \frac{2}{15}c^2\sqrt{c} = \frac{2}{15}BC^2.\sqrt{BC} : AB$, denuo ob $AB = 1$.

SCHOLION 2.

340. *Quoniam* $v = BP$ *& area curvæ incipit in puncto* B, *non opus est, ut de quantitate adjicienda solliciti simus. Sed cum in corollario primo origo ipsius* x *in* A, *curvæ autem in* B: *ideo pro* x *substitui debebat* v, *ut constaret de quantitate adjicienda.*

COROLLARIUM 3.

341. Si CM ad PM perpendicularis (§. 38 *Analys. infinit.*) fiat infinite magna; erit ea axi AO parallela, & PM arcus, itidemque alter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrit (§. 82. 256 *Geom.*). Quare cum x sive AP intuitu infinitæ b, sive AC, $= 0$; erit $b - x = b$, ideoque æquatio $y = \int\frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x}$ (§. 336) degenerat in sequentem $y = \int bdx\sqrt{(x-1)} : b = \int dx\sqrt{(x-1)}$; qui est casus *Leibnitianus* (§. 334).

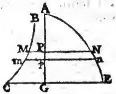
SCHOLION 3.

342. *Cum centrum terræ ingenti admodum intervallo distet, & altitudines, in quibus gravium descensus nobis usui esse potest, respectu illius distantiæ sint admodum exiguæ; casus directionum parallelarum praxi satisfacit, qui etiam ob faciliorem curvæ descriptionem sese commendat* (§. 334 Mech. & §. 581 Analys. finit.). *In illo igitur acquiescere poteramus, nisi nobis quoque propositum esset speciminibus illustribus docere, quomodo principiis mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in solvendis problematis arduis sit utendum, & quo ordine ratiocinia sint concatenanda, ut non perturbato animi statu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget de solutione generali problematis in duplici hypothesi hactenus considerati nonnulla addere. Nimirum solvimus problema de curva isochrona in hypothesi accelerationis* Galilæana, *propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea capere licet, satisfacit, ita ut in locum hypotheseos naturæ quoad nos surrogari possit* (§. 85 & seqq.). *Enimvero cum alia quoque hypotheses non sint impossibiles, atque Geometra sit problema in omni hypothesi solvere, quamdiu ignoratur, quænam illarum sit hypothesis naturæ; ut ostendamus restat, quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem ideo solutionem hic inprimis admittimus in usum artis inveniendi, ut appareat progressus a solutionibus particularibus ad generales.*

PROBLEMA 49.

343. *Invenire curvam iſochronam in quacunque accelerationis hypotheſi.*

RESOLUTIO.

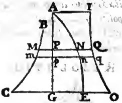


Quodſi acceleratio alia ſtatuatur, quam quæ in hypotheſi *Galilæana* obtinet, directionibus parallelis manentibus, curvæ iſochronæ BMC accedat curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem deſcripta, cujus ſemiordinatæ PN, GE exprimunt celeritates per abſciſſas iiſdem reſpondentes AP, AG acquiſitas.

Sit itaque $AP = x$, $PM = y$, $PN = v$, reperietur eodem prorſus quo ſupra (§. 334) modo $Mm = vdx$, ut ideo habeamus

$$dx^2 + dy^2 = v^2dx^2$$
$$dy^2 = v^2dx^2 - dx^2$$
$$dy = dx\sqrt{(v^2 - 1)}$$

Quodſi jam ſit $v = \sqrt{x}$, quemadmodum in hypotheſi *Galilæana*; prodibit $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$, prorſus ut ſupra (§. *cit.*). Solutio itaque particularis convertitur in univerſalem, aut potius ſpecialis in generalem, ſi pro $\sqrt{x}$ ponas v; id quod regulis Logicis, quas ſtabilivimus, ad amuſſim congruit (§. 710 *Log.*).



Quodſi magis arriſerit ope loci ſollicitationum centralium, ſeu ſcalæ gravitatis IQO problema ſolvere; pari facilitate idem præſtatur. Accedat enim porro ad curvam iſochronam BMC & curvam celeritatum ANE ſcala ſollicitationum centralium IQO & ſit communis abſciſſa AP in altitudine acceleratrice $AG = x$, $PM = y$, $PN = v$, $PQ = g$; erit $v^2 = 2\int g dx$ (§. 113). Quare ſi pro v^2 hunc valorem ſubſtituas, prodibit $dy = dx\sqrt{(2\int g dx - 1)}$. Quodſi jam ſupponas, quemadmodum id obtinet in hypotheſi *Galilæana* (§. 112), gravitatem conſtantem, quæ ideo ſit 1; erit $dy = dx\sqrt{(2\int dx - 1)} = dx\sqrt{(2x - 1)}$, vel, cum hic ſola ratio attendatur, minime autem magnitudo abſoluta, $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$, ut ſupra (§. 334).

SCHOLION.

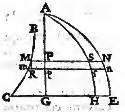
344. *In curva iſochrona tempora deſcenſus ſunt ut altitudines, per quas deſcenditur* (§. 332). *Inveniri autem poſſunt etiam curvæ aliæ, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque conſtantem vel quomodocunque aſſignabilem habet. Quamobrem in gratiam artis inveniendi ſolutionem problematis generalem apponimus, ſub quo curva iſochrona tanquam caſus particularis continetur.*

PROBLEMA 50.

445. *Invenire curvam, in qua grave deſcendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem, per quam deſcendit, relationem datam, ſeu ut tempora deſcenſus habeant inter ſe relationem ex*

datis altitudinibus dato modo aſſignabilem, ſuppoſitis quacunque accelerationis lege & directionibus ſive parallelis, ſive convergentibus.

RESOLUTIO.



Non differt reſolutio problematis præſentis a reſolutione præcedentis, niſi quod circa axem communem deſcribatur, præter curvam deſcenſus BMC, curvam celeritatis ANE, etiam curva temporis ASH. Nimirum grave in curva BMC ea lege deſcendit, ut in M ſit celeritas ut ſemiordinata PN, tempus vero ut PS.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PS = t$, $PM = y$; erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ itemque, ob ſuppoſitum per Mm motum æquabilem, $= vdt$, ut ſupra (§. 334).

Habemus itaque

$$vdt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$v^2dt^2 = dx^2 + dy^2$$

$$v^2dt^2 - dx^2 = dy^2$$

$$dy = \sqrt{(v^2dt^2 - dx^2)}$$

$$y = \int \sqrt{(v^2dt^2 - dx^2)}$$

Quodſi ergo in dato caſu ſpeciali v exprimattur per x, & dt per dx, prodibit æquatio curvæ deſcenſus reſpondens.

Sit. E. gr. $v = \sqrt{x}$, & $t = x$, quemadmodum in curva iſochrona, ſuppoſita accelerationis lege *Galilæana*; erit $dt = dx$, ideoque $y = \int \sqrt{(xdx^2 - dx^2)} = \int dx \sqrt{(x - 1)}$, ut ſupra (§. 334).

Quod ſi quis in caſu directionum convergentium problema reſolvere velit, non novo calculo opus eſt, ſed in æquatione prima paulo ante (§. 336) inventa pro xdx^2 ſubſtitui debet v^2dt^2: quo facto habemus.

$$v^2dt^2 = \frac{b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2}{b^2}$$

$$v^2b^2dt^2 = b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2$$

$$\frac{v^2b^2dt^2 - b^2dx^2}{(b-x)^2} = dy^2$$

$$dy = \frac{b\sqrt{(v^2dt^2 - dx^2)}}{b-x}$$

Quodſi etiam hic in dato caſu ſpeciali v & t per x determinentur, æquatio curvæ deſcenſus prodit.

E. gr. Sit ut ante $v = \sqrt{x}$, $t = x$, quemadmodum pro curva iſochrona ſuppoſuimus; erit $dy = \frac{b\sqrt{(xdx^2 - dx^2)}}{b-x} = \frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x}$, ut ſupra (§. 336).

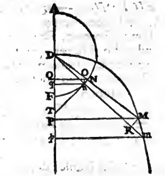
SCHOLION.

346. *Ubi ideo problema in caſu particulari ſolutum, veluti in caſu* Leibnitii, *non difficilis eſt ſolutio univerſalis, quamcunque univerſalitatem eidem donare volueris: id quod etiam in aliis problematis ſimiliter obtinet. Enimvero ubi ſolutio generalis ad caſum ſpecialem applicanda, plus difficultatis oritur, quatenus nempe formulæ, quæ per ſubſtitutionem prodeunt, vel ſummandæ, vel ad quadraturas aut rectificationes ſimpliciorum curvarum reducendæ. Atque ea ratio eſt, cur Geometræ eminentes artem inveniendi ſive analyſin promoturi parum ſolliciti fuerint de ſolutionibus generalibus, modo particulares dare poſſent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.*

DEFINITIO 38.

347. *Curva iſochrona paracentrica* dicitur, per quam deſcendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiam *curva acceſſus & receſſus æquabilis.*

 Sit



Sit DM*m* curva quæsita, D punctum fixum in axe datum, DM esse debet ut tempus descensus ab O in M.

SCHOLION.

348. *Problema de curva isochrona paracentrica invenienda primum propositum est a* Leibnitio (a); *sed cum solutu difficilius sit priore, diu intactum reliquerunt Geometræ, donec tandem solutionem daret* Jacobus Bernoulli (b) *& simul solutiones* Leibnitii *Fratrisque* Joannis (c) *eliceret. Generalius deinde idem problema solvit* Varignonius (d). *Lubet hic dare solutionem præcedenti, quantum licet, affinem.*

PROBLEMA 51.

349. *Invenire curvam isochronam paracentricam.*

RESOLUTIO.

Sit A punctum, unde descensum inchoat grave, D punctum, a quo vel recedit, vel ad quod accedit, prout casus tulerit. Radio AD describatur semicirculus ANF, ductisque ad punctum curvæ M rectis DM & D*m* infinite propinquis agantur ad axem normales NQ, & PM, itemque *nq*, quæ erit ipsi NQ, & *mp*, quæ erit ipsi PM infinite propinqua. Ducatur NT tangens circulum in N (§. 38 *Analys. infin.*) & *n*O normalis ad NQ, tandemque radio DM arculus MR ex centro D.

Sit jam DN = DA = DF = a, DQ = z, DM = t; erit $mR = dt$, $Qq = nO = dz$ & $QN = \sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quæratur jam ut in problemate anteriore de curva isochrona (§. 334 & 336) arcus M*m* duplici modo, nempe 1. ex principiis pure geometricis, 2. ex principiis mechanicis, seu conditione problematis.

I. Quoniam TN circulum tangit in N *per construct.* angulus TND rectus est (§. 38 *Analys. infinit.*), ideoque △ DNQ ∽ △ QNT seu angulus DNQ = QTN (§. 329 *Geom.*). Sed ob parallelismum rectarum *n*O & QT (§. 256 *Geom.*) angulus O*n*N = QTN (§. 233 *Geom.*). Ergo O*n*N = DNQ (§. 87 *Arith.*). Quare cum DQN & *n*ON sint recti *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*).

$$NQ : DN = nO : Nn$$
$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = dz :$$

Ergo $Nn = adz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$

Porro ob sectores D*n*N & DRM similes (§. 138. 412 *Geom.*)

$$DN : Nn = DM : MR$$
$$a : \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = t :$$

$$\text{Ergo } MR = tdz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$$
$$\text{Hinc } MR^2 = t^2dz^2 : (a^2 - z^2)$$
$$\text{Sed } mR^2 = dt^2$$

$$\text{Ergo } Mm^2 = \frac{t^2dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2$$
$$= \frac{t^2dz^2 + a^2dt^2 - z^2dt^2}{a^2 - z^2}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum M*m* æquabilis supponitur, erit spatium M*m* in ratione com-

(a) In Actis Erudit. A. 1689. p. 198.
(b) In Actis Erudit. A. 1694. p. 277.
(c) Ibid. p. 371. 394.
(d) In Comment. Accadem. Reg. Scient. A. 1699. p. 9. & seqq.

composita temporis & celeritatis in M acquisitæ (§. 34). Sed tempus est ut mR sive dt (§.347) & celeritas in M acquisita in hypothesi *Galilæana* seu gravitatis constantis ut $\sqrt{AP}$ (§.87). Ergo $Mm = dt.\sqrt{AP}$. Est vero ob parallelas QN & PM (§. 268 *Geom.*).

$$DN : DQ = DM : DP$$
$$a : z = t :$$
$$DP = tz : a$$
$$\text{Ergo } AP = AD + DP$$
$$= a + tz : a$$
$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

Unde $Mm = dt.\sqrt{AP}$ *per demonstr.*

$$= dt\sqrt{(a^2 + tz)} : \sqrt{a}$$
$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{1.a}$$

hoc est, sumta a pro unitate,

$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2} = \frac{a^2dt^2 - z^2dt^2 + t^2dz^2}{a^2 - z^2}$$
$$a^4dt^2 + a^2tzdt^2 - a^2z^2dt^2 - tz^3dt^2 = a^4dt^2 - a^2z^2dt^2 + a^2t^2dz^2$$
$$a^2tzdt^2 - tz^3dt^2 = a^2t^2dz^2$$
$$dt\sqrt{(a^2z - z^3)} = adz\sqrt{t} \qquad \sqrt{a}$$
$$dt\sqrt{(a^3z - az^3)} = adz\sqrt{at}$$
$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$$

h.c. $a^{-1:2}t^{-1:2}dt = adz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$

$$2a^{-1:2}t^{1:2} = a\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}) \qquad a$$
$$2a^{1:2}t^{1:2} = a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$$

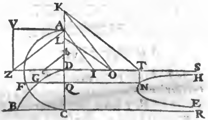
h.c. $2\sqrt{at} = a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$

Atque hæc est æquatio, quam dedit *Leibnitius* pro curva isochrona paracentrica (*a*). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis absolute summari nequit. Dari autem potest constructio sive per quadraturam, sive per rectificationem alicujus curvæ. Dabimus primo constructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$ est elementum curvæ; erit semiordinata $v = a^3 : \sqrt{(a^3z - az^3)}$ (§.98 *Analys. infinit.*).

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$v = \infty$$
$$\text{erit } \sqrt{(a^3z - az^3)} = 0$$
$$a^3z - az^3 = 0$$
$$a^2 - z^2 = 0$$
$$a = z$$



Quando itaque z fit a, hoc est, DQ degenerat in DC, semiordinata CR fit infinita. Est ideo CR asymptotus curvæ.

$$\text{Fiat} \quad z = 0$$
$$v = \frac{a^3}{0}$$

Quare ubi z fit o, seu evanescit, semiordinata DS est asymptotus curvæ.

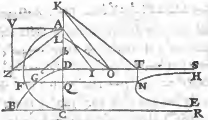
Quoniam $v = a^3(a^3z - az^3)^{-1:2}$

erit

$$dv = -\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz)$$

Si

(a) In Actis Erudit. A. 1689. p. 371. & 372.



Si jam fiat $dv = 0$,
erit

$$-\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz) = 0$$

$$a^3dz = 3az^2dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = z$$

Quando itaque $DQ = \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analyſ. infinit.*).

Quoniam $v = \frac{a^3}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)}\sqrt{az}}$$

erit $\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : \frac{a^2}{\sqrt{az}} = a : v$$

Eſt vero $\sqrt{az}$ ſemiordinata QG parabolæ DGB, cujus parameter $= a$ & abſciſſa DQ (§. 392 *Anal. fin.*) & $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ ſemiordinata QF circuli radio $DA = a$ deſcripti (§. 377 *An. fin.*) Curva igitur quadranda ita conſtruitur. Circa communem axem AC deſcribatur ſemicirculus AFC radio $AD = a$ & parabola DGB, cujus vertex in D centro ſemicirculi, parametro a radio ſemicirculi æquali. Fiat deinde DI = GQ & DO = DA, itemque DL = QF, ductiſque OK ipſi AI & KT ipſi LO parallelis; erit DT = QN. Eſt enim (§. 268 *Geom.*).

$$DI : DA = DO : DK$$

$$\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

$$DL : DO = DK : DT$$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = \frac{a^2}{\sqrt{az}} : \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)}\sqrt{az}}$$

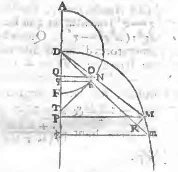
Demiſſa itaque ex T perpendiculari TN ad QN, punctum N eſt in curva quæſita. Quodſi tandem ſpatio SDQNH fiat æquale rectangulum ADZV; erit ob $AD = a$, $DZ = a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$.

Habemus ergo $DZ = 2\sqrt{at}$

$$\tfrac{1}{4}DZ^2 = at$$

$$\frac{DZ^2}{4a} = t$$

Unde rectæ t, quibus puncta in iſochrona paracentrica determinantur, facile inveniuntur. Nimirum fiat $Db = \tfrac{1}{2}DZ$ & ducatur bc ipſi ZA parallela; erit (§. 268 *Geom.*) $DA : DZ = Db : Dc$, conſequenter $Dc = t$. Quare ſi ex centro D radio $= Dc$ deſcribatur arcus ſecans DN in M; erit punctum M in iſochrona paracentrica.



Videamus jam porro, quomodo ſummatio formulæ $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{2}adz}{\sqrt{(a^3z - z^3)}}$ reduca-

ducatur ad rectificationem arcus cujuſdam. Quoniam $adz : \sqrt{(a^2z - z^3)}$ eſt elementum arcus *per hypoth.* erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dz^2}{a^2z - z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectificandæ dx & dy per z dari debent, quadratum $a^2dz^2 : (a^2z - z^3)$ ſeu ejus multiplum dividendum eſt in duo alia, quorum latera, ſi fieri poteſt, ſunt ſummabilia. Quamobrem cum numerator a^2dz^2 debeat eſſe aggregatum duorum quadratorum, evidens eſt requiri, ut quadrata non modo diverſa habeant ſigna, verum etiam tales denominatores, qui in ſe invicem ducti producunt $a^2z - z^3$. Enimvero cum $a^2z - z^3$ in iſtiuſmodi factores reſolvi nequeat, fieri autem id poſſit, ſi mutetur in $a^2z^2 - z^4$, cum tunc factores ſint $az + z^2$ & $az - z^2$ (86 *Analyſ. finit.*); fractio $a^2dz^2 : (a^2z - z^3)$ ducatur in z ut habeatur $a^2zdz^2 : (a^2z^2 - z^4)$. Quare ſi laterum numeratores dicantur interea q & w; erunt latera $qdz : \sqrt{(az + z^2)}$ & $wdz : \sqrt{(az - z^2)}$. Ex differentiandi regulis conſtat, fore latera ſummabilia, ſi fiat $q = \frac{a + 2z}{2}$ & $w = \frac{a - 2z}{2}$, ideoque ipſa latera fiant $\frac{(a + 2z)dz}{2\sqrt{(az + z^2)}}$ & $\frac{(a - 2z)dz}{2\sqrt{az - z^2}}$.

Videamus itaque, an quadratorum ſumma $= \frac{a^2dz^2}{a^2z - z^3}$. Quoniam itaque $dx = \frac{(a + 2z)dz}{2\sqrt{(az + z^2)}}$ & $dy = \frac{(a - 2z)dz}{2\sqrt{(az - z^2)}}$ erit $dx^2 = \frac{(a^2 + 4az + 4z^2)dz^2}{4az + 4z^2}$ & $dy^2 = \frac{(a^2 - 4az + 4z^2)dz^2}{4az - 4z^2}$ ſeu reductione ad eandem denominationem facta $dx^2 = (4a^3z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$ & $dy^2 = (4a^3z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$, ideoque $dx^2 + dy^2 = 8a^3zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^3dz^2 :) 2a^2z - 2z^3)$, ſeu multiplum quadrati dividendi conſequenter $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz\sqrt{a^3} : \sqrt{(2a^2z - 2z^3)}$.

Eſt vero $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}}$

$$\frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}}$$

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2 - 2z^3)}}$$

$$\frac{at^{-1:2}dt}{\sqrt{2a}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} = dv$$

$$\frac{2at^{1:2}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2at} = v$$

$$2at = v^2$$

$$t = v^2 : 2a$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipſius t inveniri poteſt; pro conſtruenda curva iſochrona paracentrica prius conſtrui debet curva, in qua altera coordinata eſt $\sqrt{(az + z^2)}$ ſeu ſemiordinata hyperbolæ æquilateræ, cujus axis tranſverſus $= a$, abſciſſa $= z$ (§. 507 *Analyſ. finit.*), altera $\sqrt{(az - z^2)}$, ſeu ſemiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abſciſſa $= z$ (§. 377 *Analyſ. finit.*).

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$x =$

$$x = \sqrt{(az + z^2)} \qquad y = \sqrt{(az - z^2)}$$

erit $x^2 = az + z^2 \qquad y^2 = az - z^2$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + az + z^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} = \tfrac{1}{2}a + z$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

$$az = a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= x^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y^2 = az - z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$y^2 + x^2 + a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4$$
$$= 4a^2x^2 + a^4$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 = 2a^2x^2 - x^4$$

Est itaque curva tertii generis (§. 382 *Analys. finit.*).

Fiat $\quad x = 0$

erit $\quad y^4 + 2a^2y^2 = 0$

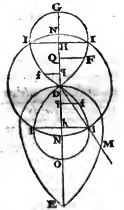
$$y = 0$$

Fiat $\quad y = 0$

erit $\quad 2a^2x^2 - x^4 = 0$

$$2a^2 = x^2$$

$$\sqrt{2a^2} = x$$



In vertice ergo D origo utriusque indeterminatæ x & y. Quando ergo DG $= x = \sqrt{2a^2}$, semiordinata y evanescit, ideoque curva secat axem in G.

$$4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy$$
$$= 4a^2xdx - 4x^3dx$$

Quare si fiat $dy = 0$, erit

$$4y^2xdx = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

quæ est maxima applicata (§. 63 *Analys. infinit.*). Quoniam vero $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ est semiordinata circuli HI (§. 377 *Analys. finit.*) maxima applicata cadit in I, ubi circulus ex centro D radio DN $= a$ descriptus curvam secat.

Ponatur in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipsius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habemus.

$$a^2 - x^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a = \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = \text{DH}$$

Quodsi ponamus abscissarum originem in G & GQ $= v$, erit DQ $= x = b - v$, ideoque æquatio ob $b = \sqrt{2a^2}$ in hanc degenerat:

$$b^2(b-v)^2 - (b-v)^4 = y^4 + 2y^2(b-v)^2 + b^2y^2$$

Fiat jam $v > b$, e. gr. $= \tfrac{3}{2}b$

erit $\quad b - v = b - \tfrac{3}{2}b = -\tfrac{1}{2}b$

$$(b-v)^2 = \tfrac{1}{4}b^2$$

$$2(b-v)^2 = \tfrac{1}{2}b^2$$

$$(b-v)^4 = \tfrac{1}{16}b^4$$

consequenter

$$\tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{16}b^4 = y^4 + \tfrac{1}{2}b^2y^2 + b^2y^2$$

h. e. $\tfrac{3}{16}b^4 = y^4 + \tfrac{3}{2}b^2y^2$

Cum itaque valor ipsius y non fiat imaginarius, etiamsi v seu GQ sumatur

tur major quam GD, seu axe curvæ GIFDIG; curva ultra D continuatur, ideoque se mutuo secant partes in D, hoc est, curva nodum in D habet. Ex constructione autem patet, partem inferiorem fore priori similem.

Ut determinetur angulus, sub quo curva axem in D secat, investiganda est ut supra (§. 336) ratio laterum infinite parvorum Dq & qf. Quodsi enim Df sumatur pro sinu toto, erit fq sinus, Dq cosinus anguli quæsiti. Quodsi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genetricium abscissa sumatur dz, semiordinata hyperbolæ erit $= \sqrt{(adz + dz^2)}$ (§. 507 *Analys. finit.*), circuli vero $= \sqrt{(adz - dz^2)}$ (§. 377 *Analys. finit.*), hoc est, cum dz^2 differentiale secundi gradus respectu primi adz evanescat, utrobique $= \sqrt{adz}$. Quoniam itaque per constructionem Dq est semiordinata hyperbolæ & qf semiordinata circuli; erit ad verticem $qf = q$D, ideoque qDf angulus curvæ cum axe semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus curvæ rectus est.

Potest idem etiam aliis modis ostendi. Nimirum

$$qD = dx = \frac{(a + 2z)dz}{2\sqrt{(az + z^2)}}$$

$$qf = dy = \frac{(a - 2z)dz}{2\sqrt{(az - z^2)}}.$$

Sed in casu instantis evanescentiæ z fit dz. Quare si pro z substituatur dz, erit

$$qD = \frac{adz + 2dz^2}{2\sqrt{(adz + dz^2)}}$$

$$qf = \frac{adz - 2dz^2}{2\sqrt{(adz - dz^2)}}$$

Est vero dz^2 respectu $dz = 0$. Ergo per ea, quæ modo diximus,

$$qD = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{adz}$$

$$qf = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{adz}$$

Ergo qD $= qf$, ut ante.

Idem inveniri debet, si in æquatione differentiali ad curvam pro x substituatur dx & pro y ponatur dy. Æquatio enim $a^2xdx - x^3dx = y^3dy + x^2ydy + y^2xdx + a^2ydy$ facta substitutione in sequentem degenerat:

$$a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2dx^2dy^2 + a^2dy^2$$

Quare cum sit $dx^4 = 0$, $dy^4 = 0$, $2dx^2dy^2 = 0$, (differentialia enim quarti generis respectu secundi evanescunt);

$$\text{erit} \quad a^2dx^2 = a^2dy^2$$

$$dx^2 = dy^2$$

$$dx = dy$$

hoc est, qD $= qf$, ut ante.

Imo potest etiam in æquatione ad curvam $2a^2x^2 - x^4 = y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2$ pro x substitui dx & in locum ipsius y surrogari dy: quo facto habemus

$$2a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2dy^2dx^2 + 2a^2dy^2$$

Sed ob modo allatam rationem

$$dx^4 = 0,\ dy^4 = 0,\ 2dy^2dx^2 = 0$$

$$\text{Ergo} \quad 2a^2dx^2 = 2a^2dy^2$$

$$dx = dy, \text{ ut ante.}$$

Ut tandem etiam intelligatur natura isochronæ paracentricæ DME, cum pro ea sit

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} = dv$$

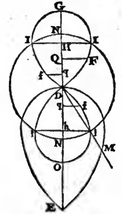
$$\text{seu} \quad t = v^2 : 2a$$

$$\text{si fiat} \quad dz = 0$$

$$\text{erit} \quad dv = 0$$

$$\text{ideoque} \quad t = 0$$

Curva itaque axem in D secat.



Ex ipsa autem constructione apparet, si $DQ = z$ fiat $= a$, seu DN, rectam DM super DO cadere, atque ideo curvam axem in puncto E secare, ultra eum ex altera parte continuandam. Est vero tum $v =$ DFIG, ideoque DE $= (\text{DFIG})^2 : 2a$

Patet idem ex valoribus x & y. Etenim si sit

$$z = a$$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)} = \sqrt{2a^2} = \text{DG}$

& $y = \sqrt{(az - z^2)} = \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$

ideoque $v =$ DFIG, ac proinde $t = v^2 : 2a = (\text{DFIG})^2 : 2a$

Habemus hinc

$$\text{DE} : \text{DFIG} = \text{DFIG} : 2a$$

Quoniam vero curva isochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, se mutuo in E partes secant.

Scholion.

350. *Poterat quoque problema præsens ad modum præcedentis variis modis universalius resolvi, nimirum in quacunque gravitatis hypothesi, cum in solutione* Galilæanam *supposuerimus sumentes celeritatem acquisitam in ratione subduplicata altitudinis. Sed non opus est, ut istiusmodi solutionibus immoremur.*

Definitio 39.

351. *Curva Tautochrona* dicitur, in qua mobile per quoscunque arcus eodem tempore descendit.

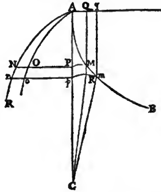
Corollarium.

352. Quoniam descensus per Cycloidem & quemcunque ejus arcum sunt æquidiuturni (§. 311); cyclois curva tautochrona est (§. 351).

Problema 50.

353. *Determinare tempus descensus per curvam in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones supponantur parallelæ, sive convergentes.*

Resolutio.



Sit altitudo AP, per quam descendit grave, AMB curva descensus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquisita, in C centrum gravium. Radiis CM & *cm* infinite propinquis describantur arcus PM & *pm*, sitque $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$, ideoque $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quoniam motus per M*m* æquabilis, erit $Mm = dt \cdot \text{PN}$ (§. 34), consequenter

$\sqrt{(dx^2}$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dt \,.\, PN$$

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{PN}$$

Si punctum C infinite distet, arcus PM & *pm* evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodsi ex hypothesi gravitatis speciali substituatur valor ipsius PN, sive celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypothesi. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam substituatur valor ipsius y per x; prodibit tempus in casu speciali dato.

In hypothesi *Galilæana* $PN = \sqrt{x}$, sive, si parameter parabolæ, quæ est curva celeritatum ANR, fuerit a, $PN = \sqrt{ax}$ (§. 87. 89). Ergo tempus per $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$, ideoque $dt^2 = (dy^2 + dx^2) : ax$.

Sit jam curva descensus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AT; erit in hypothesi directionum parallelarum $AQ = PM = y$, $QM = AP = x$, ideoque (§. 388 *Analys. finit.*).

$$x^2 = ay$$

$$2x dx = a dy$$

$$4x^2 dx^2 : a^2 = dy^2$$

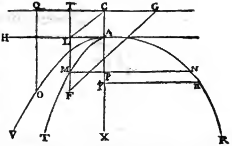
Ergo $dt^2 = \left(\frac{4x^2 dx^2}{a^2} + dx^2\right) : ax$

$$= \frac{(4x^2 + a^2)\, dx^2}{a^3 x}$$

$$dt = \frac{dx \sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{a^3 x}}$$

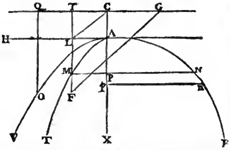
Quoniam $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri, elementum arcus parabolici $Mm = dx\sqrt{(4x^2 + a^2)} : a$ (§. 146 *Analys. infinit.*) dividendo per celeritatem in M acquisitam $= \sqrt{ax}$.

Est igitur $t = \int (dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a\sqrt{ax}) = PO$.



Quodsi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum construi debet, dividendo spatium APN per quantitatem constantem a; erit elementum illius curvæ $PNnp = dx\sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$.

Quare cum sit $Pp = dx$; erit semiordinata ejus $PN = \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$, seu, si $a = 1$, $PN = a\sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$. Est vero $\sqrt{ax}$ semiordinata parabolæ, cujus abscissa $AP = x$, parameter $= a$ (§. 392 *Analys. finit.*), $\sqrt{4x^2 + a^2})$ abscissa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis transversus $= 2a$, semiordinata $= 2x$ (§. 147 *Analys. infinit.*). Curva igitur, a cujus quadratura pendet constructio curvæ temporum ita construitur. Circa communem axem AX construatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§. 400. 472 *Analys. finit.*), cujus centrum in C, axis dimidius $AC = a$, qui simul parabolæ AMT parameter. Ducta semiordinata parabolæ PM, fiat $CQ = 2AP = 2x$; erit ex Q erecta ad CQ perpendiculari $QO = \sqrt{(4x^2 + a^2)}$. Ducatur TF parallela ipsi CX per punctum M & AH parallela ipsi QG; erit $TL = CA = a$ & $TC = PM = \sqrt{ax}$. Fiat $TG = QO$



$= \sqrt{(4x^2 + a^2)}$ & ducatur FG parallela ipsi LC; erit (§. 268 *Geom.*).

$$TC : TL = TG : TF$$
$$\sqrt{ax} : a = \sqrt{(4x^2 + a^2)} : TF$$
$$TF = \frac{a\sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{ax}}$$

Quodsi ergo PM continuetur in N, donec PN = TF; erit punctum N in curva quadranda.

Si curvæ temporum constructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$dx\frac{\sqrt{(a^2 + 4x^2)}}{a\sqrt{ax}} = \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$$

erit $\frac{a^2dx^2 + 4x^2dx^2}{a^3x} = dz^2 + dy^2$

Fiat jam $dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$

$$dy^2 = \frac{4x^2dx^2}{a^3x}$$
$$= \frac{4xdx^2}{a^3}$$

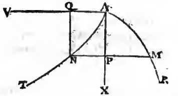
erit $a^{-1:2}x^{-1:2}dx = dz$

$$2a^{-1:2}x^{1:2} = z$$
$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = z$$
$$dy = 2x^{1:2}a^{-3:2}dx$$
$$y = \frac{4}{3}x^{3:2}a^{-3:2}$$
$$= \frac{4x\sqrt{x}}{3a\sqrt{a}}$$

Si sit $a = 1$; erit

$$z = 2\sqrt{ax} \qquad y = \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$$
$$z^2 = 4ax \qquad \frac{9}{16}ay^2 = x^3$$

Æquatio prima est ad parabolam Apollonianam (§. 388 *Anal. finit.*) cujus parameter $4a$, abscissa x, semiordinata z: altera vero ad parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{9}{16}a$, abscissa ad parabolam externam relata $= x$, semiordinata $= y$, seu abscissa $= y$, semiordinata $= x$ (§. 519 *Anal. finit.*).



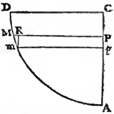
Construenda igitur est parabola AMR parametro $4a$, (§. 393 *Analys. finit.*) & alia secundi generis ANT, cujus parameter $\frac{9}{16}a$ (§. 581 *Analys. finit.*); erit PM = z abscissa, PN = AQ = y semiordinata curvæ, a cujus rectificatione pendet constructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, substituatur in æquatione $x^3 = \frac{9}{16}ay^2$ valor ipsius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus; erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam

$$\frac{z^6}{64a^3} = \frac{9}{16}ay^2$$

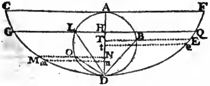
ideoque $z^6 = 36a^4y^2$

quæ est curva quinti generis (§. 382 *Analys. finit.*) ex familia parabolarum, seu paraboliformium (§. 519 *Analys. finit.*).

Sit



Sit DMA quadrans circuli, cujus radius CA $= a$, CP $= x$; erit Mm $= adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§.153 *Anal.infinit.*), ideoque $dt = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)} \sqrt{ax}$, quod elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda curva isochrona paracentrica reperimus; quæ ad ejus summationem spectant, ibidem relegenda sunt.



Sit CMD cyclois, AOD semicirculus genitor, AN $= x$, AD $= a$; erit DN $= a - x$. Quare *per demonstr.in* (§.168 *Anal.inf.*) Mm $= dx \sqrt{(a^2 - ax)} : (a - x)$ $= dx \sqrt{a} : \sqrt{(a - x)}$. Consequenter

$$dt = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$= \frac{2a\,dx\sqrt{a}}{2a\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{a}}{a} \cdot \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$$

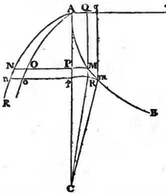
Enimvero $\int (adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}) =$ arcui ALO (§.157 *Analys.infin.*), $2\sqrt{a} = 2\sqrt{AD}$ & $a =$ AD. Ergo tempus descensus per arcum MC $= 2\sqrt{AD}$. ar. ALO : AD.

Quodsi ergo x sive AN degeneret in a sive AD, erit tempus descensus per semicycloidem CMD $= 2\sqrt{AD}$. DOA : DA.

PROBLEMA 56.

354. *Determinare tempus descensus in convexitate curvæ, in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones sint parallelæ, sive convergentes.*

RESOLUTIO.

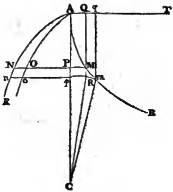


Sit ANR curva, per quam grave descendit, AP $= x$, PN $= y$, erit Nn $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit celeritas in P acquisita $= v$, erit ut in probl. præced. (§. 353), si elementum temporis fuerit dt, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : v$.

In hypothesi *Galilæana* $v = \sqrt{x}$ (§.87. 89). Ergo $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$. Quare si ex æquatione ad curvam descensus substituatur, ut ibidem, valor ipsius dy^2; prodibit æquatio ad curvam temporis.

Sit ANR parabola; erit (§.21 *Analys. infinit.*).

$adx =$



$$adx = 2ydy$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$dy^2 = a^2dx^2 : 4y^2$$
$$= a^2dx^2 : 4ax$$

Quare

$$dt = \sqrt{}(dx^2 + \frac{a^2dx^2}{4ax}) : \sqrt{}x$$
$$= \frac{dx\sqrt{}(4ax + a^2)}{\sqrt{}4ax\sqrt{}x}$$
$$= \frac{dx\sqrt{}(4ax + a^2)}{2\sqrt{}ax^2} = \frac{dx\sqrt{}(ax + \frac{1}{4}a^2)}{x\sqrt{}a}$$
$$t = \int dx\sqrt{}(ax + \tfrac{1}{4}a^2) : x\sqrt{}a$$

Quare ſi hic valor ſumitur pro ſpatio curvilineo per $\sqrt{}a$ diviſo; erit ſemiordinata curvæ, a cujus quadratura conſtructio curvæ temporis pendet, $\sqrt{}(ax + \frac{1}{4}a^2) : x$. Eſt vero $\sqrt{}(ax + \frac{1}{4}a^2)$ ſemiordinata parabolæ, cujus parameter $= a$, ſi abſciſſæ a foco, cujus diſtantia a vertice $= \frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analyſ. finit.*) computentur. Quare curvæ quadrandæ vertex eſt in foco parabolæ & aſſumta parametro a pro unitate, ſemiordinata curvæ, a cujus quadratura conſtructio curvæ temporis pendet, eſt quarta proportionalis ad parabolæ abſciſſam a foco computatam, ſemiordinatam & parametrum. Sit ſemiordinata hujus curvæ $= v$; erit

$$v = a\sqrt{}(4ax + a^2) : 2x$$

$$vx = \tfrac{1}{2}a\sqrt{}(4ax + a^2)$$

$$v^2x^2 = a^3x + \tfrac{1}{4}a^4$$

Eſt igitur curva tertii generis (§. 382 *Analyſ. finit.*), ſed facillimæ, quemadmodum apparet, conſtructionis.

Quodſi conſtructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= \sqrt{}(dz^2 + dy^2)$, abſciſſa ſcilicet exiſtente z, ſemiordinata y; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$dz^2 = \frac{4axdx^2}{4ax^2} \qquad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax^2}$$
$$= dx^2 : x \qquad = adx^2 : 4x^2$$

$$dz = x^{-1:2}dx \qquad dy = \frac{dx\sqrt{}a}{2x}$$

$$z = 2x^{1:2} \qquad y = \int\frac{dx\sqrt{}a}{2x}$$
$$= 2\sqrt{}x$$

Eſt vero $\sqrt{}x$ ſemiordinata parabolæ, cujus parameter $= 1$, (§. 392 *Analyſ. finit.*) & $\int\frac{dx}{x}$ ſpatium hyperbolicum aſymptoticum, cujus latus potentiæ $= 1$ (§. 118 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis conſtructio, conſtruetur, ſi abſciſſæ fiant ſemiordinatis parabolæ duplis, ſemiordinatæ autem ſpatiis hyperbolicis dimidiis per $\sqrt{}a$ diviſis æquales, axe parabolæ exiſtente ſimul aſymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempus deſcenſus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit cyclois & diameter circuli genitoris $= 1$, erit Nn
$= dx$

$= dx : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analys. infinit.*), ideoque $dt = dx : x$. Pendet ideo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§.120 *Analys. infinit.*). Et quoniam $t = \int dx : x$, sed $\int dx : x$ logarithmus ipsius x sumtus in logarithmica, cujus subtangens $= 1$ (§. 243 *Analys. infin.*); tempus descensus per convexitatem cycloidis etiam per logarithmos determinari potest.

Definitio 40.

355. *Curva brachystochrona* est, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam descendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *curva celerrimi descensus*.

Scholion.

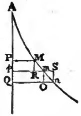
356. *Problema hoc proposuit* Joannes Bernoulli. *Analysi suppressa cycloidem esse monuerunt* Leibnitius (a) & Hospitalius (b). *Solutionem integram exhibuit* Jacobus Bernoulli (c), *methodo synthetica ex natura descensus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam cycloidi convenire postea ostendit.* Joannes *vero* (d) *ex fundamentis dioptricis id solvit, propterea quod advertit eam eandem esse cum curvatura radii per medium non uniformiter densum propagati. Equidem solutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus descensus per arculum* Mm *infinite parvum sit minimum, hoc vero sit* $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$ *in hypothesi* Galilæana (§. 354); *non alia re opus esse videbatur, quam ut ejus differentiale ponatur nihilo æquale* (§. 63 Analys. Infinit.). *Enimvero tentanti apparebit, sic nos delabi ad æquationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam* Joannis Bernoulli *sine supposita identitate* Brachystochronæ *cum curvatura radii per medium non uniformiter densum propagati.*

Problema 52.

357. *Invenire curvam brachystochronam, sive celerrimi descensus.*

(a) In Actis Erudit. An. 1697. pag. 203.
(b) Ibid. pag. 217.
(c) Ibid. pag. 212.
(d) Ibid. pag. 207. & seqq.

Resolutio.



Sint semiordinatæ PM, pm & Qn infinite propinquæ, & Pp $=$ pQ; erunt arcus Mm & mn infinite parvi, & demissis perpendicularibus MR & mO, erectaque perpendiculari nS ipsi pm continuatæ in S occurente, erit MR $=$ mO $=$ nS & RS respectu arcus Mn constans.

Sit jam AP $= x$, PM $= y$; erit Pp $=$ pQ $=$ MR $=$ nS $= dx$, mR $= dy$ & Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit RS $= b$; erit mS $=$ On $= b - dy$, ideoque mn $= \sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}$.

Quoniam motus per Mm est æquabilis, erit toto tempusculo descensus celeritas constans, nempe ea, quæ descensu per altitudinem AP acquisita. Ex eadem ratione celeritas in descensu per arculum mn constans est, nempe ea, quæ descensu per altitudinem Ap acquisita. Sit prior $= c$, posterior $=$ C, erit tempus descensus per Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : c$ & tempus per mn $= \sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)} : C$ (§. 39), consequenter tempus descensus per Mm + mn $= dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}}{C}$. Quoniam tempusculum minimum est, & dx constans, dy vero variabilis, erit (§. 63 *Analys. infinit.*).

$$ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}} = 0$$

hoc est

$$\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}}$$

sive

five

$$\frac{mR}{c.Mm} = \frac{mS}{C.mn}$$

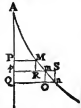
$$C.mn.mR = c.Mm.mS$$

ideoque

$$Mm:mn = C.mR:c.mS$$

Jam in hypothesi *Galilæana* $C = \sqrt{Ap}$ & $c = \sqrt{AP}$ (§. 87. 89).

Quare $Mm : mn = mR.\sqrt{Ap} : mS.\sqrt{AP}$.



Quæ est proprietas curvæ brachystochronæ a *Jacobo Bernoulli* alia via eruta.

Quodsi fiat $Mm = mn$; erit $C.mR = c.mS$, ideoque

$$c : C = mR : mS$$
$$\& \; c : mR = C : mS$$

hoc est, elementa semiordinatarum mR & mS sive nO ut celeritates acquisitæ; seu ad has celeritates in ratione constante: id quod est fundamentum solutionis *Joannis Bernoulli* ex dioptricis principiis ab ipso derivatum.

Quodsi jam arcus $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sumatur constans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquisita $= v$ & ratio constans ipsius dy ad eandem $= Mm : a$, erit

$$dy : v = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : a$$

$$ady = v\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$a^2dy^2 = v^2dx^2 + v^2dy^2$$

$$a^2dy^2 - v^2dy^2 = v^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{v^2dx^2}{a^2 - v^2}$$

$$dy = \frac{vdx}{\sqrt{(a^2 - v^2)}}$$

Formula hæc generalis est & in omni hypothesi gravitatis, etiam utcunque variabilis, obtinet. Quodsi jam substituatur valor ipsius v ex data gravitatis hypothesi, prodibit formula specialis.

Sit itaque in hypothesi gravitatis constantis

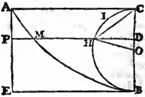
$$v^2 = ax, \text{ ideoque } v = \sqrt{ax}.$$

erit
$$dy = \frac{dx\sqrt{ax}}{\sqrt{(a^2 - ax)}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}.$$

Est vero $xdx : \sqrt{(ax - x^2)}$ differentia inter $adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ & $(adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - x^2)}$. Ergo

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \frac{(adx - 2xdx)}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$y = \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \int \frac{(adx - 2xdx)}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$$
$$= \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \sqrt{(ax - x^2)}.$$



Est vero $\sqrt{(ax - x^2)}$ semiordinata circuli DH diametro $CB = a$ descripti (§. 377 *Analys. finit.*) & $\int(adx : 2\sqrt{(ax - x^2)})$ arcus CH (§. 157 *Analys. infin.*). Quamobrem $y =$ arcui $CH - DH = PM$. Est vero in cycloide $MH =$ arcui BH (§. 575 *Analys. infin.*) & $AC = PM + MH + HD =$ arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analys. finit.*). Ergo in eadem arc. $CH = PM + HD$, consequenter PM est æqualis differentiæ inter arcum CH & ejus sinum HD.

Curva

Curva igitur celerrimi descensus sive brachystochrona est cyclois, ideoque eadem cum tautochrona (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in cycloide PM = arc. CH — HD (§. 357); si utrumque æquationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium = $\frac{1}{2}$OC, prodibit.

$\frac{1}{2}$OC . PM = $\frac{1}{2}$OC . arc. CH — $\frac{1}{2}$OC . HD
$\frac{1}{2}$OC . arc. CH = Sect. COH (§. 435 *Geom.*)
$\frac{1}{2}$OC . HD = △COH (§. 392 *Geom.*)

$\frac{1}{2}$OC . PM = Sect. COH — △COH
= segmento HIC (§. 436 *Geom.*).

Est ideo cyclois externa segmentorum circularium repræsentatrix.

SCHOLION 1.

359. *Elegantem hanc cycloidis proprietatem, etsi ad mechanicam non spectet, hic tamen annotari consultum fuit, ubi ex demonstratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus* HC = adx : 2√(ax — x²) (§. 157 Analys. infin.), *qui in* $\frac{1}{2}$CO = $\frac{1}{4}$a *ductus producit elementum sectoris* = a²dx : 8√(ax — x²) (§. 435 Geom.). *Quodsi porro* DH *altitudinem* △COH = √(ax — x²) *in basin ejus dimidiam* $\frac{1}{2}$CO = $\frac{1}{4}$a *ducas, prodibit area* △COH = $\frac{1}{4}$a√(ax — x²) (§. 392 Geom.), *cujus ideo elementum* = (a²dx — 2axdx) : 8√(ax — x²). *Quare si hoc elementum trianguli ab elemento sectoris auferas, relinquetur elementum segmenti* HIC = axdx : 4√(ax — x²) (§. 436 Geom.). *Est vero elementum ipsius* PM = xdx : √(ax — x²) (§. 357). *Quodsi ergo idem in* $\frac{1}{4}$a *seu* $\frac{1}{2}$CO *ducas prodibit* axdx : 4√(ax — x²) *elementum segmenti modo repertum, consequenter segmentum* = $\frac{1}{4}$a∫(xdx : √(ax — x²)) = $\frac{1}{2}$CO . PM.

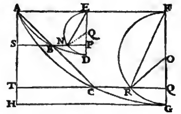
SCHOLION 2.

360. *Quodsi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime descendere debet, cyclois describenda est per duo puncta data. Quamobrem ut problema ad praxin transferri possit, ostendendum adhuc erit, quomodo cyclois per data duo puncta describatur.*

PROBLEMA 58.

361. *Describere cycloidem per data duo puncta* A & C *transeuntem*.

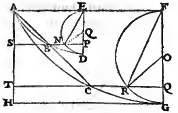
RESOLUTIO.



1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Describatur cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B secet.
3. Fiat deinde AB : AC = ED : FG, erit FG diameter circuli genitoris cycloidis per puncta A & C transeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG describi potest (§. 573 *Analys. finit.*).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonstrandum, esse AB : AC = ED : FG, quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Et quoniam HA, DE & GF perpendiculares ad AF *per constr.* erunt quoque eædem inter se parallelæ (§. *cit. Geom.*). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 *Geom.*), consequenter (§. 268 *Geom.*) AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ, ob AS = EP & AT = FQ (§. 168 *Arith.*). Sed SB = arc. EN — PN & TC = arc. FR — QR (§. 357). Ergo EP : FQ = arc. EN — PN : arc. FR — QR (§. 167 *Arith.*), consequenter DE . EP : FG . FQ = segm. EN : segm. FR (§. 185 *Arith.*),



quia scilicet $\frac{1}{4}$DE (arc.EN—PN) = segm. EN & $\frac{1}{4}$FG (arc.FR—QR) = segm. FR (§. 358.). Est vero DE : EN = EN : EP & FG : FR = FR : FQ (§. 330 *Geom.*), ideoque DE . EP = EN^2 & FG . FQ = FR^2 (§. 377 *Geom.*), consequenter $EN^2 : FR^2$ = segm.EN : segm.FR (§. 167 *Arith.*). Sunt itaque segmenta EN & FR similia (§. 406 *Geom.*), & hinc etiam arcus cognomines similes sunt, consequenter EP : FQ = ED : FG (§. 12 *Trigon.*). Quare cum sit AB : AC = EP : FQ *per demonstrata*; erit etiam AB : AC = ED : FG (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

Aliter.

Potest idem multo brevius ex principiis nostris similitudinis ostendi, alibi propositis (a); scilicet cum omnes cycloides sint inter se similes, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC sunt chordæ arcuum cycloidicorum eandem basin AF sub eodem angulo secantes, ideoque eodem modo determinatæ, & diametri circulorum genitorum sunt rectæ ex medio basium normaliter erectæ, consequenter itidem eodem modo determinatæ. Patet ergo esse diametros circulorum genitorum ED & FG ipsis AB & AC proportionales. *Q.e.d.*

(a) In Actis Erudit. A. 1715. pag. 213. & seqq.

Scholion 1.

362. *Patet hinc præstantia principiorum nostrorum similitudinis, ob quam merentur, quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipsis aditum aperuimus. Sane si quis analysin similitudinis invenire vellet, ex istis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero analysin, quæ ad similitudinem spectant, multo facilius reperirentur, quam per analysin magnitudinum, qua nunc sola utimur in Geometria.*

Scholion 2.

363. *Supposuimus in demonstratione, segmenta circulorum similia esse in ratione duplicata chordarum, nempe* $EN^2 : FR^2$ = segm. EN : segm. FR *vi principiorum Geometriæ, ex quibus id facile colligitur. Quodsi quis non videat, quomodo idem inde inferatur, demonstrationem hic subjicere licet per modum lemmatis & quidem multo universalius.*

Lemma.

364. *Sectores similes & segmenta similia circuli habent rationem duplicatam radiorum, subtensarum & ipsorum arcuum: imo segmenta similia curvarum similium habent rationem duplicatam subtensarum & ipsorum arcuum, aliarumque linearum quarumcunque eodem modo determinatarum.*

Demonstratio.

Sector (*Vid. Fig. ut sup.*) FOR æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus FR, altitudo radius FO, & sector ENQ æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus EN, altitudo radius EQ (§. 415 *Geom.*). Est vero sector FOR similis sectori ENQ *per hypoth.* quare cum sectores per rationem arcuum ad radios discerni possint, erunt arcus FR & EN radiis suis FO & EQ proportionales (§. 24 *Arith.*), consequenter triangula, quibus secto-

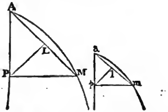
res

res æquales sunt, inter se similia sunt (§.183 *Geom.*). Sunt igitur sectores in ratione duplicata radiorum & arcuum (§. 398 *Geom.*). *Quod erat nnum.*

Quoniam arcus FR & EN similes sunt, cum alias segmenta per eorum ad peripheriam rationem discerni possent, contra hypothesin (§. 24 *Arith.*), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines sunt æquales (§.141 *Geom.*), consequenter cum utrobique crura sibi invicem sit æqualia (§. 40 *Geom.*), ipsa triangula similia sunt (§. 183 *Geom.*), ideoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 *Geom.*). Est igitur sector FRO : sect.EQN $=$ △ FRO : △ ENQ (§. 167 *Arith.*), consequenter sect. FRO $-$ △ FRO : sect. EQN $-$ △ ENQ $=$ sect.FRO : sect. EQN(§.189 *Arith.*). Ergo cum sect. FRO $-$ △ FRO $=$ segmento FR, & sect. EQN $-$ △ ENQ $=$ segmento EN, quod per se patet, segm. FR : segm. EN $=$ sect FRO : sect. EQN (§. 168 *Arith.*). Sunt vero sectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonstr.* Ergo & segmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum sunt (§. 167 *Arith.*). *Quod erat secundum.*

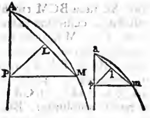
Arcus FR & EN sunt similes *per hypoth.* Ergo eorum sinus(§.12 *Trigon.*), consequenter & sinuum duplæ (§. 2 *Trigon.*) chordæ sunt arcubus proportionales (§. 178 *Arith.*). Sunt vero sectores atque segmenta in ratione duplicata arcuum *per demonstr.* Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167. 260 *Arith.*).

Idem vero multo universalis de quibuscunque curvarum similium segmentis similibus demonstratur.



Si curvæ fuerint similes, rectæ constantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter se rationem habent, cum alias per eam distingui possent (§. 24 *Arith.*). Quare si porro segmenta similia esse debent, necesse est ut abscissæ AP & *ap* ad rectas illas constantes *a* & *b* utrobique in eadem sint ratione (§. *cit.*), consequenter AP : *ap* $= a : b$. Quare si elementum abscissæ AP sit dx; elementum ipsius *ap* erit $bdx : a$. Et quoniam semiordinatæ PM & *pm*, chordæ AM & *am*, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit AM : *am* $=$ arc. AM : arc. *am* $=$ PM : *pm* $=$ AP : *ap* $= a : b$ (§. 120 *Geom.*).

Quare si PM $= y$; erit *pm* $= by : a$. Est vero elementum cuvæ AMP $= ydx$, alterius *amp* $= b^2 ydx : a^2$ (§. 98 *Analys. infinit.*), ideoque curvilineum AMP : *amp* $= \int ydx : \frac{b^2}{a^2} \int ydx = a^2 : b^2 =$ cord. AM^2 : cord. *am*^{2} $=$ arc. AM^2 . arc. *am*^{2} $=$ PM^2 : *pn*^{2} $=$ AP^2 : *ap*^{2} (§. 260 *Arith.*). Porro quia AP : PM $=$ *ap* : *pn* *per demonstr.* & anguli ad P & *p* recti *per constract.* △ APM ∽ △ *apm* (§. 183 *Geom.*), consequenter △ APM : △ *apn* $=$ AM^2 : *am*^{2} (§. 398 *Geom.*). Cum itaque sit curvilin. APM : curvilin. *apn*

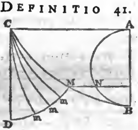


$= \triangle$ APM : $\triangle$ *apm* (§. 167 *Arith.*); erit ſegment. AM : ſegment. *am* $= \triangle$ APM : $\triangle$ *apm* (§. 189 *Arithm.*) $=$ $AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP^2 : ap^2$ $=$ arc. AM^2 : arc.am^2 (§.167 *Arith.*), conſequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti ſi ex P & *p* demittantur in AM & *am* perpendicula PL & *pl*, rectarum PL & *pl*, *per demonſtr. Quod erat tertium.*

SCHOLION.

365. *Qui ad demonſtrationem partis ultimæ lemmatis præſentis attendit, is fœcunditatem & utilitatem principiorum noſtrorum ſimilitudinis abunde perſpiciet: quæ in philoſophia prima tanquam ſede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus* (a).

DEFINITIO 41.



366. *Curva ſynchrona eſt*, ad cujus ſingula puncta D, *m*, M eodem tempore minimo grave pervenit.

SCHOLION.

367. *Curvam hanc primus invenit* Joannes Bernoulli (b). *Ex hactenus autem traditis mira facilitate eam deducere licet.*

PROBLEMA 59.

368. *Conſtruere curvam ſynchronam* (*Vid.Fig.§.366*) DmM, *data altitudine perpendiculari* CD, *per quam grave dato tempore deſcendit, quo ad ſingula puncta ſynchronæ pervenit.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribantur cycloides quotcunque CM, C*m* &c. commune initium in C habentes (§.573 *Analyſ. finit.*).
2. Erigatur in communi initio C ad baſin CA perpendicularis CD, quæ ſit altitudini datæ æqualis, per quam grave dato tempore deſcendit, ſeu, quod perinde eſt, per quam datur tempus, quo grave ad ſingula puncta D, *m*, M ſychronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur baſi AC parallela NM ſecans cycloidem in M: erit punctum M in ſynchrona.

Eodem modo in cycloidibus ceteris C*m* determinantur puncta in ſynchrona ope circulorum genitorum ipſis reſpondentium.

DEMONSTRATIO.

AB : *arc.* AN $=$ *arc.* AN : CD *per conſtr.*

$AN = \sqrt{AB} . \sqrt{CD}$

$AN . \sqrt{AB} = AB . \sqrt{CD}$

$\frac{AN . \sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}.$

Eſt vero AN . $\sqrt{AB}$: AB tempus deſcenſus per arcum cycloidis CM (§.353)

(a) Ontolog. §. 225. & ſ. 55.

(a) Vid. Acta Erudit. An. 1697.

(§. 353) & $\sqrt{CD}$ tempus descensus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D descendit. Quoniam itaque eodem modo ostenditur, quod ad quodvis punctum *m* eodem tempore perveniat, quo per CD descendit; curva D*m*M est synchrona (§. 366).

DEFINITIO 42.

369. *Curva æquilibrationis dicitur*, in qua existens pondus vel sacoma semper æquilibrium facit cum ponte sublicio circa axem convertibili.

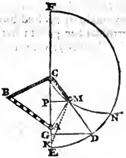
SCHOLION.

370. *Problema hoc solverunt* (a) Marchio Hospitalius & Jacobus Bernoulli *diversa ratione*. Joannes Bernoulli (b) *identitatem curvæ æquilibrationis cum cycloide, descripta ex circumvolutione rotæ super rota æquali, demonstravit, & problema generalius per communem Geometriam solvit.*

PROBLEMA 60.

371. ***Invenire curvam æquilibrationis.***

RESOLUTIO.



Sit pons sublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem in A versatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera M sacoma sustinet. Cum potentiæ laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipolleant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (§. 241. 280); si CA exponit pondus pontis absolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad descensum sollicitetur juxta directionem CM & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; si CM consideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet potentiæ ut BC, integrum pondus M erit ut CK (§§. *cit.*). Quare si sit quædam recta *b* ut pondus absolutum M; erit CK : CM $= b$: BC.

Sit jam CP $= x$, PM $= y$, BC + CM $= a$; erit CM $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$ & hinc BC $= a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Est vero subnormalis PK $= ydy : dx$ (§. 35 *Analys. infinit.*) & hinc CK $=$ CP + PK $= x + ydy : dx = (xdx + ydy) : dx$. Quare cum sit

CK : CM $= b$: BC *per demonstr.*

erit

$$\frac{xdx + ydy}{dx} : \sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$xdx + ydy : dx\sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$bdx\sqrt{(x^2 + y^2)} = axdx + aydy - xdx\sqrt{(x^2 + y^2)} - ydy\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

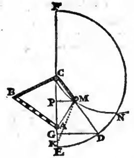
$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - xdx - ydy$$

$$bx = a\sqrt{(x^2 + y^2)} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$bx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = a\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

quæ est æquatio ad curvam æquilibrationis, cui, si libuerit, etiam quantitas quædam constans addi, vel ab eadem

(b) In Actis Erudit. An. 1695. pag. 56. & 65.
(a) In Actis Erudit. An. 1695. pag. 60.



eadem demi poteſt (§. 95 *Analyſ. infinit.*).

Ut curva hæc conſtruatur radio CD $= a$ deſcribatur ſemicirculus FDE & ducatur DG ad FE normalis. Fiat CG $= z$, erit GD $= \sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 417 *Geom.*) & (§. 268 *Geom.*).

$$CG : CD = CP : CM$$
$$z : a = x :$$

Eſt itaque $\frac{z . CM}{a} = x$

Porro (§. *cit.*) $CD : DG = CM : PM$
$$a : \sqrt{(a^2 - z^2)} = CM : y$$
$$\frac{CM . \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} = y$$

Ergo $\frac{1}{2}x^2 = z^2 . CM^2 : 2a^2$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = (a^2 - z^2) . CM^2 : 2a^2$$

Quodſi hi valores in æquatione ad curvam ſubſtituantur, prodibit.

$$a . CM = \frac{bz . CM}{a} + \frac{z^2 . CM^2}{2a^2} + \frac{a^2 . CM^2 - z^2 . CM^2}{2a^2}$$
$$= \frac{bz . CM}{a} + \tfrac{1}{2}CM^2$$
$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$
$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facile determinatur, cum non alia re opus ſit, quam ut ad radium circuli CD ſeu longitudinem funis BC + CM, duplum rectæ illius, quæ pondus abſolutum ſacomatis exponit, & rectam CG pro lubitu aſſumendam quæratur tertia proportionalis, ac ex diametro circuli FE auferatur.

Si ſit $a = b$, erit $CM = 2a - 2z = 2GE$: qui eſt caſus omnium ſimpliciſſimus.

Quando CM degenerat in CN, hoc eſt, quando fit a, curva ſemicirculum in N, ſecat, tumque eſt

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$
$$o = a - 2bz : a$$
$$\frac{a^2}{2b} = z$$

Patet ideo, CG eſſe tertiam proportionalem ad $2b$ & a, ſi curva peripheriam circuli ſecat.

Quoniam ſubtangens $= ydx : dy$ (§. 20 *Analyſ. infinit.*) & vi ſuperiorum.

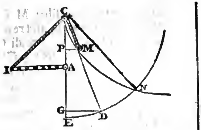
$$dx = \frac{aydy - ydy\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b + x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax}$$
$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b + x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax}$$

Quare ſi $CM = \sqrt{(x^2 + y^2)} = a$

erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - ay^2}{(b + x)a - ax} = o$

Ergo ubi curva peripheriam circuli ſecat, ſubtangens evaneſcit, ideoque ſemiordinata eam tangit, conſequenter N eſt punctum infimum, ſicque in noſtro caſu mechanico arcus CN ſufficit.

Quodſi



Quodsi in situ pontis horizontalis AI longitudo funis $IC = CE = CN = a$ & praeterea $b = a$, vel $b > a$; tota curvae portio CMN sufficit; si vero $CI < CN$, & in situ horizontali pondus jam fuerit in M, satisfacit portio MN, quoniam tum CM est differentia inter CN & CI.

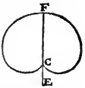
Si sit $CI = c$, reliqua sint ut ante, erit

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a} = a - c$$
$$a + c = \frac{2bz}{a}$$
$$\frac{a^2 + ac}{2b} = z$$

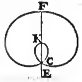
Punctum ideo M determinatur, si fiat $CG = (a^2 + ac) : 2b$, quae est quarta proportionalis ad $2b$, a & $a + c$, hoc est, ad duplam lineam, quae pondus M exprimit, radium circuli CE seu funis integri longitudinem ob $IC + CM = CE$ & compositam ex radio & portione funis IC.

Sit $CM = 0$
erit $2a - 2bz : a = 0$
$$a^2 - bz = 0$$
$$a^2 : b = z$$

Habemus itaque $b : a = a : z$. Quare si $b = a$; erit $a = z$, ideoque punctum D cadit in E, consequenter diameter FE curvam in centro C tangit.



Si $b > a$, etiam $a > z$ (§.149 *Arith.*), recta igitur CD definiens punctum curvae C adhuc in peripheriam EN cadit, consequenter curva ultra centrum continuari potest, ideoque in centro C axem FE secat.



Quando itaque CD coincidit in E, erit $z = a$, ideoque cum sit

$$x = \frac{z . CM}{a}$$
$$= z\sqrt{(x^2 + y^2)} : a$$
$$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$x^2 = x^2 + y^2$$
$$y = 0$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem secat in K. Quare cum ex constructione appareat, ab altera parte describi posse partem similem, curva in centro C nodum habet.

Si in aequatione ad curvam

$$a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + bxy^2 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{4}y^4$$

fiat $y = 0$

erit
$$a^2x^2 = b^2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + bx^3$$
$$a^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + bx$$
$$a = b + \tfrac{1}{2}x$$
$$2a = 2b + x$$

Quando itaque $b > a$; erit

$$-x = 2b - 2a$$

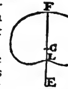
Unde intelligitur, punctum K a centro distare intervallo $2b - 2a$.

Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b.$$

Ex

Ex quo apparet, curvam secare axem infra centrum C in L, ita ut CL sit $2a - 2b$.



Quodsi in æquatione ad curvam valor ipsius x sumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit distantia puncti F a centro C, ubi axem secat. Nimirum cum ob $y = 0$ sit

$$a^2 = b^2 + bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

erit ob valorem ipsius x negativum

$$a^2 = b^2 - bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$a = \tfrac{1}{2}x - b$$

$$2a + 2b = x$$

$$= CF$$

Curva igitur in omni casu in se redit.

Quodsi maxima curvæ latitudo determinanda, cum sit

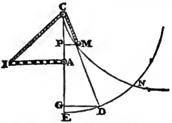
$$\frac{aydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - ydy = bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

erit ob $dy = 0$ (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0$$

$$(b + x)\sqrt{x^2 + y^2}) = ax$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{ax}{b + x} = CM$$



Ut igitur CM in casu maximi inveniri possit, valor ejus, quem supra reperimus $= 2a - 2bz : a$, exprimatur etiam hic per z, ita ut pro x substituatur valor ipsius per z expressus. Est vero juxta superiora $CM = ax : z$. Quare cum hic sit $CM = ax : (b + x)$; erit

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

$$CM = \frac{ax}{z} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \tfrac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

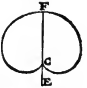
$$\left.\begin{matrix} z - \frac{a^2}{4b} \\ \frac{a^2}{4b} - z \end{matrix}\right\} = \frac{a}{4b}\sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$$z = \frac{a^2 \mp a\sqrt{(a^2 + 8b^2)}}{4b}$$

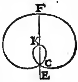
Quodsi $a = b$, erit $z = \frac{a^2 \mp a\sqrt{(a^2 + 8a^2)}}{4a}$

$$= \tfrac{1}{4}a \mp \tfrac{3}{4}a$$

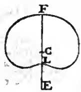
Quando in hoc casu $z = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{4}a = a$, cum sit $a = CE$, curva axem in centro tangit juxta superiora. Ergo in casu maximi satisfacit radix falsa, nempe $z = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{3}{4}a = -\tfrac{1}{2}a$: quod indicio est, valorem ipsius z sumi debere ex altera parte, nempe versus F in recta CF.



Quan-



Quando $b > a$, curva KCF duplicem habet maximam semiordinatam, alteram nempe infra centrum, alteram supra idem, ideoque radix utraque servit, affirmativa infra centrum, negativa supra idem.

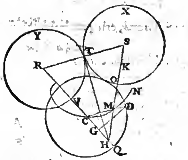


In casu denique tertio, ubi $a < b$, radix positiva est major radio. Sed cum $z = CG$ radio CE major fieri nequeat, *vi construct.* radix negativa hic itidem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum versus F.

SCHOLION.

372. *Illud hic notatu dignum est, quod pro diversa relatione quantitatum constantium* a & b, *qua aquationem ingrediuntur, curva ductus admodum variet, ita ut oculorum judicio pro curvis non habeantur, qua per eandem aquationem definiuntur.*

THEOREMA 51.



373. *Si circulus* X *super alio æquali* Y *rotetur, ita ut punctum rotationis vel sit in ipsa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis; curva hoc puncto descripta erit curva æquilibrationis.*

DEMONSTRATIO.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione describitur, esse curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit, & recta SM, in qua est punctum describens M, producatur, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, mensuræ angulorum R & S (§.57 *Geom.*), æquales sunt per genesin curvæ CMN; erit RH = HS (§.253 *Geom.*). Fiat RC = SM & ex centro C radio CD = RV = SO describatur circulus, & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in constructione curvæ æquilibrationis fecimus (§.371). Fiat porro ut ibidem $RV = OS = CD = RT = TS = a$, $SM = RC = b$, $CG = z$. Quoniam RH = HS *per demonstr.* & RC = SM *per constr.* erit etiam CH = MH (§.91 *Arith.*), ideoque HC : HM = HR : HS, consequenter angulus GCD = HRT (§.183 *Geom.*). Quare cum porro ob RT = TS & HR = HS angulus ad T rectus sit (§.179. 147 *Geom.*), & ad G itidem rectus *per constr.* erit (§.267 *Geom.*).

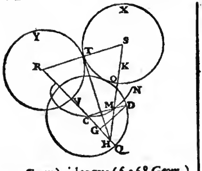
$$CG : CD = RT : RH$$

$$z : a = a :$$

Est itaque $RH = a^2 : z$, ideoque $CH = RH - RC = \frac{a^2}{z} - b$.

Porro ob ang. HCD = ang. HRS *per demonstrata*; erit CM ipsi RS parallela

(§.255



(§. 255 *Geom.*), ideoque (§. 268 *Geom.*).

$$HR : RS = HC : CM$$

$$\frac{a^2}{2} : 2a = \frac{a^2}{2} - b : CM$$

sive $a^2 : 2a = a^2 - bz : CM$

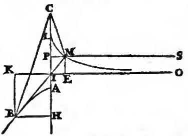
Ergo $CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2}$

$$= 2a - \frac{2bz}{a}$$

Eſt itaque punctum M in curva æquilibrationis, conſequenter curva rotatione circuli X ſuper circulo Y puncto M deſcripta curva æquilibrationis (§. 371).

Idem eodem modo oſtenditur in iis caſibus, ubi punctum deſcribens O fuerit in peripheria, vel punctum deſcribens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA 61.



374. ***Data curva* AB *invenire curvam aliam* LM, *ſuper qua in quocunque puncto pondus* M *datum ſit in æquilibrio cum pondere alio* B *dato*.**

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos ſecans. Quoniam CH eſt linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea horizontalis (§. 210). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata conſtituuntur, quæ dicantur B & M; erit I centrum gravitatis ponderum conſtans commune (§. 124). Quare B : M = EI : IK (§. 144). Eſt vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (§. 156 *Geom.*), ME : KB = EI : IK (§. 267 *Geom.*). Quare B : M = ME : KB (§. 167 *Arith.*). Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe MP & BH; erit EM = IP & KB = IH (§. 226 *Geom.*), ideoque B : M = IP : IH (§. 167 *Arith.*). Quare ſi per hanc analogiam reperiatur recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C interſecetur; erit in M punctum curvæ æquilibrationis quæſitum.

Quodſi æquatio ad curvam AB detur, facile reperiri poteſt æquatio ad curvam æquilibrationis per communes Algebræ regulas.

CAPUT

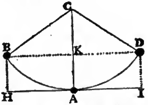
CAPUT IX.

De Motu Pendulorum.

DEFINITIO 43.

376. **P***Endulum* eſt grave quodlibet, ita ſuſpenſum, ut circa punctum aliquod vi gravitatis aſcenſus & deſcenſus reciprocos continuare poſſit. Aſcenſus ille & deſcenſus reciprocus *Oſcillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO 44.



377. *Pendulum ſimplex* eſt quod conſtat unico pondere A inſtar puncti conſiderato, & lineæ inflexili ac gravitatis experti AC circa centrum C convertibili appenſo.

DEFINITIO 45.

378. *Pendulum compoſitum* eſt quod pluribus ponderibus conſtat, eandem diſtantiam tum inter ſe, tum a centro, circa quod oſcillationes fiunt, conſtanter ſervantibus.

DEFINITIO 46.

379. *Axis oſcillationis* eſt recta lineæ horizontali apparenti parallela, tranſiens per centrum, circa quod pendulum oſcillatur.

THEOREMA 52.

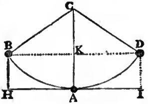
380. *Pendulum* (*Vid. Fig. §. 377*) *in* B *adductum per arcum circuli* BA *deſcendit, & ad punctum æque altum* D *per arcum æqualem aſcendit, inde denuo in* A *deſcendit ac ad* B *aſcendit, ſicque reciproce aſcenſus & deſcenſus continuat.*

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipſi parallela. Si globus A, quem inſtar puncti conſideramus, cum ſolius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra baſin, quæ eſt in puncto C. Globus igitur in hoc ſitu quieſcere nequit, ſed deſcendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH deſcendere poſſit, per arcum circuli BA deſcendit (§. 131 *Geom.*). Ubi centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus inſtruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 303), ideoque ipſum ad altitudinem æquale elevare poteſt (§. 322). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipſi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) aſcendit. Vi igitur, quam cadendo acquiſiverat, omni abſorpta per eundem arcum AD relabitur vi gravitatis aſcenſurus ex A in B & ita porro. *Q. e. d.*

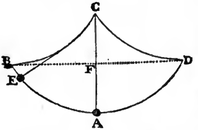
SCHOLION.

381. *Experientia theoremati non contradicit, niſi ſine fine continuatæ oſcillationes ei parum reſpondeant. Aeris enim reſiſtentia & frictio circa cen-*



trum C *partem aliquam ejus vis absumunt, quæ cadendo acquisita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præcise altitudinem elevetur globus, ex qua delapsus. Quoniam itaque ascensus continua capit decrementa, oscillatio tandem sistitur & pendulum in situ* CA, *in quo centrum gravitatis infimum occupat locum, quiescit.*

THEOREMA 54.



382. *Si pendulum simplex inter duas semicycloides* CB *&* CD *suspendatur, quarum circuli generatores habent diametrum* CF *dimidiæ longitudini fili* CA *æqualem, ita ut filum oscillantis iis circumplicetur; oscillationes omnes utcunque inæquales erunt isochronæ seu æquidiuturnæ in medio non resistente.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE semicycloidi BC circumplicetur; a centro gravitatis globi E, qui instar puncti consideratur (§.377), ex evolutione cycloidis BEAD describitur (§. 330 *Analyss. infinit.*). Sed omnes descensus & ascensus in cycloide sunt æquidiuturni (§. 311). Ergo oscillationes penduli sunt æquidiuturnæ (§.376). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

383. Quodsi longitudine penduli CA describatur circulus ex centro C, cum portio cycloidis prope verticem A eodem fere motu describatur, arcus exiguus circuli cum cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oscillationes pendulorum sunt ad sensum isochronæ, utcunque in se inæquales.

COROLLARIUM 2.

384. Quo longiora itaque sunt pendula in arcubus circuli oscillantia; eo majores oscillationes isochronæ sunt.

SCHOLION 1.

385. *Experientia non abludit. Quodsi enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oscillando excurrat; in oscillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.*

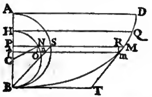
SCHOLION 2.

386. *Penduli inter duas semicycloides oscillantis tam theoria, quam praxis debetur illustri* Hugenio (a).

PROBLEMA 62.

387. *Determinare durationem oscillationis in Cycloide.*

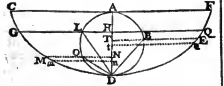
RESOLUTIO.



Sit diameter circuli genitoris seu altitudo totius Cycloidis $AB = a$; HB altitudo, ex qua descendit pendulum per arcum illius QB, $= 2r$, $HP = x$; erit $PB = 2r - x$. Sit porro tempus per $QB = t$ & super HB describatur semi-

(a) Vide Horologium Oscillatorium sive demonstrationes de motu pendulorum ad horologia adaptato geometricas.

semicirculus HNB, ducanturque PM atque *pm* infinite propinquæ ad HB perpendiculares; erit $PN = \sqrt{(2rx - xx)}$, $Pp = NO = Rm = dx$, & celeritas in P, ideoque & in M (§. 303), acquisita $= \sqrt{x}$ (§. 83), consequenter, cum infinitesima M*m* motu uniformi percurratur, tempus per $Mm = dt = Mm : \sqrt{x}$ (§. 39). Constat vero (§. 131 *Analys. infin.*) esse $Mm : mR = BS : BP$ & $AB : BS = BS : BP$ (§. 330 *Geom.*). Est itaque BS ad BP in ratione subduplicata AB ad BP (§. 216 *Arith.*), hoc est, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{BP}$, consequenter $Mm : mR = \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ (§. 167 *Arith.*). Unde $Mm = mR . \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ & $dt = dx\sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2rdx\sqrt{a} : 2r\sqrt{(2rx - x^2)}$. Est vero $rdx : \sqrt{(2xr - xx)} = Nn$ (§. 157 *Anal. infinit.*). Ergo $dt = 2\sqrt{a} . Nn : 2r$ & $\int dt = \int Nn . 2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ sive *t* tempus denotat, quo grave per arcum cycloidis BQ descendit, $\int Nn$ in semiperipheriam circuli degenerat. Quare ut 2*r* seu diameter circuli ad semiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum BQ, consequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus descensus perpendicularis per BA (§. 39. 83. 92); patet tandem (§. 168 *Arith.*) sequens



Theorema: Tempus integræ oscillationis per arcum quemcunque Cycloidis GDQ est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AD ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo consequitur, quod jam superius aliunde demonstratum (§. 311), tempus descensus per quoslibet arcus cycloidis esse æquidiuturnum, oscillationes item in omnibus arcubus cycloidis esse æquidiuturnas.

THEOREMA 54.

389. *Gravitatis actio minor est in iis Terræ regionibus, ubi oscillationes ejusdem penduli sunt tardiores; major vero, ubi eædem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oscillationum in cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), ideoque in ratione constante (§. 413 *Geom.*). Quare si oscillatio ejusdem penduli fit tardior, descensus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: si illa redditur celerior; hic quoque celerior fit necesse est. In primo igitur casu minus spatium cadendo conficit grave, quam in altero, ideoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero, consequenter gravitas minor est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum ideo experientia docuerit, oscillationes ejusdem penduli esse tardiores prope æquatorem, quam in remotioribus versus polum regionibus; gravitas corporum minor est versus æquatorem, quam versus polos.

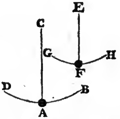
SCHOLION.

391. *Observavit hoc primus* Richerius A. 1672. *itinere in insulam* Cayennæ, *quæ ab æquatore 5 fere gradibus distat, facto, ubi pendulum Parisiense singulis minutis secundis oscillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum 8½, minuendum erat linea una cum quadrante, ut adhuc oscillationes singulis minutis secundis absolveret* (a). A. 1677. Hallejus *ad insulam* S. Helenæ *navigans reperit horologium suum ibi tardius moveri, quam Londini, sed differentiam non notavit. Similes observationes*

(a) Vid. Acta Eruditorum A. 1695. p. 30.

vationes habuere A. 1682. Varin & des Hayes, A. 1697. Couplet *filius*, & A. 1704. *Feuille* (a).

THEOREMA 55.



392. *Si duo pendula* CA & EF *in arcus similes* DAB & GFH *excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum* CA & EF.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arith.*), consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF *per hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & §. 170 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA 56.

394. *Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus a numerus oscillationum penduli unius $= b$, alterius $= mb$. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oscillationem unam conficit, $= a:b$, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, $= a:mb$ (§. 302 *Arith.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut $a:b$ ad $a:mb$, hoc est, ut amb ad ab (§. 178 *Arith.*) seu ut mb ad b (§. 181 *Arith.*). Sed ut mb ad b ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum. *Q. e. d.*

(a) Vid. *Newtonum* in Principiis lib. 3. prop. 19. p. m. 419.

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 393).

THEOREMA 57.

396. *Longitudines pendulorum intra cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus descensus per altitudinem cycloidis seu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oscillationis (§. 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167 173 *Arith.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86). Ergo etiam altitudines, hoc est, pendulorum longitudines dimidiæ, consequenter & inte-

integræ (§. 178 *Arith.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 394).

COROLLARIUM 2.

398. Tempora oscillationum in cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 63.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsita (§. 397).

E. gr. Juxta *Hugenium* (a) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsiti $= 3600 . 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{79}{200}$. lin.

PROBLEMA 64.

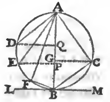
400. *Dato numero oscillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore absolvuntur, invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas & quadratum numeri oscillationum dati (§. 397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæsitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum, cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= (\sqrt{88100 . 3600 : 7929}) = \sqrt{40000} = 200$.

THEOREMA 58.

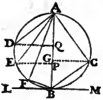


401. *Celeritas penduli in puncto infimo* B *est ad celeritatem acquisitam cadendo per* AB, *duplam penduli longitudinem, ut chorda arcus, quem describit,* CB *ad diametrum circuli* AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum CB acquisita æquatur celeritati per GB acquisitæ (§. 308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BG ad BA (§. 87). Sed BA . BC = BC : BG (§. 330 *Geom.*), ideoque BA ad BC est ratio subduplicata BA ad BG (§. 216. 159 *Arith.*). Ergo celeritas per arcum BC est ad celeritatem

(a) In Horolog. Oscill. part. 4. prop. 25. f. 152.



tem per BA acquiſitam ut chorda BC ad BA (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

402. Cum ideo ſit ut celeritas per arcum CB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, ita chorda CB ad AB, & ut celeritas per arcum FB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, ita chorda FB ad AB (§. 401); celeritates per arcus CB & FB acquiſitæ ſunt ut chordæ cognomines (§. 195 *Arith.*).

SCHOLION.

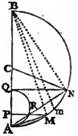
403. *Alia adhuc theoremata non inelegantia de pendulis habet* Newtonus (a), *quæ analytice facillime demonſtrantur ex ſuperioribus. Eum igitur in finem ſequens addimus.*

PROBLEMA 64.

404. *Determinare tempus oſcillationis dimidiæ per arcum exiguum in hypotheſi gravitatis uniformis, ſed maſſæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.

Sit in C centrum, circa quod pendulum oſcillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oſcillatur, ſeu oſcillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo & BNA ſemicirculus ex centro C deſcriptus; dicatur



$$CA = a,\ AQ = b,\ AP = x$$

erit $AB = 2a$, $QP = b - x$ & (§. 330 *Geom.*)

$$AB : AN = AN : AQ$$
$$2a : AN = AN : b$$
$$AB : AM = AM : AP$$
$$2a : AM = AM : x$$

ideoque

$$AM = \sqrt{2ax},\ AN = \sqrt{2ab}$$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter ſubtenſæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$ & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, conſequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1:2}dx\sqrt{2a} = -dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, maſſa $= m$. Quoniam gravitas uniformis ſeu conſtans *per hypoth.* erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP = b - x$ acquiſita, $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempuſculum dt directe ut ſpatium ſeu arculus mM & reciproce ut celeritas in m acquiſita (§. 39), conſequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per NM}}$$
$$= \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$
$$t = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

Eſt vero $-bdx : 2\sqrt{(bx - x^2)}$ elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ deſcripti, cujus ſagitta $QP = b - x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analyſ. infinit*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx - x^2)} =$ elemento arcus QR per $\frac{1}{2}AQ$ diviſo, Fiat itaque

(a) In Princip. Phil. Nat. matem. lib. 2. prop. 24. & ejus coroll. p. m. 294. & ſeqq.

$-bdx$

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit $\frac{-dx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{dz}{b}$

ideoque $dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\text{arc. } QR.\sqrt{AC}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat $QP = QA$, arcus)R degenerabit in semiperipheriam)RA, eritque t tempus dimidiæ oscillationis, hoc est, descensus per arum NA absolvitur tempore $t = \frac{RA.\sqrt{AC}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$.

Patet, QRA : AQ designare ratioiem semiperipheriæ ad diametrum, k $\sqrt{AC}$ esse ut tempus descensus perendicularis per AC seu altitudinem ongitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m, seu gravitas nassæ proportionalis, quemadmodum n hypothesi *Galilæana* (§. 115), runt

Theorema: Dimidiæ oscillationes pendulorum n arcubus exiguis circularibus ad tempus deensus perpendicularis ponderis appensi per alitudinem longitudini penduli æqualem seu circuli radium, ut semiperipheria circuli ad diameerum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus escensus perpendicularis per radium ut periheria circuli ad diametrum.

THEOREMA 59.

405. *Tempora oscillationum sunt in atione composita ex directis subduplicais longitudinum pendulorum & massaum atque reciproca subduplicata graviitum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oscillationum T & t, massæ M & m, gravitates G & g; erit

$$T = \frac{QR.\sqrt{M}.\sqrt{L}}{AQ.\sqrt{G}}$$

$$\& \ t = \frac{QRA.\sqrt{m}.\sqrt{l}}{AQ.\sqrt{g}} \ (\S.404), \text{ ideoque}$$

$$T:t = \frac{QRA.\sqrt{M}.\sqrt{L}}{AQ.\sqrt{G}} : \frac{QRA.\sqrt{m}.\sqrt{l}}{AQ.\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M}.\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m}.\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \ (\S.178.181 \ Arith.),$$

$$= \sqrt{M}.\sqrt{L}.\sqrt{g} : \sqrt{m}.\sqrt{l}.\sqrt{G}$$

(§. 178 *Arith.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 60.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum longitudines æquales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente, erit

$$T : t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

ideoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arith.*).

Et hinc $T^2G : t^2g = ML : ml$ (§. 184 *Arith.*).

Quare cum sit $L = l$ *per hypoth.* erit $T^2G : t^2g = M : m$ (§. 183 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM 2.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 3.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§. 151 *Arith.*), ideoque $G : g = t^2 : T^2$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM 4.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$, *vi demonstr. præs.* si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§. 151 *Arith.*), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM 5.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§. 285. 278 *Arith.*), hoc est, massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION 1.

412. *His principiis usus est* Newtonus (a) *in comparandis corporibus inter se quoad quantitatem materiæ in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis se semper invenisse fatetur, quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis ad cognoscendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM 6.

413. Quodsi fuerit $M = m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§. 149 *Arith.*), consequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§. 299 *Arithm.*), ideoque $T : t = \sqrt{g}.\sqrt{L} : \sqrt{G}.\sqrt{l}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum & reciproca subduplicata gravitatum.

COROLLARIUM 7.

414. Quodsi fuerit $M = m$ & $T = t$, erit $gL = Gl$ (§. *præc.*), consequenter $G : g = L : l$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM 8.

415. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $T^2G = t^2g$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = g : G$ (§. 299 *Arith.*), ideoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales; tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

(a) Vid. Princip. lib. 2. prop. 24. Cor. 7. p. m. 295.

COROLLARIUM 9.

416. Quodsi fuerit $M = m$ & $G = g$; erit $T^2l = t^2L$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = L : l$, ideoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLION 2.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, quæ sollicitat, in uno puncto concentrata concipiatur* (§. 125), *neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat, si pondera massis proportionalia sunt, ideoque æquales quantitates materiæ seu massæ æquales a gravibus eodem modo animentur; nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde in hac naturæ consentanea hypothesi valent, quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.*

THEOREMA 61.

418. *Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directa subduplicata gravitatum massas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis

æqua-

æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directa subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N : n = \sqrt{l} . \sqrt{m} . \sqrt{G} : \sqrt{L} . \sqrt{M} . \sqrt{g}$. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

419. Quodsi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l} . \sqrt{G} : \sqrt{L} . \sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM 2.

420. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION 1.

421. *Si cui libuerit, is ex analogia* $N : n = \sqrt{G} . \sqrt{l} . \sqrt{m} : \sqrt{g} . \sqrt{L} . \sqrt{M}$ *plura theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.*

SCHOLION 2.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum, ex quo pondus suspenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in praxi filo utendum est tenui & globo exiguo, sed ex materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstrata valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum, perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moveantur. Enimvero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus caput sequens.*

CAPUT X:

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO 47.

423. *Centrum oscillationis* est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

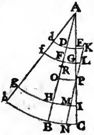
COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

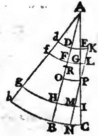
DEFINITIO 48.

425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA 61.



426. *Si plura pondera* D, F, H, B, *quorum gravitas in punctis* D, F, H, B, *concipitur collecta, in virga inflexili* AB *eandem inter se & a puncto suspensionis* A *distantiam constanter conservent & circa* A *oscillationes suas perficiat pendulum hoc*



modo compositum; prodibit distantia* OA *centri oscillationis* O *a puncto suspensionis* A, *si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur.

DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B distantiis a puncto suspensionis A*d*, A*f*, Ag, A*b* proportionales. Patet ideo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; summa ponderum in centro oscillationis O applicata arcum OP describeret (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B, quo in summam eorundem O, nisi retinaculum AB obstaret; singula per spatiola ipsi OP æqualia transferrerentur, quia motus in instanti est uniformis, ideoque celeritates spatiolis proportionales (§. 33). Quare si KN per P ipsi DB parallela ducatur, DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in instanti acquirendas, si libere descenderent. Gravitas vero cum solo nisu agat (§. 4), vis mortua est (§. 9); consequenter vires motuum acceleratrices sunt in ratione composita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in D vis ut D . EK & in F vis ut F . GL: contra vero in H accrescit vis ut H . MI & in B vis ut B . NC, seu quod perinde est, ob decrementum virium in D & F vi in P aliquid accrescit, sed incrementum in H accremento in P rursus aliquid detrahit. Cum autem sit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HA (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK.AD) : AB & (F . GL . AF) : AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H . MI . AH) : AB. Habemus ideo

$$B . NC = (D . EK . AD + F . GL . AF - H . MI . AH) : AB.$$

& hinc

$$B . AB . NC + H . MI . AH = D . EK . AD + F . GL . AF$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 38 *Anal. infin.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*), consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB,

$$B . AB . OB + H . OH . AH = D . OD . AD + F . OF . AF.$$

Denique cum sit

$$H . AH^2 = H . HA . HO + H . HA . AO$$
$$B . AB^2 = B . BA . BO + B . BA . AO$$
$$D . OA . DA = D . AD . AD + D . AD . OD$$
$$F . OA . FA = F . FA . FA + F . OF . FA.$$

Si utrin-

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.AO.HA + B.AO.BA$, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}.$$

Q. e. d.

SCHOLION I.

427. *Quod si non evidens videatur, esse* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$ & $HA^2 = HA.HO + HA.AO$, *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$ & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit* $HA = HO + OA$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA^2 = HO^2 + 2HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arith.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA.HO = (AO + OH)HO = HO.OA + HO^2$ & $HA.AO = (AO + OH)AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93 Arith.), *consequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (§. 87 Arith.). *Similiter cum sit* $AB^2 = AO^2 + 2AO.OB + OB^2$ & $AB.BO = (AO + OB)OB = AO.OB + OB^2$ & $AB.AO = (AO + OB)AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (§. 86 Arith.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)DA = AD.AD + AD.OD$ (§. 93 Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

SCHOLION 2.

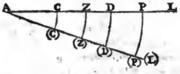
428. Joannes Bernoulli (a) *ex simplicissimis principiis mechanicis theoriam de centro oscillationis* ab Hugenio (b) *inventam* & a Jacobo Bernoulli *fratre* (c) *ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit, & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Operæ igitur pretium nos facturos existimamus, si viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA 66.

429. *Determinare centrum oscillationis in pendulo composito.*

(a) In Actis Erudit. An. 1714. pag. 257 & seqq.
(b) In Horolog. oscillat. part. 4. f. 91. & seqq.
(c) In Actis Erudit. An. 1691. pag. 317.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

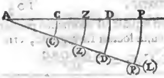


Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quotcunque C, D &c. in distantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est centrum oscillationis Z seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur a gravitate naturali G; erit pondus in C = G.C & momentum ejus G.C.AC, quod *vim agitativam penduli* appellat *Bernoullius*. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G.D.AD & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas, a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, ideoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates seu vires acceleratrices massarum sint ut celeritates, quas producunt in instanti, celeritates autem in tempusculo infinite parvo, quo per angulum infinite parvum ex AL in A(L) movetur pendulum sint ut C(C) ad P(P) (§. 33), consequenter ut AC ad AP (§. 138. 412 Geom.); erit ut AC ad AP ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius C sur-



C ſurrogandum, conſequenter gravitas in P $= \frac{AP.G}{AC}$. Quodſi maſſa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$, & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum ſit æquale momento ponderis in C, erit

$$\frac{G.P.AP^2}{AC} = C.G.AC$$

$$P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorſus modo reperitur pondus in P ſubſtituendum ponderi in D; nimirum maſſa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$; gravitas, qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$.

Eſt itaque pondus, quod in P ſubſtitui debet pro pondere, quod eſt in C, $\frac{AP.G}{AC}.\frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$, & pondus, quod pro D in P ſubſtituendum, $= \frac{AP.G}{AD}.\frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$.

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur, invenienda eſt porro gravitas communis, quæ animat uniformiter maſſarum ſeu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$; erit

$$\frac{AC^2.Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.Dx}{AP^2} \; \&c.$$
$$= \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G}{AP} \; \&c.$$

$$AC^2.Cx + AD^2.Dx + \&c. = (AC.C + AD.D + \&c.)\,AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D + \&c.)\,AP.G}{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}$$

hoc eſt, gravitas communis reperitur dividendo ponderum ſummam per ſummam maſſarum.

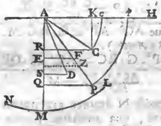
Cum ideo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia $\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)\,AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}$ ſit compoſito AL iſochronum, pendula vero ſimplicia iſochrona habeant gravitates longitudinibus proportionales (§. 414); longitudo penduli ſimplicis AZ fictitio AL iſochroni, & a gravitate naturali G animandi reperitur, ſi fiat:
$\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)\,AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.} : G = AP : AZ$

Erit enim (§. 178. 181. 183 *Arith.*) $AC.C + AD.D\;\&c. : AC^2.C + AD^2.D\,\&c. = 1 : AZ$

conſequenter

$$AZ = \frac{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}{AC.C + D.AD\,\&c.}$$

quæ eſt regula *Hugeniana* (a) in propoſitione præcedente demonſtrata; ſed in eo caſu, ubi pondera quæ pendulum componunt, ſunt in eadem recta, aut ſaltem in eodem plano, in quo eſt axis oſcillationis.



Ponamus jam pondera C, D &c. non eſſe in eadem recta ſeu in plano, in quo eſt axis oſcillationis, ſed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem

(a) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oſcillat. f. 98.

axem A oscillante disposita, ita tamen ut situm non mutent. Sit AM linea verticalis plani, & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, ideoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus *c*C, & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam, qua impellitur radius AC in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, ideoque

$$AC : CR = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Est ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$.

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et si gravitas absoluta in $P = M$, respectiva ibidem $\frac{M.PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus P*p*, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

ideoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arith.*).

$$AP^2.G.RC = AC^2.M.QP$$

$$\frac{AP^2.G.RC}{AC^2.QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam, qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.G.DS}{AD^2.QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi = T. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC.C.G = \frac{T.AP^2.G.RC}{AC^2}$$

$$C = \frac{T.AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T.M + V.N +}{T + V}$ &c.

vi antecedentium cum sit

$$T.M = \frac{G.AC^2.AP^2.G.RC}{AP^2.AC^2.QP} = \frac{C.G.RC}{QP}$$

$$\& \; V.N = \frac{D.AD^2.AP^2.G.DS}{AP^2.AD^2.QP} = \frac{D.G.DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.C + AD^2.D}{AP^2}$$

erit $\frac{T.M + V.N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2.C.G.RC + AP^2.D.G.DS}{QP.AC^2.C + QP.AD^2.D}$$

$$= \frac{(C.RC + D.DS).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}$$

Habemus ideo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

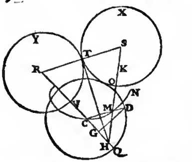
$$\frac{(C.RC + D.SD).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)PQ} : G = AP : AZ$$

$(C.RC + D.SD)AP : (C.AC^2 + D.AD^2)PQ = 1 : AZ$ (§. 178. 181. 185 *Arith.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}{(C.RC + D.SD)AP}$$

Quæ



(§.255 *Geom.*), ideoque (§.268 *Geom.*).

$$HR : RS = HC : CM$$

$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b : CM$$

sive $a^2 : 2a = a^2 - bz : CM$

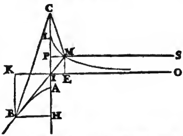
Ergo $CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2}$

$$= 2a - \frac{2bz}{a}$$

Eſt itaque punctum M in curva æquilibrationis, conſequenter curva rotatione circuli X ſuper circulo Y puncto M deſcripta curva æquilibrationis (§. 371).

Idem eodem modo oſtenditur in iis caſibus, ubi punctum deſcribens O fuerit in peripheria, vel punctum deſcribens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA 61.



374. *Data curva* AB *invenire curvam aliam* LM, *ſuper qua in quocunque puncto pondus* M *datum ſit in æquilibrio cum pondere alio* B *dato*.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos ſecans. Quoniam CH eſt linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea horizontalis (§. 210). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata conſtituuntur, quæ dicantur B & M; erit I centrum gravitatis ponderum conſtans commune (§. 124). Quare B : M = EI : IK (§. 144). Eſt vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (§. 156 *Geom.*), ME : KB = EI : IK (§. 267 *Geom.*). Quare B : M = ME : KB (§. 167 *Arith.*). Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe MP & BH; erit EM = IP & KB = IH (§. 226 *Geom.*), ideoque B : M = IP : IH (§. 167 *Arith.*). Quare ſi per hanc analogiam reperiatur recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C interſecetur; erit in M punctum curvæ æquilibrationis quæſitum.

Quodſi æquatio ad curvam AB detur, facile reperiri poteſt æquatio ad curvam æquilibrationis per communes Algebræ regulas.

CAPUT

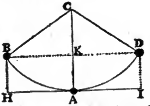
CAPUT IX.

De Motu Pendulorum.

DEFINITIO 43.

376. *Pendulum* est grave quodlibet, ita suspensum, ut circa punctum aliquod vi gravitatis ascensus & descensus reciprocos continuare possit. Ascensus ille & descensus reciprocus *Oscillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO 44.



377. *Pendulum simplex* est quod constat unico pondere A instar puncti considerato, & lineæ inflexili ac gravitatis experti AC circa centrum C convertibili appenso.

DEFINITIO 45.

378. *Pendulum compositum* est quod pluribus ponderibus constat, eandem distantiam tum inter se, tum a centro, circa quod oscillationes fiunt, constanter servantibus.

DEFINITIO 46.

379. *Axis oscillationis* est recta lineæ horizontali apparenti parallela, transiens per centrum, circa quod pendulum oscillatur.

THEOREMA 52.

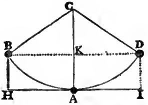
380. *Pendulum* (*Vid. Fig.* §. 377) *in* B *adductum per arcum circuli* BA *descendit, & ad punctum æque altum* D *per arcum æqualem ascendit, inde denuo in* A *descendit ac ad* B *ascendit, sicque reciprocos ascensus & descensus continuat.*

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipsi parallela. Si globus A, quem instar puncti consideramus, cum solius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra basin, quæ est in puncto C. Globus igitur in hoc situ quiescere nequit, sed descendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH descendere possit, per arcum circuli BA descendit (§. 131 *Geom.*). Ubi centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus instruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 303), ideoque ipsum ad altitudinem æquale elevare potest (§. 322). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipsi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) ascendit. Vi igitur, quam cadendo acquisiverat, omni absorpta per eundem arcum AD relabitur vi gravitatis ascensurus ex A in B & ita porro. *Q. e. d.*

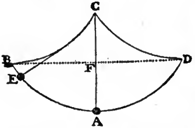
SCHOLION.

381. *Experientia theoremati non contradicit, etsi sine fine continuatæ oscillationes ei parum respondeant. Aeris enim resistentia & frictio circa centrum*



trum C *partem aliquam ejus vis abſumunt, quæ cadendo acquiſita fuerat : unde fieri nequit, ut ad eandem præciſe altitudinem elevetur globus, ex qua delapſus. Quoniam itaque aſcenſus continua capit decrementa, oſcillatio tandem ſiſtitur & pendulum in ſitu* CA, *in quo centrum gravitatis infimum occupat locum, quieſcit.*

Theorema 54.



382. *Si pendulum ſimplex inter duas ſemicycloides* CB & CD *ſuſpendatur, quarum circuli generatores habent diametrum* CF *dimidiæ longitudini fili* CA *æqualem, ita ut filum oſcillantis iis circumplicetur; oſcillationes omnes utcunque inæquales erunt iſochronæ ſeu æquidiuturnæ in medio non reſiſtente.*

Demonstratio.

Cum enim penduli filum CE ſemicycloidi BC circumplicetur; a centro gravitatis globi E, qui inſtar puncti conſideratur (§.377), ex evolutione cyclois BEAD deſcribitur (§. 330 *Analyſ. infinit.*). Sed omnes deſcenſus & aſcenſus in cycloide ſunt æquidiuturni (§. 311). Ergo oſcillationes penduli ſunt æquidiuturnæ (§.376). *Q.e.d.*

Corollarium 1.

383. Quodſi longitudine penduli CA deſcribatur circulus ex centro C, cum portio cycloidis prope verticem A eodem fere motu deſcribatur, arcus exiguus circuli cum cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oſcillationes pendulorum ſunt ad ſenſum iſochronæ, utcunque in ſe inæquales.

Corollarium 2.

384. Quo longiora itaque ſunt pendula in arcubus circuli oſcillantia; eo majores oſcillationes iſochronæ ſunt.

Scholion 1.

385. *Experientia non abludit. Quodſi enim duo fuerint pendula ejuſdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oſcillando excurrat; in oſcillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.*

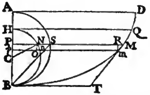
Scholion 2.

386. *Penduli inter duas ſemicycloides oſcillantis tam theoria, quam praxis debetur illuſtri* Hugenio (a).

Problema 62.

387. *Determinare durationem oſcillationis in Cycloide.*

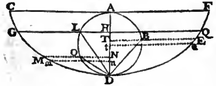
Resolutio.



Sit diameter circuli genitoris ſeu altitudo totius Cycloidis $AB = a$; HB altitudo, ex qua deſcendit pendulum per arcum illius QB, $= 2r$, $HP = x$; erit $PB = 2r - x$. Sit porro tempus per $QB = t$. & ſuper HB deſcribatur ſemi-

(a) Vide Horologium Oſcillatorium ſive demonſtrationes de motu pendulorum ad horologia adaptato geometricas.

ſemicirculus HNB, ducanturque PM atque *pm* infinite propinquæ ad HB perpendiculares; erit $PN = \sqrt{(2rx - xx)}$, $Pp = NO = Rm = dx$, & celeritas in P, ideoque & in M (§. 303), acquiſita $= \sqrt{x}$ (§. 83), conſequenter, cum infiniteſima Mm motu uniformi percurratur, tempus per $Mm = dt = Mm : \sqrt{x}$ (§. 39). Conſtat vero (§. 131 *Analyſ. infin.*) eſſe $Mm : mR = BS : BP$ & $AB : BS = BS : BP$ (§. 330 *Geom.*). Eſt itaque BS ad BP in ratione ſubduplicata AB ad BP (§. 216 *Arith.*), hoc eſt, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{BP}$, conſequenter $Mm : mR = \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ (§. 167 *Arith.*). Unde $Mm = mR . \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ & $dt = dx \sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2r dx \sqrt{a} : 2r \sqrt{(2rx - x^2)}$. Eſt vero $r dx : \sqrt{(2xr - xx)} = Nn$ (§. 157 *Anal. infinit.*). Ergo $dt = 2\sqrt{a} . Nn : 2r$ & $\int dt = \int Nn . 2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ ſive t tempus denotat, quo grave per arcum cycloidis BQ deſcendit, $\int Nn$ in ſemiperipheriam circuli degenerat. Quare ut $2r$ ſeu diameter circuli ad ſemiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum BQ, conſequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus deſcenſus perpendicularis per BA (§. 39. 83. 92); patet tandem (§. 168 *Arith.*) ſequens



Theorema: Tempus integræ oſcillationis per arcum quemcunque Cycloidis GDQ eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AD ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo conſequitur, quod jam ſuperius aliunde demonſtratum (§. 311), tempora deſcenſus per quoslibet arcus cycloidis eſſe æquidiuturnum, oſcillationes item in omnibus arcubus cycloidis eſſe æquidiuturnas.

THEOREMA 54.

389. *Gravitatis actio minor eſt in iis Terræ regionibus, ubi oſcillationes ejuſdem penduli ſunt tardiores; major vero, ubi eædem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oſcillationum in cycloide eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), ideoque in ratione conſtante (§. 413 *Geom.*): Quare ſi oſcillatio ejuſdem penduli ſit tardior, deſcenſus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: ſi illa redditur celerior; hic quoque celerior ſit neceſſe eſt. In primo igitur caſu minus ſpatium cadendo conficit grave, quam in altero, ideoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero, conſequenter gravitas minor eſt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum ideo experientia docuerit, oſcillationes ejuſdem penduli eſſe tardiores prope æquatorem, quam in remotioribus verſus polum regionibus; gravitas corporum minor eſt verſus æquatorem, quam verſus polos.

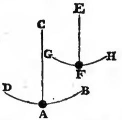
SCHOLION.

391. *Obſervavit hoc primus* Richerius A. 1672. *itinere in inſulam* Cayennæ, *quæ ab æquatore 5 fere gradibus diſtat, facto, ubi pendulum Pariſienſe ſingulis minutis ſecundis oſcillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum* $8\frac{1}{2}$, *minuendum erat, linea una cum quadrante, ut adhuc oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolveret* (a). A. 1677. Hallejus *ad inſulam* S. Helenæ *navigans reperit horologium ſuum ibi tardius moveri, quam Londini, ſed differentiam non notavit. Similes obſervationes*

(a) Vid. Acta Eruditorum A. 1695. p. 30.

vationes habuere A. 1681. Varin & des Hayes, A. 1697. Couplet *filius*, & A. 1704. *Feuille* (a).

THEOREMA 55.



392. *Si duo pendula* CA & EF *in arcus similes* DAB & GFH *excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum* CA & EF.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arith.*), consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF *per hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & §. 170 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA 56.

394. *Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus a numerus oscillationum penduli unius $= b$, alterius $= mb$. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oscillationem unam conficit, $= a:b$, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, $= a:mb$ (§. 302 *Arith.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut $a:b$ ad $a:mb$, hoc est, ut amb ad ab (§. 178 *Arith.*) seu ut mb ad b (§. 181 *Arith.*). Sed ut mb ad b ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 393).

THEOREMA 57.

396. *Longitudines pendulorum intra cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus descensus per altitudinem cycloidis seu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oscillationis (§. 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167, 173 *Arith.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86). Ergo etiam altitudines, hoc est, pendulorum longitudines dimidiæ, consequenter & inte-

(a) Vid. Newtonum in Principiis lib. 3. prop. 19. p. m. 419.

integræ (§. 178 *Arith.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 394).

COROLLARIUM 2.

398. Tempora oscillationum in cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 63.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsita (§. 397).

E. gr. Juxta *Hugenium* (a) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsiti $= 3600 . 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{129}{200}$. lin.

PROBLEMA 64.

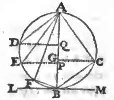
400. *Dato numero oscillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore absolvuntur, invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas & quadratum numeri oscillationum dati (§. 397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæsitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum, cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= (\sqrt{88100 . 3600 : 7929}) = \sqrt{40000} = 200$.

THEOREMA 58.

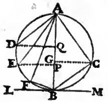


401. *Celeritas penduli in puncto infimo* B *est ad celeritatem acquisitam cadendo per* AB, *duplam penduli longitudinem, ut chorda arcus, quem describit,* CB *ad diametrum circuli* AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum CB acquisita æquatur celeritati per GB acquisitæ (§. 308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BG ad BA (§. 87). Sed BA . BC = BC : BG (§. 330 *Geom.*), ideoque BA ad BC est ratio subduplicata BA ad BG (§. 216. 159 *Arith.*). Ergo celeritas per arcum BC est ad celeritatem

(a) In Horolog. Oscill. part. 4. prop. 25. f. 152.



tem per BA acquiſitam ut chorda BC ad BA (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

402. Cum ideo ſit ut celeritas per arcum CB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, ita chorda CB ad AB, & ut celeritas per arcum FB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, Ita chorda FB ad AB (§. 401); celeritates per arcus CB & FB acquiſitæ ſunt ut chordæ cognomines (§. 195 *Arith.*).

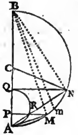
SCHOLION.

403. *Alia adhuc theoremata non inelegantia de pendulis habet* Newtonus (a), *quæ analytice facillime demonſtrantur ex ſuperioribus. Eum igitur in finem ſequens addimus.*

PROBLEMA 64.

404. *Determinare tempus oſcillationis dimidiæ per arcum exiguum in hypotheſi gravitatis uniformis, ſed maſſæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.



Sit in C centrum, circa quod pendulum oſcillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oſcillatur, ſeu oſcillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo & BNA ſemicirculus ex centro C deſcriptus; dicatur

$$CA = a,\ AQ = b,\ AP = x$$

erit $AB = 2a$, $QP = b - x$

& (§. 330 *Geom.*)

$$AB : AN = AN : AQ$$
$$2a : AN = AN : b$$
$$AB : AM = AM : AP$$
$$2a : AM = AM : x$$

ideoque

$$AM = \sqrt{2ax},\ AN = \sqrt{2ab}$$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter ſubtenſæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$ & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, conſequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1:2}dx\sqrt{2a} = -dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, maſſa $= m$. Quoniam gravitas uniformis ſeu conſtans *per hypoth.* erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP = b - x$ acquiſita, $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempuſculum dt directe ut ſpatium ſeu arculus mM & reciproce ut celeritas in m acquiſita (§. 39), conſequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per NM}}$$
$$= \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$
$$t = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

Eſt vero $-bdx : 2\sqrt{(bx - x^2)}$ elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ deſcripti, cujus ſagitta $QP = b - x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analyſ. infinit*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx - x^2)} =$ elemento arcus QR per $\frac{1}{2}AQ$ diviſo, Fiat itaque

(a) In Princip. Phil. Nat. matem. lib. 2. prop. 24. & ejus coroll. p. m. 294. & ſeqq.

$-bdx$

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit $\frac{-dx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{dz}{b}$

ideoque $dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{arc.\, QR . \sqrt{AC} . \sqrt{m}}{AQ . \sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat QP = QA, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA, eritque t tempus dimidiæ oscillationis, hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore $t = \frac{QRA . \sqrt{AC} . \sqrt{m}}{AQ . \sqrt{g}}$.

Patet, QRA : AQ designare rationem semiperipheriæ ad diametrum, & $\sqrt{AC}$ esse ut tempus descensus perpendicularis per AC seu altitudinem longitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m, seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galilæana* (§. 115), erunt

Theorema: Dimidiæ oscillationes pendulorum in arcubus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem longitudini penduli æqualem seu circuli radium, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per radium ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA 59.

405. *Tempora oscillationum sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oscillationum T & t, massæ M & m, gravitates G & g; erit

$$T = \frac{QR . \sqrt{M} . \sqrt{L}}{AQ . \sqrt{G}}$$

$$\& \; t = \frac{QRA . \sqrt{m} . \sqrt{l}}{AQ . \sqrt{g}} \text{ (§. 404), ideoque}$$

$$T : t = \frac{QRA . \sqrt{M} . \sqrt{L}}{AQ . \sqrt{G}} : \frac{QRA . \sqrt{m} . \sqrt{l}}{AQ . \sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M} . \sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m} . \sqrt{l}}{\sqrt{g}} \text{ (§. 178. 181 Arith.)},$$

$$= \sqrt{M} . \sqrt{L} . \sqrt{g} : \sqrt{m} . \sqrt{l} . \sqrt{G}$$

(§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum longitudines æquales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente, erit

$$T : t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

ideoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arith.*).

Et hinc $T^2 G : t^2 g = ML : ml$ (§. 184 *Arith.*).

Quare cum sit $L = l$ *per hypoth.* erit $T^2 G : t^2 g = M : m$ (§. 183 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM 2.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 3.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§. 151 *Arith.*), ideoque $G:g = t^2:T^2$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM 4.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$, *vi demonstr. præc.* si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G:g = L:l$ (§. 151 *Arith.*), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM 5.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M:m$ (§. 185 178 *Arith.*), hoc est, massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION 1.

412. *His principiis usus est* Newtonus (a) *in comparandis corporibus inter se quoad quantitatem materiæ in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis se semper invenisse fatetur, quantitatem materiæ in corporibus singulis, eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis ad cognoscendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM 6.

413. Quodsi fuerit $M = m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§. 149 *Arith.*), consequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§. 299 *Arithm.*), ideoque $T:t = \sqrt{g}.\sqrt{L} : \sqrt{G}.\sqrt{l}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum & reciproca subduplicata gravitatum.

COROLLARIUM 7.

414. Quodsi fuerit $M = m$ & $T = t$, erit $gL = Gl$ (§. *præc.*), consequenter $G:g = L:l$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM 8.

415. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $T^2G = t^2g$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = g:G$ (§. 299 *Arith.*), ideoque $T:t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM 9.

416. Quodsi fuerit $M = m$ & $G = g$, erit $T^2l = t^2L$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = L:l$, ideoque $T:t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLION 2.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, quæ sollicitat, in uno puncto concentrata concipiatur* (§. 125), *neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat, si pondera massis proportionalia sunt, ideoque æquales quantitates materiæ seu massæ æquales a gravibus eodem modo animentur; nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde in hac natura consentanea hypothesi valent, quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.*

THEOREMA 61.

418. *Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directa subduplicata gravitatum massas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis æqua-

(a) Vid. Princip. lib. 2. prop. 24. Cor. 7. p. m. 295.

æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directa subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N : n = \sqrt{l} . \sqrt{m} . \sqrt{G} : \sqrt{L} . \sqrt{M} . \sqrt{g}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

419. Quodsi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l} . \sqrt{G} : \sqrt{L} . \sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM 2.

420. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION 1.

421. *Si cui libuerit, is ex analogia* $N : n = \sqrt{G} . \sqrt{l} . \sqrt{m} : \sqrt{g} . \sqrt{L} . \sqrt{M}$ *plura theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.*

SCHOLION 2.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum, ex quo pondus suspenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in praxi filo utendum est tenui & globo exiguo, sed ex materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstrata valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum, perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enimvero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus caput sequens.*

CAPUT X:

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO 47.

423. **C**Entrum *oscillationis* est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

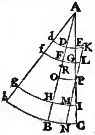
COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO 48.

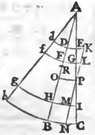
425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA 61.



426. *Si plura pondera* D, F, H, B, *quorum gravitas in punctis* D, F, H, B, *concipitur collecta, in virga inflexili* AB *eandem inter se & a puncto suspensionis* A *distantiam constanter conservent & circa* A *oscillationes suas perficiat pendulum hoc*

modo compositum; prodibit distantia OA *centri oscillationis* O *a puncto suspensionis* A, *si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur.*



DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B distantiis a puncto suspensionis A*d*, A*f*, Ag, A*b* proportionales. Patet ideo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; summa ponderum in centro oscillationis O applicata arcum OP describeret (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B, quo in summam eorundem O, nisi retinaculum AB obstaret; singula per spatiola ipsi OP æqualia transferrerentur, quia motus in instanti est uniformis, ideoque celeritates spatiolis proportionales (§. 33). Quare si KN per P ipsi DB parallela ducatur, DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in instanti acquirendas, si libere descenderent. Gravitas vero cum solo nisu agat (§. 4), vis mortua est (§. 9); consequenter vires motuum acceleratrices sunt in ratione composita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in D vis ut D. EK & in F vis ut F. GL: contra vero in H accrescit vis ut H. MI & in B vis ut B. NC, seu quod perinde est, ob decrementum virium in D & F vi in P aliquid accrescit, sed incrementum in H accremento in P rursus aliquid detrahit. Cum autem sit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HA (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK.AD): AB & (F. GL. AF): AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H. MI. AH): AB. Habemus ideo

$$B.NC = (D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH):AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 38 *Anal. infin.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*), consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB,

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum sit

$$H\ AH^2 = H.HA.HO + H.HA.AO$$
$$B.AB^2 = B.BA.BO + B.BA.AO$$
$$D.OA.DA = D.AD.AD + D.AD.OD$$
$$F.OA.FA = F.FA.FA + F.OF.FA.$$

Si utrin-

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.AO.HA + B.AO.BA$, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}.$$

Q. e. d.

SCHOLION I.

427. *Quodsi non evidens videatur, esse* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$ & $HA^2 = HA.HO + HA.AO$, *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$ & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit* $HA = HO + OA$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA^2 = HO^2 + 2HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arith.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA.HO = (AO + OH)HO = HO.OA + HO^2$ & $HA.AO = (AO + OH)AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93 Arith.), *consequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (§. 87 Arith.). *Similiter cum sit* $AB^2 = AO^2 + 2AO.OB + OB^2$ & $AB.BO = (AO + OB)OB = AO.OB + OB^2$ & $AB.AO = (AO + OB)AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (§. 86 Arith.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)DA = AD.AD + AD.OD$ (§. 93 Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

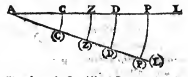
SCHOLION 2.

428. Joannes Bernoulli (a) *ex simplicissimis principiis mechanicis theoriam de centro oscillationis* ab Hugenio (b) *inventam* & a Jacobo Bernoulli *fratre* (c) *ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit, & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Operæ igitur pretium nos facturos existimamus, si viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA 66.

429. *Determinare centrum oscillationis in pendulo composito.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.



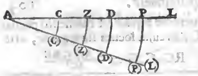
Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quotcunque C, D &c. in distantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est centrum oscillationis Z seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur a gravitate naturali G; erit pondus in C = G.C & momentum ejus G.C.AC, quod *vim agitativam penduli* appellat *Bernoullius*. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G.D.AD & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas, a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æqnale, ideoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates seu vires acceleratrices massarum sint ut celeritates, quas producunt in instanti, celeritates autem in tempusculo infinite parvo, quo per angulum infinite parvum ex AL in A(L) movetur pendulum sint ut C(C) ad P(P) (§. 33); consequenter ut AC ad AP (§. 138. 412 *Geom.*); erit ut AC ad AP ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius C sur-

(a) In Actis Erudit. An. 1714. pag. 257. & seqq.
(b) In Horolog. oscillat. part. 4. f. 91. & seqq.
(c) In Actis Erudit. An. 1691. pag. 317.



C ſurrogandum, conſequenter gravitas in $P = \frac{AP.G}{AC}$. Quodſi maſſa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AG}$, & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum ſit æquale momento ponderis in C, erit

$$\frac{G.P.AP^2}{AG} = C.G.AC$$

$$P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorſus modo reperitur pondus in P ſubſtituendum ponderi in D; nimirum maſſa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$; gravitas, qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$.

Eſt itaque pondus, quod in P ſubſtitui debet pro pondere, quod eſt in C, $\frac{AP.G}{AC} . \frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$, & pondus, quod pro D in P ſubſtituendum, $= \frac{AP.G}{AD} . \frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$.

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur, invenienda eſt porro gravitas communis, quæ animat uniformiter maſſarum ſeu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$; erit

$$\frac{AC^2.Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.Dx}{AP^2} \; \&c.$$

$$= \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G}{AP} \; \&c.$$

$$AC^2.Cx + AD^2.Dx + \&c. = (AC.C + AD.D + \&c.)\, AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D + \&c.)\, AP.G}{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}$$

hoc eſt, gravitas communis reperitur dividendo ponderum ſummam per ſummam maſſarum.

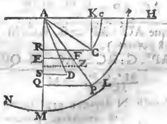
Cum ideo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia $\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)\,AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}$ ſit compoſito AL iſochronum, pendula vero ſimplicia iſochrona babeant gravitates longitudinibus proportionales (§. 414); longitudo penduli ſimplicis AZ fictitio AL iſochroni, & a gravitate naturali G animandi reperitur, ſi fiat; $\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)\,AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.} : G = AP : AZ$

Erit enim (§. 178, 181, 183 *Arith.*) $AC.C + AD.D\;\&c. : AC^2.C + AD^2.D\;\&c. = 1 : AZ$

conſequenter

$$AZ = \frac{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}{AC.C + D.AD\,\&c.}$$

quæ eſt regula *Hugeniana* (a) in propoſitione præcedente demonſtrata; ſed in eo caſu, ubi pondera quæ pendulum componunt, ſunt in eadem recta, aut ſaltem in eodem plano, in quo eſt axis oſcillationis.



Ponamus jam pondera C, D &c. non eſſe in eadem recta ſeu in plano, in quo eſt axis oſcillationis, ſed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem

(a) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oſcillat. f. 98.

axem A oscillante disposita, ita tamen ut situm non mutent. Sit AM linea verticalis plani, & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, ideoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus cC, & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam, qua impellitur radius AC in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, ideoque

$$AC : CR = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Est ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$.

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et si gravitas absoluta in $P = M$, respectiva ibidem $\frac{M.PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

ideoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arith.*).

$$AP^2.G.RC = AC^2.M.QP$$

$$\frac{AP^2.G.RC}{AC^2.QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam, qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.G.DS}{AD^2.QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi $= T$. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC.C.G = \frac{T.AP^2.G.RC}{AC^2}$$

$$C = \frac{T.AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T.M + V.N + \text{&c.}}{T + V}$ vi antecedentium cum sit

$$T.M = \frac{C.AC^2.AP^2.G.RC}{AP^2.AC^2.QP} = \frac{C.G.RC}{QP}$$

$$\& \; V.N = \frac{D.AD^2.AP^2.G.DS}{AP^2.AD^2.QP} = \frac{D.G.DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.C + AD^2.D}{AP^2}$$

erit $\frac{T.M + V.N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2.C.G.RC + AP^2.D.G.DS}{QP.AC^2.C + QP.AD^2.D}$$

$$= \frac{(C.RC + D.DS).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}.$$

Habemus ideo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

$$\frac{(C.RC + D.SD).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)PQ} : G = AP : AZ$$

$(C.RC + D.SD)AP : (C.AC^2 + D.AD^2)PQ = 1 : AZ$ (§. 178. 181. 185 *Arith.*)

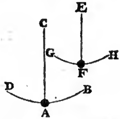
Quamobrem

$$AZ = \frac{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}{(C.RC + D.SD)AP}$$

Quæ

vationes habuere A. 1682. Varin & des Hayes, A. 1697. Couplet *filius*, & A. 1704. *Feuilée* (a).

THEOREMA 55.



392. *Si duo pendula* CA & EF *in arcus similes* DAB & GFH *excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum* CA & EF.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arith.*), consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF *per hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & §. 170 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA 56.

394. *Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus a numerus oscillationum penduli unius $= b$, alterius $= mb$. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oscillationem unam conficit, $= a:b$, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, $= a:mb$ (§. 302 *Arith.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut $a:b$ ad $a:mb$, hoc est, ut amb ad ab (§. 178 *Arith.*) seu ut mb ad b (§. 181 *Arith.*). Sed ut mb ad b ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 393).

THEOREMA 57.

396. *Longitudines pendulorum intra cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus descensus per altitudinem cycloidis seu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oscillationis (§. 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167 173 *Arith.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86). Ergo etiam altitudines, hoc est, pendulorum longitudines dimidiæ, consequenter & inte-

(a) Vid. *Newtonum* in Principiis lib. 3. prop. 19. p. m. 419.

integræ (§. 178 *Arith.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 394).

COROLLARIUM 2.

398. Tempora oscillationum in cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 63.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsita (§. 397).

E. gr. Juxta *Hugenium* (a) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsiti $= 3600 . 881 : 40000 =$ $79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{79}{200}$. lin.

PROBLEMA 64.

400. *Dato numero oscillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore absolvuntur, invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

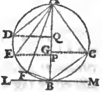
(a) In Horolog. Oscill. part. 4. prop. 25. f. 152.

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas & quadratum numeri oscillationum dati (§. 397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæsitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum, cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= (\sqrt{88100 . 3600 : 7929}) = \sqrt{40000} = 200$.

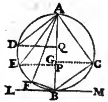
THEOREMA 58.



401. *Celeritas penduli in puncto infimo* B *est ad celeritatem acquisitam cadendo per* AB, *duplam penduli longitudinem, ut chorda arcus, quem describit,* CB *ad diametrum circuli* AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum CB acquisita æquatur celeritati per GB acquisitæ (§. 308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BG ad BA (§. 87). Sed BA . BC = BC : BG (§. 330 *Geom.*), ideoque BA ad BC est ratio subduplicata BA ad BG (§. 216. 159 *Arith.*). Ergo celeritas per arcum BC est ad celeritatem



tem per BA acquisitam ut chorda BC ad BA (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

402. Cum ideo sit ut celeritas per arcum CB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ita chorda CB ad AB, & ut celeritas per arcum FB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ita chorda FB ad AB (§. 401); celeritates per arcus CB & FB acquisitæ sunt ut chordæ cognomines (§. 195 *Arith.*).

SCHOLION.

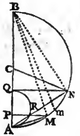
403. *Alia adhuc theoremata non inelegantia de pendulis habet* Newtonus (a), *quæ analytice facillime demonstrantur ex superioribus. Eum igitur in finem sequens addimus.*

PROBLEMA 64.

404. *Determinare tempus oscillationis dimidiæ per arcum exiguum in hypothesi gravitatis uniformis, sed massæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.

Sit in C centrum, circa quod pendulum oscillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oscillatur, seu oscillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo & BNA semicirculus ex centro C descriptus; dicatur



$$CA = a,\ AQ = b,\ AP = x$$

erit $AB = 2a$, $QP = b - x$ & (§. 330 *Geom.*)

$$AB : AN = AN : AQ$$
$$2a : AN = AN : b$$
$$AB : AM = AM : AP$$
$$2a : AM = AM : x$$

ideoque

$$AM = \sqrt{2ax},\ AN = \sqrt{2ab}$$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter subtensæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$ & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, consequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1:2}dx\sqrt{2a} = -dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, massa $= m$. Quoniam gravitas uniformis seu constans *per hypoth.* erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP = b - x$ acquisita, $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempusculum dt directe ut spatium seu arculus mM & reciproce ut celeritas in m acquisita (§. 39), consequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per NM}}$$
$$= \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$
$$t = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

Est vero $-bdx : 2\sqrt{(bx - x^2)}$ elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ descripti, cujus sagitta $QP = b - x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analys. infinit*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx - x^2)} =$ elemento arcus QR per $\frac{1}{2}AQ$ divisio, Fiat itaque

(a) In Princip. Phil. Nat. matem. lib. 2. prop. 24. & ejus coroll. p. m. 294. & seqq.

$-bdx$

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit $\frac{-dx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{dz}{b}$

ideoque $dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\text{arc. } QR.\sqrt{AC}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat $QP = QA$, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA, eritque t tempus dimidiæ oscillationis, hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore $t = \frac{QRA.\sqrt{AC}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$.

Patet, $QRA : AQ$ designare rationem semiperipheriæ ad diametrum, & $\sqrt{AC}$ esse ut tempus descensus perpendicularis per AC seu altitudinem longitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m, seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galilæana* (§. 115), erunt

Theorema: Dimidiæ oscillationes pendulorum in arcubus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem longitudini penduli æqualem seu circuli radium, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per radium ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA 59.

405. *Tempora oscillationum sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oscillationum T & t, massæ M & m, gravitates G & g; erit

$$T = \frac{QR.\sqrt{M}.\sqrt{L}}{AQ.\sqrt{G}}$$

$$\& \; t = \frac{QRA.\sqrt{m}.\sqrt{l}}{AQ.\sqrt{g}} \;(\S.404), \text{ ideoque}$$

$$T:t = \frac{QRA.\sqrt{M}.\sqrt{L}}{AQ.\sqrt{G}} : \frac{QRA.\sqrt{m}.\sqrt{l}}{AQ.\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M}.\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m}.\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \;(\S.178.181 \textit{ Arith.}),$$

$$= \sqrt{M}.\sqrt{L}.\sqrt{g} : \sqrt{m}.\sqrt{l}.\sqrt{G}$$

(§. 178 *Arith.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 60.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum longitudines æquales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente, erit

$$T : t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

ideoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arith.*).

Et hinc $T^2G : t^2g = ML : ml$ (§. 184 *Arith.*).

Quare cum sit $L = l$ *per hypoth.* erit $T^2G : t^2g = M : m$ (§. 183 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM 2.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 3.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§. 151 *Arith.*), ideoque $G : g = t^2 : T^2$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM 4.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$, *vi demonstr. præc.* si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§. 151 *Arith.*), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM 5.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§. 185 178 *Arith.*), hoc est, massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION 1.

412. *His principiis usus est* Newtonus (a) *in comparandis corporibus inter se quoad quantitatem materiæ in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis se semper invenisse fatetur, quantitatem materiæ in corporibus singulis, eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis ad cognoscendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM 6.

413. Quodsi fuerit $M = m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§. 149 *Arith.*), consequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§. 299 *Arithm.*), ideoque $T : t = \sqrt{g} . \sqrt{L} : \sqrt{G} . \sqrt{l}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum & reciproca subduplicata gravitatum.

COROLLARIUM 7.

414. Quodsi fuerit $M = m$ & $T = t$, erit $gL = Gl$ (§. *præc.*), consequenter $G : g = L : l$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM 8.

415. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $T^2G = t^2g$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = g : G$ (§. 299 *Arith.*), ideoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM 9.

416. Quodsi fuerit $M = m$ & $G = g$; erit $T^2l = t^2L$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = L : l$, ideoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLION 2.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, quæ sollicitat, in uno puncto contentrata concipiatur* (§. 125), *neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat, si pondera massis proportionalia sunt, ideoque æquales quantitates materiæ seu massæ æquales a gravibus eodem modo animentur; nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde in hac naturæ consentanea hypothesi valent, quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.*

THEOREMA 61.

418. *Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directa subduplicata gravitatum massas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L} . \sqrt{M} . \sqrt{g}$ ad $\sqrt{l} . \sqrt{m} . \sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis æqua-

(a) Vid. Princip. lib. 2. prop. 24. Cor. 7. p. m. 295.

æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directa subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

419. Quodsi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM 2.

420. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION 1.

421. *Si cui libuerit, ex analogia* $N : n = \sqrt{G}.\sqrt{l}.\sqrt{m} : \sqrt{g}.\sqrt{L}.\sqrt{M}$ *plura theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.*

SCHOLION 2.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum, ex quo pondus suspenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in praxi filo utendum est tenui & globo exiguo, sed ex materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum, perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enimvero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus caput sequens.*

CAPUT X.

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO 47.

423. *Centrum oscillationis* est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO 48.

425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA 61.

426. *Si plura pondera* D, F, H, B, *quorum gravitas in punctis* D, F, H, B, *concipitur collecta, in virga inflexili* AB *eandem inter se & a puncto suspensionis* A *distantiam constanter conservent & circa* A *oscillationes suas perficiat pendulum hoc*



modo compositum; prodibit distantia OA *centri oscillationis* O *a puncto suspensionis* A, *si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur.*



DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B distantiis a puncto suspensionis A*d*, A*f*, A*g*, A*b* proportionales. Patet ideo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; summa ponderum in centro oscillationis O applicata arcum OP describeret (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B, quo in summam eorundem O, nisi retinaculum AB obstaret; singula per spatiola ipsi OP æqualia transferrerentur, quia motus in instanti est uniformis, ideoque celeritates spatiolis proportionales (§. 33). Quare si KN per P ipsi DB parallela ducatur, DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in instanti acquirendas, si libere descenderent. Gravitas vero cum solo nisu agat (§. 4), vis mortua est (§. 9); consequenter vires motuum acceleratrices sunt in ratione composita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in D vis ut D.EK & in F vis ut F.GL: contra vero in H accrescit vis ut H.MI & in B vis ut B.NC, seu quod perinde est, ob decrementum virium in D & F vi in P aliquid accrescit, sed incrementum in H accremento in P rursus aliquid detrahit. Cum autem sit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HA (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK.AD): AB & (F.GL.AF): AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H.MI.AH): AB. Habemus ideo

$$B.NC = (D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH) : AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 38 *Anal. infin.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*), consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB,

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum sit

$$H.AH^2 = H.HA.HO + H.HA.AO$$
$$B.AB^2 = B.BA.BO + B.BA.AO$$
$$D.OA.DA = D.AD.AD + D.AD.OD$$
$$F.OA.FA = F.FA.FA + F.OF.FA.$$

Si utrin-

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.AO.HA + B.AO.BA$, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}.$$

Q. e. d.

SCHOLION 1.

427. *Quod si non evidens videatur, esse* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$ & $HA^2 = HA.HO + HA.AO$, *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$ & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit* $HA = HO + OA$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA^2 = HO^2 + 2HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arith.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86 Arith.); *erit* $HA.HO = (AO + OH)HO = HO.OA + HO^2$ & $HA.AO = (AO + OH)AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93 Arith.), *consequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (§. 87 Arith.). *Similiter cum sit* $AB^2 = AO^2 + 2AO.OB + OB^2$ & $AB.BO = (AO + OB)OB = AO.OB + OB^2$ & $AB.AO = (AO + OB)AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (§. 86 Arith.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)DA = AD.AD + AD.OD$ (§. 93 Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

SCHOLION 2.

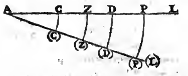
428. Joannes Bernoulli (a) *ex simplicissimis principiis mechanicis theoriam de centro oscillationis* ab Hugenio (b) *inventam* & a Jacobo Bernoulli *fratre* (c) *ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit, & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Opera igitur pretium nos facturos existimamus, si viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA 66.

429. *Determinare centrum oscillationis in pendulo composito.*

(a) In Actis Erudit. An. 1714. pag. 257. & seqq.
(b) In Horolog. oscillat. part. 4. f. 91. & seqq.
(c) In Actis Erudit. An. 1691. pag. 317.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.



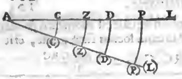
Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quotcunque C, D &c. in distantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est centrum oscillationis Z seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur a gravitate naturali G; erit pondus in $C = G.C$ & momentum ejus $G.C.AC$, quod *vim agitativam penduli* appellat *Bernoullius*. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in $D = G.D.AD$ & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas, a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, ideoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates seu vires acceleratrices massarum sint ut celeritates, quas producunt in instanti, celeritates autem in tempusculo infinite parvo, quo per angulum infinite parvum ex AL in A(L) movetur pendulum sint ut C(C) ad P(P) (§. 33), consequenter ut AC ad AP (§. 138. 412 *Geom.*); erit ut AC ad AP ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius

C sur-



C ſurrogandum, conſequenter gravitas in $P = \frac{AP.G}{AC}$. Quodſi maſſa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$, & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum ſit æquale momento ponderis in C, erit

$$\frac{G.P.AP^2}{AC} = C.G.AC$$

$$P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorſus modo reperitur pondus in P ſubſtituendum ponderi in D; nimirum maſſa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$; gravitas, qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$.

Eſt itaque pondus, quod in P ſubſtitui debet pro pondere, quod eſt in C, $\frac{AP.G}{AC}.\frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$, & pondus, quod pro D in P ſubſtituendum, $= \frac{AP.G}{AD}.\frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$.

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur, invenienda eſt porro gravitas communis, quæ animat uniformiter maſſarum ſeu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$; erit

$$\frac{AC^2.Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.Dx}{AP^2} \ \&c.$$
$$= \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G}{AP} \ \&c.$$

$$AC^2.Cx + AD^2.Dx + \&c. = (AC.C + AD.D + \&c.)\, AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D + \&c.)\, AP.G}{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}$$

hoc eſt, gravitas communis reperitur dividendo ponderum ſummam per ſummam maſſarum.

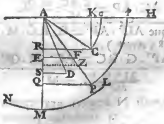
Cum ideo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia $\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}$ ſit compoſito AL iſochronum, pendula vero ſimplicia iſochrona babeant gravitates longitudinibus proportionales (§. 414); longitudo penduli ſimplicis AZ fictitio AL iſochroni, & a gravitate naturali G animandi reperitur, ſi fiat;
$\frac{(AC.C + AD.D\,\&c.)AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.} : G = AP : AZ$

Erit enim (§. 178, 181, 183 *Arith.*)
$AC.C + AD.D\ \&c. : AC^2.C + AD^2.D\,\&c. = 1 : AZ$

conſequenter

$$AZ = \frac{AC^2.C + AD^2.D\,\&c.}{AC.C + D.AD\,\&c.}$$

quæ eſt regula *Hugeniana* (a) in propoſitione præcedente demonſtrata; ſed in eo caſu, ubi pondera quæ pendulum componunt, ſunt in eadem recta, aut ſaltem in eodem plano, in quo eſt axis oſcillationis.



Ponamus jam pondera C, D &c. non eſſe in eadem recta ſeu in plano, in quo eſt axis oſcillationis, ſed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem

(a) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oſcillat. f. 98.

axem A oscillante dispositâ, ita tamen ut situm non mutent. Sit AM linea verticalis plani, & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, ideoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus cC, & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam, qua impellitur radius AC in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, ideoque

$$AC : CR = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Est ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$.

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et si gravitas absoluta in $P = M$, respectiva ibidem $\frac{M.PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

ideoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arith.*).

$$AP^2.G.RC = AC^2.M.QP$$

$$\frac{AP^2.G.RC}{AC^2.QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam, qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.G.DS}{AD^2.QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi $= T$. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC.C.G = \frac{T.AP^2.G.RC}{AC^2}$$

$$C = \frac{T.AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T.M + V.N +}{T + V}$ &c.

vi antecedentium cum sit

$$T.M = \frac{C.AC^2.AP^2.G.RC}{AP^2.AC^2.QP} = \frac{C.G.RC}{QP}$$

$$\& V.N = \frac{D.AD^2.AP^2.G.DS}{AP^2.AD^2.QP} = \frac{D.G.DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.C + AD^2.D}{AP^2}$$

erit $\frac{T.M + V.N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2.C.G.RC + AP^2.D.G.DS}{QP.AC^2.C + QP.AD^2.D}$$

$$= \frac{(C.RC + D.DS).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}.$$

Habemus ideo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

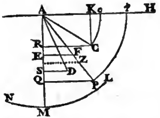
$$\frac{(C.RC + D.SD).AP^2.G}{(C.AC^2 + D.AD^2)PQ} : G = AP : AZ$$

$(C.RC + D.SD)AP : (C.AC^2 + D.AD^2)PQ = 1 : AZ$ (§. 178. 181. 185 *Arith.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{(C.AC^2 + D.AD^2)QP}{(C.RC + D.SD)AP}$$

Quæ



Quæ est longitudo penduli fictitii in instanti composito isochroni ob RC, SD, QP variabiles.

Sit jam F centrum gravitatis, erit ob parallelas FE & QP (§. 268 *Geom.*).

$$QP : AP = FE : AF$$

ideoque $AF = \frac{AP.FE}{QP}$

$= \text{quantitati constanti}.$

Erit etiam ob centrum gravitatis in F (§. 153)

$$(C+D)EF = RC.C + SD.D$$

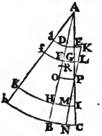
ideoque si AP transit per centrum gravitatis F, hoc est, si sit *linea centri* phrasi *Hugeniana*, erit

$$AZ = \frac{C.AC^2 + D.DA^2 \&c.}{(C+D\&c.)AF}$$

Atquæ hæc est regula *Hugeniana* pro inveniendo centro oscillationis in pendulo quocunque composito, quam ipsius verbis enunciat, sequens

Theorema. Si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis & summa productorum dividatur per id, quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

COROLLARIUM 1.



430. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe $D = F = H = B$ &c. $= P$ & numerus ponderum n; erit

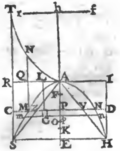
$$AO = \frac{P.AD^2 + P.FA^2 + P.HA^2 + P.BA^2 \&c.}{nP.AR}$$

hoc est, $AO = \frac{AD^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \&c.}{nAR}$

COROLLARIUM 2.

431. Quoniam D. AD est momentum ponderis D (§. 153); si momenta considerentur ut pondera ad rectam AB applicata; centrum oscillationis coincidet cum centro gravitatis communi horum ponderum (§. 429), ideoque momentis in ponderum locum surrogatis eodem modo determinatur centrum oscillationis, quo supra centrum gravitatis commune investigavimus (§. 157).

COROLLARIUM 3.

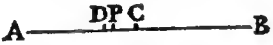


432. Si figura plana circa axem RI ita oscilletur, ut is semper maneat in plano oscillante seu (quod perinde est) ordinatis figuræ MN constanter sit parallelus; singula ponduscuti cujus-

cunque

cunque MN*nm* partes ab axe oscillationis RI æqualiter distant (§. 216 *Geom.*), nec aliter oscillatur e. gr. particula G ac si in puncto L suspenderetur. Est ideo momentum integri ponduscu MN*nm* (si fuerit AP = LG = x, MN = $2y$, Pp = dx) = $2yxdx$ (§. 153), consequenter distantia centri oscillationis ab axe = $2\int yx^2dx : 2\int yxdx$ (§. 157) = $\int yx^2dx : \int yxdx$. Quodsi ideo ex æquatione speciali ad figuram aliquam datam valor ipsius y substituatur & elementa debita ratione integrentur; prodibit distantia centri oscillationis ab axe in terminis ordinariis.

PROBLEMA 67.



433. *Determinare centrum oscillationis in linea recta* AB.

RESOLUTIO.

Sit AB = a, AD = x, erit particula infinite parva DP = dx, momentum hujus ponduscu xdx (§. 153), consequenter distantia centri oscillationis in parte AD a puncto suspensionis A = $\int x^2dx : \int xdx = \frac{1}{3}x^3 : \frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 431). Quodsi pro x substituatur a, prodibit distantia centri oscillationis in recta integra AB = $\frac{2}{3}a$.

SCHOLION

434. *Hac ratione definitur centrum oscillationis fili ferrei circa alterum extremum oscillantis.*

PROBLEMA 68.

435. *Determinare centrum oscillationis rectanguli* (*Vid. Fig.* §. 432) RIHS *in puncto medio* A *lateris* RI *suspensi & circa axem* RI *oscillantis.*

RESOLUTIO.

Si fuerit RI = SH = a, AP = x, erit Pp = dx & elementum areæ, consequenter unum ponduscum = adx & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 433) $\int ax^2dx : \int axdx = \frac{1}{3}ax^3 : \frac{1}{2}ax^2 = \frac{2}{3}x$ indefinite exprimit distantiam centri oscillationis ab axe oscillationis in segmento RCDI. Quodsi igitur pro x substituatur integri rectanguli altitudo RS = b; prodibit distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{2}{3}b$.

PROBLEMA 69.

436. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* (*Vid. Fig.* §. 432) SAH *circa axem* RI *basi* SH *parallelum oscillantis.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE = a, AP = x, EH = $\frac{1}{2}b$, PV = y, erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PV = AE : EH$$

$$x : y = a : \tfrac{1}{2}b$$

$$ay = \tfrac{1}{2}bx$$

$$y = bx : 2a$$

Hinc $\int yx^2dx = \frac{\int bx^3dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$

$$\int yxdx = \frac{\int bx^2dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

& $\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x$.

Quodsi pro x substituatur altitudo integra AE = a, prodibit distantia centri oscillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A = $\frac{3}{4}a = \frac{3}{4}$AE.

PROBLEMA 70.

437. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* (*Vid. Fig.* §. 432) SAH *circa basin* SH *oscillantis.*

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in problemate præcedente, erit PE = $a - x$. Unde

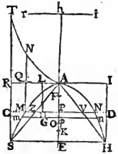
$$\int yx^2dx = \frac{fbxdx}{2a}(a-x)^2 = \int(\tfrac{1}{2}abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}) = \tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yxdx = \frac{fbxdx}{2a}(a-x) = \int(\tfrac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}) = \tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$$

$$\& \; \frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = (\tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}) : (\tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a})$$

$$= \frac{(24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4)}{96a} : \frac{(6abx^2 - 4bx^3)}{24a}$$

$$= \frac{12a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8bx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}.$$



Habemus ideo distantiam centri oscillationis ab axe in segmento SZVH.

Quodsi pro x substituatur a, prodibit distantia centri oscillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2) : (6a - 4a) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$AE.

P R O B L E M A 71.

438. *Determinare centrum oscillationis in triangulo æquicruro (Vid. Fig. ut supra) SAH, quod filo inflexili & gravitatis experte Ah suspensum circa axem ri basi SH parallelum oscillatur.*

R E S O L U T I O.

Sit $Ab = c$, reliqua sint ut supra (§. 436): erit $Pb = c + x$. Unde

$$\int yx^2dx = \int(c+x)^2\frac{bxdx}{2a} = \int(\frac{bc^2xdx}{2a} + \frac{bcx^2dx}{a} + \frac{bx^3dx}{2a}) = \frac{bc^2x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a}$$

$$= \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$$

$$\int yxdx = \int\frac{(c+x)bxdx}{2a} = \int(\frac{bcxdx + bx^2dx}{2a}) = \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a}$$

$$= \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}.$$

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \frac{(6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4)}{24a} : \frac{(3bcx^2 + 2bx^3)}{12a} = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{6bcx^2 + 4bx^3}$$

$= \frac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x}$, qui est valor distantiæ centri oscillationis ab axe *ri* in segmento trianguli AZV.

Quodsi pro x substituatur trianguli altitudo AE $= a$, prodibit distantia centri oscillationis ab axe oscillationis *ri* in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

S C H O L I O N.

439. *Ex unico hoc exemplo intelligitur, quid in casu simili aliarum figurarum facto opus sit.*

P R O B L E M A 72.

440. *Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem (Vid. Fig. ut supr.) RI basi SH parallelum oscillantibus.*

Quoniam (§. 163)

$$\int xydx = \int x^{(r+n):n}dx = \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n}$$

erit $\int x^2ydx = \int x^{(r+2n):n}dx = \frac{n}{r+3n}x^{(r+3n):n}$

$$\& \; \frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{(r+2n)x^{(r+3n):n}}{(r+3n)x^{(r+2n):n}} = \frac{(r+2n)}{r+3n}x.$$

E. gr. In parabola Apolloniana $r = 1$, $n = 2$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{5}{7}$AE.

In

In paraboloide cubicali $r = 1$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{7}{10}$AE.

In paraboloide biquadratico $r = 1$, $n = 4$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{9}{13}$AE.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $r = 2$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{8}{11}$AE.

In curva, ad quam $a^2x^3 = y^5$, $r = 3$, $n = 5$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{13}{18}$AE.

PROBLEMA 73.

441. *Invenire centrum oscillationis in parabola (Vid. Fig. pag. præc.)* SAH *circa basin* SH *agitata.*

RESOLUTIO.

Sit AE $= b$, AP $= x$, PM $= y$, parameter $= 1$; erit $ydx = x^{1:2}dx$, EP $= b - x$ & distantia centri oscillationis $= \int x^{1:2}dx(b-x)^2 : \int x^{1:2}dx(b-x)$ (§. 431). Quoniam itaque $\int x^{1:2}dx(b-x)^2 = \int b^2x^{1:2}dx - \int 2bx^{3:2}dx + \int x^{5:2}dx = \frac{2}{3}b^2x^{3:2} - \frac{4}{5}bx^{5:2} + \frac{2}{7}x^{7:2} = \frac{70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2}}{105}$, & $\int x^{1:2}dx(b-x) = \int bx^{1:2}dx - \int x^{3:2}dx = \frac{2}{3}bx^{3:2} - \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15}$; erit distantia centri oscillationis

$$= \frac{15(70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2})}{105(10bx^{3:2} - 6x^{5:2})}$$

$$= \frac{(35b^2 - 42bx + 15x^2)}{35b - 21x}.$$

Quod si fiat $x = b$, erit distantia centri oscillationis totius parabolæ SAH a basi SH

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$

$$= \frac{8b^2}{14b} = \frac{4}{7}b = \frac{4}{7}\text{AE}.$$

PROBLEMA 74.

442. *Invenire centrum oscillationis in infinitis parabolis (Vid. Fig. pag. præc.)* SAH *circa basin* SH *agitatis.*

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis

$$y^m = x \quad (\text{§. 519 } \textit{Analys. finit.}).$$

$$y = x^{1:m}$$

$$ydx = x^{1:m}dx$$

$$yx^2dx = x^{1:m}dx(b-x)^2$$

$$= x^{1:m}dx(b^2 - 2bx + x^2)$$

$$= b^2x^{1:m}dx - 2bx^{1+1:m}dx + x^{2+1:m}dx$$

$$\int x^2ydx = \frac{m}{m+1}b^2x^{1+1:m} - \frac{2m}{2m+1}bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1}x^{3+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int xydx = \int bx^{1:m}dx - \int x^{1+1:m}dx = \frac{m}{m+1}bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1}x^{2+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^2(2m+1)^2x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2)(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$

$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)x^2}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quod si fiat $x = b$, cum sit

$$(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$$

$$(2m+2)(3m+1) = 6m^2 + 8m + 2$$

$$(m+1)(2m+1) = 2m^2 + 3m + 1$$

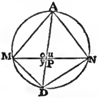
$$(m+1)(3m+1) = 3m^2 + 4m + 1$$

reperietur distantia centri oscillationis in infinitis parabolis a basi SH

$$= \frac{2m^2b^2}{(3m^2+m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1}\text{AE}.$$

Sit jam $m = 2$, prodibit eadem distantia $= \frac{4}{7}$AE, ut ante (§. 441).

LEMMA.



443. *Si in triangulo quocunque* MAN *ducitur utcunque recta* AP; erit $AM^2.PN + AN^2.PM = AP^2.MN + PM.PN.MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o = P$ (§. 156 *Geom.*) & ang. $MAD = MND$ (§. 315 *Geom.*), erit $AM : AP = ND : NP$ (§. 267 *Geom.*), ideoque $AM . NP = AP . ND$ (§. 297 *Arith.*).

Similiter $v = y$ (§. 156 *Geom.*) & ang. $ANM = ADM$ (§. 315 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$AN : AP = MD : MP$$

ideoque $AN . MP = AP . MD$ (§. 297 *Arith.*).

Est vero $MN . AD = AM . ND + AN . MD$ (§. 324 *Analys. finit.*).

Quare cum sit $AD = AP + PD$ (§. 86 *Arith.*); erit etiam $MN . AP + MN . PD = AM . ND + AN . MD$, consequenter $MN.AP^2 + MN.PD.AP = AM.ND.AP + AN.MD.AP$ (§. 93 *Arith.*). Quare cum sit *per demonstrata*.

$$ND . AP = AM . NP$$
$$MD . AP = AN . MP$$

atque $AP . PD = MP . PN$ (§. 381 *Geom.*); erit $MN . AP^2 + MN . MP . PN = AM^2 . NP + AN^2 . MP$. *Q. e. d.*

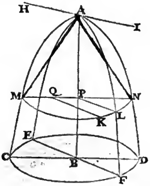
SCHOLION.

444. *Utimur hoc lemmate in determinando centro oscillationis in figuris, quæ* in latus agitantur, *hoc est, circa axem ad planum figuræ normalem. Ejus enim determinatio difficilior est in hoc casu, quam in præcedente, ubi agitatio fit in planum: quemadmodum videre est apud* Hugenium (a). *Calculum differentialem ad hoc negotium applicavit* Jacobus Bernoulli (b). *Nos primum regulam generalem demonstrabimus eamque deinde ad problemata specialia applicabimus, quemadmodum in casu præcedente factum.*

PROBLEMA 75.

445. *Determinare centrum oscillationis in figuris in latus agitatis.*

RESOLUTIO.



Ponamus Figuram AMN agitari in latus; hoc est, ita ut planum figuræ AP sit ad axem oscillationis normale. Consideremus primum duo puncta M & N tanquam pondera æqualia, aut sumantur pro punctis potius rectarum MP & PN portiones infinite parvæ; erit eorum centrum gravitatis commune, ob $MP = PN$, in P (§. 145), atque ideo pondus in $P = M + N$ (§. 125), consequenter distantia centri oscillationis penduli hujus compositi

(a) In Horolog. oscillat. part. 4. §. 91. & seqq.
(b) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1703. p. m. 96. 317.

siti $= \frac{M.AM^2 + N.AN^2}{(M+N)AP}$ (§. 429). Est vero $M = N$ & $MP = PN$ *per hypoth.* Ergo distantia centri oscillationis $= \frac{PN.AM^2 + PM.AN^2}{(M+N)AP}$. Est vero $PN.AM^2 + PM.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$ (§.443), consequenter $M.AM^2 + N.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$, hoc est, ob $M = N$, & $PM = PN$ ideoque $MN = PM + PN$, $\frac{M.AM^2 + N.AN^2}{P.AP} = \frac{P.AP^2 + P.MP.NP}{P.AP}$. Jam cum recta MN in innumera istiusmodi ponduscula resolvi possit, qualia sunt M & N $= dp$; si PM sumatur variabilis & dicatur y, AP vero x, summa ponduscolorum duorum M & N $= 2dp$; erit pro duobus ponduscolis distantia centri oscillationis $\frac{2x^2dp + 2y^2dp}{2xdp}$, consequenter pro omnibus ponduscolis secundum rectam MN constitutis distantia centri oscillationis $= \frac{2\int x^2dp + 2\int y^2dp}{2\int xdp} = \frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$. Enimvero cum ponduscula dp sint parallelogrammula, quorum latitudo est differentiale dy, altitudo differentiale abscissæ, ideoque $dp = dxdy$ & dx respectu dy constans est; erit $\int dp = dx\int dy$. Similiter quia y variabilis est respectu x, quod ejus intuitu pro constante habetur; erit $\int x^2dy = x^2y$ & $\int y^2dy = \frac{1}{3}y^3$ & $\int xdy = xy$, consequenter si jam y sumatur pro integra semiordinata PM; erit distantia centri oscillationis in integra figura plana oscillante MAN $= \frac{\int x^2ydx + \int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$. Non alia igitur re opus est, quam ut pro y ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y & y^3.

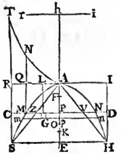
COROLLARIUM 1.

446. $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ exprimit distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata (§. 432). Quare si distantia centri oscillationis in figura in latus agitata desideretur; ad illam nonnisi adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$, ubi data vel jam inventa præsupponitur.

COROLLARIUM 2.

447. Liquet etiam hinc, distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, siquidem ita visum fuerit, una reperiri posse.

PROBLEMA 76.



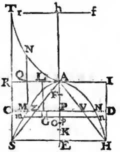
448. *Determinare centrum oscillationis rectanguli* RIHS *ex puncto medio* A *lateris* RI *suspensi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Si fuerit $RI = SH = a$, $AP = x$; erit distantia centri oscillationis ab axe sive a puncto A pro agitatione in planum $= \frac{2}{3}x$ seu pro integro rectangulo $= \frac{2}{3}b$ (§.435) &, ob $y = a$, $\int xydx = \int axdx = \frac{1}{2}ax^2$ & $\int \frac{1}{3}y^3dx = \int \frac{1}{3}a^3dx = \frac{1}{3}a^3x$. Quare $\frac{\int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$ seu particula adjicienda, ut prodeat distantia centri oscillationis rectanguli in latus agitati (§. 446), $= \frac{2a^3x}{3ax^2} = \frac{2a^2}{3x}$, seu si porro fiat $x = b$, $\frac{2a^2}{3b}$. Est igitur distantia quæsita $= \frac{2}{3}b + \frac{2a^2}{3b}$.

PRO-

PROBLEMA 77.



449. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* SAH *ex vertice suspensi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2}b$, PV $= y$; erit distantia centri oscillationis in planum agitati trianguli $= \frac{3}{4}x$, aut totius trianguli $= \frac{3}{4}a$, $\int yxdx = \frac{bx^3}{6a}$ & $y = \frac{bx}{2a}$ (§.436). Quare $\int \frac{1}{3}y^3dx = \int \frac{b^3x^3dx}{24a^3} = \frac{b^3x^4}{96a^3}$, consequenter particula adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$ (§.446) $= \frac{b^3x^4}{96a^3} : \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3x^4}{96a^3bx^3} = \frac{b^2x}{16a^2}$.

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri ex vertice suspensi & in latus agitati $= \frac{3}{4}a + b^2x : 16a^2$. Quodsi fiat $x = a$; erit distantia centri oscillationis totius trianguli æquicruri $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA 78.

450. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri (Vid. Fig. ut sup.)* SAH *in medio basis* SH *suspensi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit PE $= a - x$, $\int yxdx = \frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a}$ & distantia centri oscillationis trianguli in planum agitati $= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$, aut integri trianguli $= \frac{1}{2}a$ (§. 437). Sed $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{b^3x^4}{96a^3}$ (§. 449). Ergo pars addenda $= \frac{24ab^3x^4}{96a^3(6abx^2 - 4bx^3)}$ (§. 445) $= \frac{b^2x^2}{24a^3 - 16a^2x}$, consequenter, si fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{a^2b^2}{24a^3 - 16a^3} = \frac{a^2b^2}{8a^3} = \frac{b^2}{8a}$. Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri in medio basis suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$.

PROBLEMA 79.

451. *Determinare centrum oscillationis parabolæ ex vertice suspensæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{5}{7}x$ &, si parameter $= 1$, $y^2 = x$, ideoque $y^3 = x^{3:2}$ & $\int yxdx = \frac{2}{5}x^{5:2}$ (§. 440). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3}y^3dx = \int \frac{1}{3}x^{3:2}dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit pars adjicienda $= \frac{2}{15}x^{5:2} : \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. (§. 446). Est nempe parameter unitas, ideoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ si dicatur b, erit pars adjicienda $\frac{1}{3}b$. Habemus ideo distantiam centri oscillationis a vertice parabolæ in latus agitatæ $= \frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$.

PRO-

PROBLEMA 80.

452. *Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice suspensis.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{(r+2n)}{r+3n}x$, $\int xydx = \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n}$ (§. 440), &, quia $y = x^{r:n}$ (§. 519 *Analys. finit.*), $y^3 = x^{3r:n}$. Quoniam itaque $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{n}{3(3r+n)}x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)}x^{(3r+n):n}$; erit pars adjicienda $= \frac{n}{9r+3n}x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n} = \frac{(r+2n)}{9r+3n}x^{(2r-n):n}$. Est itaque distantia centri oscillationis in infinitis parabolis agnatisque curvis in latus agitatis $\frac{(r+2n)}{r+3n}x + \frac{(r+2n)}{9r+3n}x^{(2r-n):n}$.

Quoniam in parabola Apolloniana $r=1$, $n=2$, erit $\frac{r+2n}{r+3n} = \frac{1+4}{1+6} = \frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n} = \frac{1+4}{9+6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n} = \frac{2-2}{2} = 0$, ideoque $x^{(2r-n):2} = x^0 = 1$. Est ideo in parabola Apolloniana distantia centri oscillationis a vertice $\frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$, si nempe parameter $= b$, prorsus ut in problemate præcedente (§. 451).

PROBLEMA 81.

453. *Determinare centrum oscillationis parabolæ ex dimidia basi suspensæ & in latus agitatæ.*

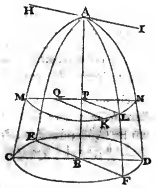
RESOLUTIO.

In parabola SAH circa basin (*Vid. Fig.* §. 449) SH in planum agitata distantia centri oscillationis a basi est $\frac{4}{7}b$, seu $\frac{4}{7}$AE &, si parameter $=1$, $y^3 = x^{3:2}$ & $\int xydx = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15}$ (§. 441). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3}y^3dx : \int xydx$, seu pars addenda $\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}$ (§. 446) $= \frac{x}{5b-3x} =$ (si parameter 1 fiat $=a$) $\frac{ax}{5b-3x}$, consequenter si fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $= \frac{ab}{5b-3b} = \frac{1}{2}a$. Est igitur distantia centri oscillationis parabolæ ex dimidia basi suspensæ & in latus agitatæ $= \frac{4}{7}b + \frac{1}{2}a$.

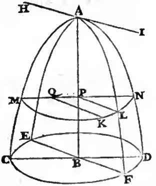
PROBLEMA 82.

454. *Invenire centrum oscillationis in figuris solidis rotatione genitis.*

RESOLUTIO.



Non alia re opus est, quam ut in formula superiori $\frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$ (§. 445) figuris solidis convenienter explicetur valor pondusculi dp. Designat autem dp elementum Solidi, quod habetur ducendo in se invicem differentialia abscissæ PA & abscissæ QP atque semiordinatam QK. Sit $PQ = y$, $AP = x$, $QK = v$, erit elementum $vdydx$, consequenter cum $\int vdy$ exprimat



mat segmentum PQKL, quod concipitur instar pondusculi in QP collectum, si PM sit $=y$, $2\int vdy$ exprimit integrum semicirculum in lineam rectam MN collectum instar ponderis (§.124 *Anal. inf.*). Sit ideo ratio radii ad semiperipheriam $=r:p$; erit semiperipheria radio PM $=y$ descripta $=\frac{py}{r}$, consequenter area semicirculi $=\frac{py^2}{2r}$, ideoque pondusculum dp in valore $\int x^2dp$ substituendum $=\frac{py^2dx}{2r}$; unde $\int x^2dp = \frac{\int px^2y^2dx}{2r} = \frac{p}{2r}\int x^2y^2dx$. Quodsi idem valor substituatur in $\int xdp$; reperietur idem $\frac{p}{2r}\int xy^2dx$. Substituatur valor ipsius dp etiam in formula y^2dp; erit pondusculum puncto Q respondens y^2vdydx, consequenter pondusculа respondentia lineæ QP $= dx\int vy^2dy$. Dicatur radius circuli PN $=t$: erit $v = \sqrt{(t^2-y^2)}$, ideoque $\int vy^2dy = \int y^2dy\sqrt{(t^2-y^2)}$. Est vero $\int y^2dy\sqrt{(t^2-y^2)} = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ (§.455). Ergo omnia pondusculа respondentia lineæ QP sunt $\frac{1}{4}t^2dx\int vdy - \frac{1}{4}yv^3dx$. Hinc quando PQ fit ipsi PM æqualis, $\frac{1}{4}t^2dx\int vdy - \frac{1}{4}yv^3dx$ exprimit omnia pondusculа respondentia lineæ PM, & $\int vdy$ quadrantem PML, ideoque $\frac{1}{2}t^2dx\int vdy - \frac{1}{2}yv^3dx$ exprimit omnia pondusculа respondentia lineæ MN, & $2\int vdy$ semicirculum MKN. In eo igitur casu $t=y$ $2\int vdy = \frac{py^2}{2r}$, ideoque $\int vdy = \frac{py^2}{4r}$, consequenter $\frac{1}{2}t^2dx\int vdy = \frac{py^4dx}{8r}$. Et quoniam in M semiordinata QK evanescit, erit $v=0$, ideoque etiam $\frac{1}{2}yv^3dx = 0$. Prodit ideo tandem $\frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp} = (\int\frac{px^2y^2dx}{2r} + \int\frac{pv^4dx}{8r}) : \frac{\int pxy^2dx}{2r} = \frac{\int x^2y^2dx + \int\frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx}$, ut ideo in casu speciali non alia re opus sit, quam ut pro y substituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione solidum generatur, quemadmodum problemata sequentia docent.

SCHOLION 1.

455. *Diximus, si t sit constans quantitas, & v* $=\sqrt{(t^2-y^2)}$, *esse* $\int vy^2dy = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$. *Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum: quo facto restituitur differentiale ad integrandum propositum* (§. 92 Analys. infinit.). *Quodsi ergo* $\frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ *differentietur, cum t constans sit, prodit* $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}v^3dy - \frac{3}{4}yv^2dv$. *Jam quia* $v=\sqrt{(t^2-y^2)}$ per hypoth. $vdv = -ydy$ & $v^2 = t^2 - y^2$. *Quare his valoribus in* $\frac{3}{4}yv^2dv$ & $\frac{1}{4}v^3dy$ *substitutis; differentiale emergit* $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}t^2vdy + \frac{3}{4}vy^2dy + \frac{1}{4}vy^2dy = \frac{4}{4}vy^2dy = vy^2dy$, *quod erat elementum ad integrandum propositum.*

SCHOLION 2.

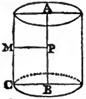
456. *Quoniam solida rotatione figurarum circa axem fixum genita eodem modo agitantur, in quamcumque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia, qualem in figuris planis inter agitationem in planum & in latus consideravimus, ideoque in omni casu eadem formula satisfacit.*

PROBLEMA 83.

457. *Determinare centrum oscillationis in cylindro ex centro basis suspenso.*

RESO-

Resolutio.



Sit altitudo cylindri $AB = a$, $CB = b$, $AP = x$. Quoniam omnes circuli basi paralleli æquales sunt; erit in cylindro $PM = CB$, hoc est, $y = b$. Unde habemus (§. 454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4dx$$
$$xy^2dx = b^2xdx$$

ideoque
$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}b^2x^3$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2$$

Quare distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $= \frac{\frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x}$. Quodsi fiat $x = a$; prodit distantia centri oscillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

Scholion.

458. *Equidem* Dechales (a) *centri oscillationis distantiam in Cylindro ex centro basis suspenso tantummodo facit* $\frac{4}{3}a$; *sed ipse non diffitetur suo tempore theoriam centri oscillationis nondum fuisse excultam: imo vix fando quid audiverat de regula* Hugeniana, *quæ in Horologio Oscillatorio demonstratur* (b).

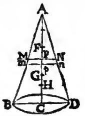
Problema 84.

459. *Determinare centrum oscillationis in Cono ex vertice suspenso.*

(a) In Mundo Mathem. Tom. 2. Stat. lib. 3. prop. 65. f. m. 322.

(b) Vide propr. præc. 65.

Resolutio.



Si altitudo Coni $AC = a$, radius basis $BC = b$; $AP = x$, $PM = y$; erit $y = bx : a$ (§. 268 *Geom.*). Quare (§. 454):

$$x^2y^2dx = b^2x^4dx : a^2$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x^4dx : a^4$$
$$xy^2dx = b^2x^3dx : a^2$$

ideoque
$$\int x^2y^2dx = b^2x^5 : 5a^2$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = b^4x^5 : 20a^4$$
$$\int xy^2dx = b^2x^4 : 4a^2$$

Distantia igitur centri oscillationis a puncto suspensionis

$$= \left(\frac{b^2x^5}{5a^2} + \frac{b^4x^5}{20a^4}\right) : \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{4}{5}x + \frac{b^2x}{5a^2}.$$

Quodsi jam porro fiat $x = a$; prodit distantia centri oscillationis pro cono integro $= \frac{4}{5}a + \frac{b^2}{5a}$.

Problema 85.

460. *Determinare centrum oscillationis Sphæræ.*

Resolutio.

Si diameter sphæræ $= 2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377 *Analys. finit.*), ideoque $y^4 = 4r^2x^2 - 4rx^3 + x^4$. Habemus ideo (§. 454).

$$x^2y^2dx = 2rx^3dx - x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = r^2x^2dx - rx^3dx + \tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = 2rx^2dx - x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{2}rx^4 - \tfrac{1}{5}x^5$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{3}r^2x^3 - \tfrac{1}{4}rx^4 + \tfrac{1}{20}x^5$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $= \frac{\frac{1}{4}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{3}{20}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4} =$ (multiplicando per 12 & dividendo per x^3) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{9}{5}x^2}{8r - 3x} = \frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodsi fiat $x = 2r$, prodit distantia centri oscillationis pro Sphæra integra $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14}{10}r = \frac{7}{5}r$. Si pro r ponatur diameter d, quia $d = 2r$, ideoque $\frac{1}{2}d = r$, erit eadem distantia $= \frac{7}{10}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat $x = r$; prodit distantia centri oscillationis in hemisphærio $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{25}$, ubi nempe ex vertice fuerit suspensum.

PROBLEMA 86.

462. *Determinare centrum oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Si parameter parabolæ genitricis a; erit $y^2 = ax$ (§. 388 *Analys. finit.*), ideoque $y^4 = a^2x^2$. Habemus ideo (§. 454).

$$x^2y^2dx = ax^3dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}a^2x^2dx$$
$$xy^2dx = ax^2dx$$

ideoque
$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{4}ax^4$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}a^2x^3$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}ax^3$$

Quamobrem distantia centri oscillationis a vertice
$$= \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}a.$$

Si semidiameter basis fuerit b, & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391 *Analys. finit.*). Quodsi ergo x degenerat in c; prodit distantia centri oscillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{3}{4}c + b^2 : 4c$.

PROBLEMA 87.

463. *Determinare centrum oscillationis in omnibus Conoidibus parabolicis in infinitum circa verticem agitatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1, pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{1:m}$ (§. 519 *Analys. finit.*), ideoque $y^2 = x^{2:m}$ & $y^4 = x^{4:m}$. Habemus itaque (§. 454).

$$x^2y^2dx = x^{2+2:m}dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}x^{4:m}dx$$
$$xy^2dx = x^{1+2:m}dx$$

$$\int x^2y^2dx = \frac{m}{3m+2}x^{3+2:m}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \frac{m}{4m+16}x^{1+4:m}$$
$$\int xy^2dx = \frac{m}{2m+2}x^{2+2:m}$$

Est igitur distantia centri oscillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitatis.

$$\frac{(2m+2)}{3m+2}x + \frac{(2m+2)}{4m+16}x^{-1+2:m}$$
$$= \frac{(2m+2)}{3m+2}x + \frac{(m+1)}{2m+8}x^{-1+2:m}$$

Ponatur $m = 2$, prodit $\frac{6}{8}x + \frac{3}{12}x^0$, hoc est, ob $x^0 = 1$ (§. 55 *Analys. finit.*), $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam posuimus $= 1$, fiat a; erit distantia centri oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$, prorsus ut ante (§. 462).

PROBLEMA 88.

464. *Determinare centrum oscillationis*

nis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.

RESOLUTIO.

Quoniam planum describens est hyperbola, si axis transversus dicitur a, parameter b, erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (§. 459 *Anal.finit.*), ideoque $y^4 = b^2x^2 + \frac{2b^2x^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454).

$$x^2y^2dx = bx^3dx + \frac{bx^4dx}{a}$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^2x^2dx + \frac{b^2x^3dx}{2a} + \frac{b^2x^4dx}{4a^2}$$
$$xy^2dx = bx^2dx + \frac{bx^3dx}{a}$$

ideoque

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{4}bx^4 + \frac{bx^5}{5a} = \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}b^2x^3 + \frac{b^2x^4}{8a} + \frac{b^2x^5}{20a^2}$$
$$= \frac{160a^2b^2x^3 + 240ab^2x^4 + 96b^2x^5}{12a.160a}$$
$$= \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a.10a}$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{4a} = \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{3.5abx^4 + 3.4bx^5}{5.4abx^3 + 5.3bx^4}$$
$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$
$$\frac{\int \frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{10a.4abx^3 + 10a.3bx^4}$$
$$= \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Est ideo distantia centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico

$$\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Quodsi fiat $x = a$, prodibit distantia Centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi transverso æqualis,

$$\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2b + 15a^2b + 6a^2b}{40a^2 + 30a^2}$$
$$= \tfrac{27}{35}a + \tfrac{11}{70}b.$$

PROBLEMA 89.

465. *Determinare centrum oscillationis in sphæroide elliptico ex vertice, seu altero axis majoris extremo suspenso.*

RESOLUTIO.

Si axis transversus fuerit a, parameter b; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (§. 420 *Analys. finit.*), ideoque $y^4 = b^2x^2 - \frac{2b^2x^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Reperitur ideo, ut in problemate præcedente (§. 464),

$$\int x^2y^2dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a.10a}$$
$$\int xy^2dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12a}$$

ideoque $\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{4}y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Est igitur distantia centri oscillationis a vertice

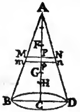
$$\frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}.$$

Quodsi fiat $x = a$, prodit distantia centri oscillationis a vertice pro integro sphæroide circa axem majorem agitato $\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{10a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2} = \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$. Si fiat axis minor $= c$; erit $b = c^2 : a$ (§. 423 *Analys. finit.*), ideoque distantia centri oscillationis in Sphæroide $= \frac{3}{5}a + \frac{c^2}{10a}$.

PROBLEMA 90.

466. *Determinare centrum oscillationis in Cono ex Centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.



Sit Semidiameter basis $BC = b$, $CP = x$, $AC = a$, erit $AP = a - x$; consequenter ob $AC : BC = AP : PM$ (§. 268 *Geom.*) $PM = y = (ab - bx) : a = b - bx : a$, $y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$ & $y^4 = b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$.

Habemus ideo (§. 454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx - \frac{2b^2x^3dx}{a} + \frac{b^2x^4dx}{a^2}$$

$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4dx - \frac{b^4xdx}{a} + \frac{6b^4x^2dx}{4a^2} - \frac{b^4x^3dx}{a^3} + \frac{b^4x^4dx}{4a^4}$$

$$xy^2dx = b^2xdx - \frac{2b^2x^2dx}{a} + \frac{b^2x^3dx}{a^2}$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}b^2x^3 - \frac{b^2x^4}{2a} + \frac{b^2x^5}{5a^2} = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{30a^2}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x - \frac{b^4x^2}{2a} + \frac{b^4x^3}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{4a^3} + \frac{b^4x^5}{20a^4}$$

$$= \frac{5a^4b^4x - 10a^3b^4x^2 + 10a^2b^4x^3 - 5ab^4x^4 + b^4x^5}{20a^4}$$

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2 - \frac{2b^2x^3}{3a} + \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{6a^2b^2x^2 - 8ab^2x^3 + 3b^2x^4}{12a^2}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20a^2x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^3b^2x + 30a^2b^2x^2 - 15ab^2x^3 + 3b^2x^4}{30a^4x - 40a^3x^2 + 15a^2x^3}$$

Quodsi fiat $x = a$, erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Cono integro

$$= \frac{20a^3 - 30a^3 + 12a^3}{30a^2 - 40a^2 + 15a^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^4b^2 + 30a^4b^2 - 15a^4b^2 + 3a^4b^2}{30a^5 - 40a^5 + 15a^5} = \tfrac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}.$$

Si altitudo coni fuerit semidiametro basis æqualis, erit $a = b$, ideoque $b^2 : a = a$. Unde distantia centri oscillationis in Cono rectangulo a puncto suspensionis $\tfrac{2}{5}a + \tfrac{3}{5}a = a$.

PROBLEMA 91.

467. *Determinare centrum oscillationis in hemisphærio ex centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Quoniam abscissæ hic computantur a centro, si radius circuli sit r, erit $y^2 = r^2 - x^2$ (§. 377 *Anal. finit.*) & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$. Habemus itaque (§. 454).

x^2y^2dx

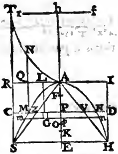
$$x^2y^2dx = r^2x^2dx - x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}r^4dx - \tfrac{1}{2}r^2x^2dx + \tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = r^2xdx - x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}r^2x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 = \frac{5r^2x^3 - 3x^5}{15}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}r^4x - \tfrac{1}{6}r^2x^3 + \tfrac{1}{20}x^5 = \frac{15r^4x - 10r^2x^3 + 3x^5}{60}$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}r^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 = \frac{2r^2x^2 - x^4}{4}$$

Eſt itaque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $\frac{20r^2x - 12x^3}{30r^2 - 15x^2} + \frac{15r^4 - 10r^2x^2 + 3x^4}{30r^2x - 15x^3}$, aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x, $\frac{10r^2x^2 - 9x^4 + 15r^4}{30r^2x - 15x^3}$.

Quodſi fiat $x = r$, prodibit diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis in hemiſphærio integro $= \frac{10r^4 - 9r^4 + 15r^4}{30r^3 - 15r^3}, = \frac{16}{15}r$.

SCHOLION.



468. *Non abſimili modo inveniri poteſt centrum oſcillationis Conoidis & ſphæroidis dimidii ex centro baſis ſuſpenſi. Poteſt etiam punctum ſuſpenſionis* h *extra figuram aſſumi, ut diſtantia penduſculi* P *ab axe oſcillationis ſit* Ph *atque ab abſciſſa figuræ* AP *differat quantitate* Ah, *veluti ſi figura oſcillans ex filo ſuſpendatur: quo in caſu* Hugenius *reperit in ſphæra ex filo tenui ſuſpenſa diſtantiam centri oſcillationis eſſe longitudinem fili & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro ſphæræ ac longitudine fili & ſemidiametrum ipſam* (a), *hoc eſt, ſi filum* $= 1$, *radius* $= r$, $1 + r + \frac{2r^2}{5(1+r)}$.

PROBLEMA 92.

469. *Determinare quantitatem pedis horarii.*

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas ſemicycloides ſuſpenſo & ſingulas oſcillationes ſingulis minutis ſecundis aut eorum ſemiſſibus abſolvente (§. 382) inſtructum & ſecunda temporis ſcrupula indice peculiari monſtrans ad motum ſtellarum ea ratione componatur, quæ inferius in Aſtronomia exponitur.
2. Globus plumbeus ex filo tenui ſuſpenſus (§. 377) leniter impellatur, ut nonniſi exiguos arcus deſcribat, quo ſingulæ oſcillationes ſint iſochronæ (§. 383) & tamdiu augeatur, vel minuatur fili longitudo, donec oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolvantur.
3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro & longitudine fili atque ſemidiametrum ipſam definiunt diſtantiam centri oſcillationis ab axe (§. 468); earundem pars tertia quantitatem pedis horarii conſtituit (§. 425).

SCHOLION I.

470. Hugenius (b) *hoc modo invenit, pedem horarium eſſe ad Pariſienſem ut* 881 *ad* 864 *hoc eſt, longitudo penduli ſimplicis oſcillationes ſingulas ſingulis minutis ſecundis abſolventis eſſe trium pedum Pariſienſium cum octo lineis & dimidia. Monet autem*

(a) In Horolog. Oſcill. part. 4. prop. 22. §. 142.
(b) Horol. Oſcillat. part. 4. prop. 25. §. 152. & 151.

rem pedem Parisiensem ad Rhenanum esse ut 144 ad 139, hoc est, quinque suis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.

SCHOLION 2.

471. *Quodsi gravitas omnibus in locis eadem esset; pes horarius mensura foret universalis perpetua, quemadmodum* Hugenius *contendit: sed cum eandem variari nunc constet pro diversa ab æquatore distantia* (§. 390); *nonnisi iis in locis eadem penduli simplicis minuta secunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis discrepant. Quæ itaque mensura vere universalis haberetur, opus præterea esset, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diversis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorsus indignum censeri debet, hactenus nec per experimenta constare, nec demonstratum esse, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot sæculorum decursum, gravitas non mutetur.*

THEOREMA 62.

472. *Spatium descensus perpendicularis gravium intra minutum secundum temporis est ad semissem longitudinis penduli simplicis, cujus oscillationes minutis secundis respondent, in ratione duplicata peripheriæ ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ter sumtus seu longitudo penduli simplicis, cujus oscillationes minutis secundis horariis respondent (§. 425), $= a$, tempus descensus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quæsita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d:p$; erit $t = d:p$ (§. 387). Est vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2}a : x$ (§. 87), ideoque $t^2 x = \frac{1}{2}a$, hoc est, si valor ipsius t modo inventus substituatur $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2}a$ seu $d^2 x = \frac{1}{2}ap^2$. Ergo $x : \frac{1}{2}a = p^2 : d^2$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d:p = 113:355$ (§. 427 *Geom.*) & $a = 36'' \, 8\frac{1}{2}'''$ seu 881 linearum dimidiarum pedis Parisiensis (§. 470); erit $x = ap^2 : 2d^2 = 881 \cdot 126025 : 25538 = 2174''' = 15' \, 1'' \, 2'''$ seu $15' \, 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

474. *Hæc cum experimentis accuratissimis prorsus convenire observavit* Hugenius (a).

CAPUT XI.

De Motu Projectorum.

DEFINITIO 49.

475. *Grave perpendiculariter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO 50.

476. *Grave horizontaliter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

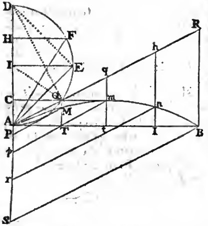
DEFINITIO 51.

477. *Grave oblique projici dicitur*, si impellitur secundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFI-

(a) In Horolog. Oscillat. part. 4. prop. 25. §. 155.

DEFINITIO 52.



478. *Angulus elevationis* RAB est, quem efficit linea directionis corporis projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA 63.

479. *Si corpus grave perpendiculariter projicitur, perdiculariter ascendit.*

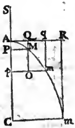
DEMONSTRATIO.

Grave impellitur secundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis (§.475). Quare cum gravitas secundum eandem directionem vi impressæ resistat (§. 215); directionem mutare nequit, sed motum tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter ascendit (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA 64.

480. *Si corpus grave horizontaliter projicitur, motu suo parabolam describit in medio non resistente.*

DEMONSTRATIO.



Corpus enim projectum vi impressa uniformiter urgetur secundum rectam AR (§.71); sed vi gravitatis secundum rectam AC, quæ ad rectam AR lineæ orizontali *ex hypothesi* parallelam perpendicularis (§.215). Jam si vi impressa corpus pervenisset in Q, vi gravitatis descendit interea per QM ideoque in M reperitur. Quoniam vero motus secundum directionem AR semper est uniformis *per demonstr.* spatia QA & *q*A sunt ut tempora (§. 32). Sed spatia QM & *qm* sunt ut temporum quadrata (§.80). Est ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc est, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (§. 257 *Geom.*). Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AM*m* est parabola (§. 402 *Analys. finit.*). *Q. e. d.*

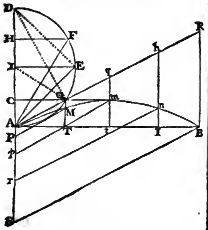
SCHOLION.

481. *Equidem cum gravia versus centrum telluris tendant* (§. 213), *recta* QM *&* qm *in eodem concurrere debent, ideoque parallela non sunt* (§. 82 Geom.). *Enimvero si tota altitudo* AC, *per quam decidit grave secundum directionem* AR *projectum sit exigua admodum pars distantia a centro telluris* (§. 216); *pro parallelis citra errorem experimentoullo definiendum haberi possunt.*

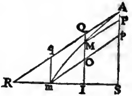
THEOREMA 65.

482. *Si corpus grave oblique sive sursum, sive deorsum projicitur in medio non resistente, motu suo parabolam describit.*

DEMONSTRATIO.



I. Sit linea directionis corporis sursum projecti AR. Cum corpus projectum, si gravitatis actio cessaret, eandem uniformiter describeret (§. 71); positis AQ, Qq, qb & bR æqualibus, erunt AQ & Aq ut tempora (§. 32). Quodsi AB sit linea horizontalis, & QM, *qm* &c. ita ducantur, ut continuatæ in T, *t* &c. sint ad AB perpendiculares; erunt QM, *qm* &c. altitudines, per quas vi gravitatis descendit interea corpus projectum, dum ex A in Q, *q* &c. pervenisset (§. 215). Quare si AS ducatur ad AB perpendicularis; erit rectis QM, *qm* &c. parallela (§. 256 *Geom.*). Ductis porro PM, *pm* &c. ipsi AR parallelis; erit PM = AQ, *pm* = A*q* &c. AP = QM, A*p* = *qm* &c. (§. 257 *Geom.*), ideoque AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$ (§. 86). Est igitur AMB parabola, cujus diameter AS (§. 416 *Analys. finit.*). *Quod erat unum.*



II. Sit similiter linea directionis corporis deorsum projecti AR in partes æquales AQ, Q*q* &c. divisa & RS linea horizontalis. Ducta AS ad RS perpendiculari & QM, *qm* &c. eidem AS, PM vero, *pm* &c. ipsi AR parallelis: eodem, quo ante, modo demonstratur, esse AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$. Quare AM*m* denuo est parabola, cujus diameter AS (*§. cit. Analys. finit.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

483. Est ergo parameter diametri parabolæ AS tertia proportionalis ad AP & PM, sive QM & AQ (*§. cit. Analys. finit.*), hoc est, ad spatium, per quod grave dato tempore descendit, & ad celeritatem spatio, quod vi impressa eodem tempore describit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM 2.

484. Cum spatium uno minuto secundo a gravi quocunque perpendiculariter cadendo confectum notum sit, nempe $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium (§. 473); parameter diametri parabolæ describendæ invenitur, si spatii, quod uno minuto secundo projectile vi impressa percurrit, quadratum per $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium dividatur (§. 302 *Arith.*).

COROLLARIUM 3.

485. Si ergo velocitas projectorum eadem, spatia eodem tempore vi impressa descripta æqualia sunt (§. 33), consequenter eadem parabolarum, quas motu composito percurrunt, parameter invenitur (§. 177 *Arith.*).

COROLLARIUM 4.

286. Linea directionis projectilis AR parabolam in A tangit (§. 414. 415 *Analys. finit.*).

COROLLARIUM 5.

487. Si a parametro diametri subtrahatur quadruplum

druplum altitudinis *tm* (*Vid. Fig.* 1 §. 482) sumptæ in axe *mt*, parameter axis relinquitur (§. 416 *Analyſ. finit.*), cujus quarta pars eſt diſtantia verticis axis a foco parabolæ (§. 396 *Anal. finit.*). Parabola igitur deſcribi poteſt, data celeritate projectorum & altitudine *tm* intercepta inter verticem *m* parabolæ AMB & horizontalem lineam AB (§. 400 *Anal. finit.* & §. 484 *Mech.*).

DEFINITIO 53.

488. *Semita* eſt parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum deſcribit.

DEFINITIO 54.

489. *Amplitudo* (ſcilicet ſemitæ) eſt recta horizontalis (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*) AB ſemitam AMB ſubtendens.

THEOREMA 66.

490. *Projectile temporibus æqualibus per æqualia ſpatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB ſemita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Q*q* &c. diviſa. Demittantur perpendiculares QT, *qt* &c. erunt AT, T*t* &c. ſpatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes ſemitæ AM, M*m* &c. percurrit: Quoniam projectile vi ſola impreſſa uniformiter deſcriberet rectas AQ, Q*q* &c. (§. 71); AQ, Q*q* &c. ſunt ut tempora (§. 31). Eſt vero AQ : Q*q* = AT : T*t* (§. 268 *Geom.*). Ergo AT & T*t* ſunt ut tempora; conſequenter temporibus æqualibus etiam AT & T*t* æquantur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 93.

491. *Dato angulo elevationis* (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*) RAB *una cum amplitudine* AB, *invenire parametrum diametri* AS *ſemitæ* AMB.

RESOLUTIO.

Sit ſinus anguli elevationis $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$, amplitudo AB $= c$, parameter $= x$. Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis RAB (§. 2. 3. 11 *Trigon.*); ideoque

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = c : \frac{ac}{b}$$

Eſt itaque BR $=$ AS (§. 257 *Geom.*) $= ac : b$.

Porro $b : t = AB : AR$

$$b : t = c : \frac{tc}{b}$$

Eſt itaque AR $=$ SB (§. *cit.*) $= tc : b$.

Quare ob $x \cdot AS = SB^2$ (§. 416 *Analyſ. finit.*).

$$acx : b = c^2t^2 : b^2$$

$$ax = ct^2 : b$$

$$x = ct^2 : ab$$

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c : x$. Eſt vero $\frac{t^2}{b}$ ſecans anguli elevationis RAB (§. 26 *Trigon.*): Habemus itaque ſequens

Theorema. Amplitudo ſemitæ AB eſt ad parametrum diametri AS ut ſinus anguli elevationis RAB ad ejus ſecantem.

COROLLARIUM 1.

492. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§. 491), ideoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 93 *Arith.*); erit etiam $2abx : 2t^2 = c$, conſequenter $t : \frac{2ab}{t} = \frac{1}{2}x : c$. Eſt vero $2ab : t$ ſinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325 *Analyſ. finit.*). Ergo ſemiparameter eſt ad amplitudinem AB ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis.

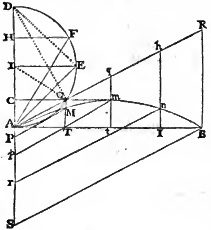
COROLLARIUM 2.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem eſt (§. 485). Quare cum ſit ſemiparameter ſemitæ in uno caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis, &

Q ſemi-

ſemiparameter ſemitæ in altero caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis (§. 492); amplitudines ſunt ut ſinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum exiſtente eadem (§. 196 *Arith.*), & ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc caſu conſtans eſt (§. 173 *Arith.*).

THEOREMA 67.



494. *Si eadem maneat projectilis celeritas, amplitudo* AB *maxima eſt ſub angulo elevationis* 45°: *æquales vero ſunt amplitudines ſub angulis elevationis a ſemirecto æqualiter differentibus.*

DEMONSTRATIO.

Cum ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem conſtans ſit, celeritate projectilis exiſtente eadem (§. 493); creſcente ſinu anguli dupli elevationis creſcit amplitudo. Quare cum ſinus anguli elevationis 45° dupli ſit radius (§. 2 *Trigon.*), quo major ſinus non datur; maxima ſit neceſſe eſt amplitudo ſub ſinu anguli elevationis 45°. *Quod erat unum.*

Jam cum idem ſit ſinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5 *Trigon.*), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, ſi ſimpli a ſemirecto differant æqualiter; amplitudines eo in caſu æquales ſint neceſſe eſt (§. 493). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut ſinus totus ad ſinum anguli elevationis dupli ita ſemiparameter ad amplitudinem (§. 492) & ſinus totus ſinui anguli elevationis dupli æqualis, ſi is 45°; ſub angulo elevationis 45° amplitudo ſemiparametro æquatur.

PROBLEMA 94.

496. *Data amplitudine maxima, determinare amplitudinem ſub angulo elevationis alterius cujuſcunque, celeritate manente eadem.*

RESOLUTIO.

Quoniam ſinus totus eſt ſinus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (§. 494); fiat ut ſinus totus ad ſinum anguli dupli elevationis cujuſcunque alterius; ita amplitudo maxima ad quæſitam (§. 493).

E. gr. Sit jactus maximus, ſeu ſemirectus alicujus tormenti 6000 paſſuum, & quæratur longitudo jactus graduum 30. Reperitur is 5196 paſſuum.

Log. ſin. tot.	10.0000000
Log. ſin. 60	9.9375306
Log. 6000	3.7781512
Log. quæſ.	x3.7156818, cui in tabulis reſpondent 5196.

PROBLEMA 95.

497. *Data celeritate projectilis invenire amplitudinem maximam.*

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per ſpatium, quod vi impreſſa dato tempore, e gr. uno ſecundo minuto, percurrere valet; non alia re opus eſt, quam

quam ut parameter semitæ inveniatur (§. 484). Hujus enim semissis est amplitudo quæsita (§. 495).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum secundum 1000 pedes Parisienses seu 12000″ conficere valet. Quodsi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter semitæ maxime 795580″ seu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ ideo intra hunc terminum constituta sunt, projectile attingere potest.

PROBLEMA 96.

498. *Data amplitudine maxima invenire celeritatem projectilis, seu spatium horizontale intra minutum secundum conficiendum.*

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ sit parameter semitæ (§. 495); inter duplum amplitudinis maximæ & spatium, quod intra minutum secundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe 181 digitorum, qualium 12 est pes Parisiensis, quæratur numerus medius continue proportionalis (§. 301 *Arith.*). Is enim erit spatium a projectili intra unum minutum secundum conficiendum (§. 484).

Si amplitudo maxima 500 pedum Parisiensium; erit parameter maxima 1000 pedum seu 12000 digitorum & hinc spatium quæsitum $= \sqrt{(12000 \cdot 181)} = 122$ pedum Parisiensium cum 9 unciis seu digitis fere.

PROBLEMA 97.

499. *Determinare altitudinem maximam (Vid. Fig. pag. præc.)* tm, *ad quam grave oblique projectum ascendit.*

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $BR = b$, $AT = x$; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Porro (§. 268 *Geom.*).

$$AB : BR = AT : TQ:$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

(§. 268 *Geom.* & §. 260 *Arith.*)

$$AB^2 : AR^2 = AT^2 : AQ^2$$
$$a^2 : a^2 + b^2 = x^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}$$

Et (§. 416 *Analys. finit.*)

$$AR^2 : AQ^2 = BR : QM.$$
$$a^2 + b^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

Quare $TM = bx : a - bx^2 : a^2$. Cum vero tm sit maximum aliquod, *per hypoth.* erit (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$
$$ab - 2bx = 0$$
$$ab = 2bx$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

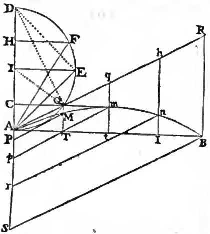
Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in t & ex puncto t erigatur perpendicularis tm; erit tm altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum ascendit.

THEOREMA 68.

500. *Si altitudo maxima (Vid. Fig. pag. præc.)* tm, *ad quam grave juxta directionem* AR *projectum ascendit, continuetur usque ad lineam directionis* AR; *erit recta* qm *inter semitam* AmB *& lineam directionis* AR *intercepta eidem æqualis: &, si in extremitate semitæ erigatur perpendicularis* BR, *erit* tm $= \frac{1}{4}$BR.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB : At = AR : Aq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2}AB$ (§. 499); erit etiam $Aq = \frac{1}{2}AR$. Est vero $AR^2 : Aq^2 = BR : qm$ (§. 416 *Analys. finit.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4}AR^2$ *per demonstrat.* erit quoque $qm = \frac{1}{4}BR$. *Quod erat unum.*



Sed, ob AB : At = BR : tq (§. 268 *Geom.*) & At = $\frac{1}{2}$AB (§. 499.) tq = $\frac{1}{2}$BR, hinc $\frac{1}{2}tq$ = $\frac{1}{4}$BR. Est vero qm = $\frac{1}{4}$BR *per demonstr.* Ergo qm = $\frac{1}{2}tq$ (§. 87 *Arithm.*), = tm. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 98.

501. *Data amplitudine (Vid. Fig. ut sup.)* AB *&* *angulo elevationis* BAR, *determinare altitudinem jactus maximam* tm.

RESOLUTIO.

Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis BAR (§. 3. 11 *Trigon.*). Quare si fiat ut cosinus anguli elevationis ad sinum ejusdem ita amplitudo AB ad quartum; reperietur BR, cujus quarta pars est altitudo jactus maxima tm (§. 500).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate projectilis amplitudo maxima (§. 497) & inde porro amplitudo sub angulo elevationis quocunque invenitur (§. 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri potest (§. 501).

THEOREMA 69.

503. *Altitudo jactus (Vid. Fig. ut sup.)* tm *est ad octavam parametri partem ut sinus versus anguli dupli elevationis ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli elevationis BAR = a, cosinus = b, sinus totus = t, parameter = x; erit amplitudo AB = $abx : t^2$ (§. 492).

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4}$BR (§. 500) $= a^2x : 4t^2 = 2a^2x : 8t^2$. Est vero $(b^2 - a^2) : t$ cosinus anguli dupli elevationis (§. 325 *Analys. finit.*), & hinc sinus versus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 + a^2) : t$ (§. 2 *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$, consequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem sinus versus $= 2a^2 : t$. Est ideo ut t sinus totus ad $2a^2 : t$ sinum versum anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

504. Quoniam ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in uno casu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus, & ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in altero quocunque casu) ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503), velocitate autem existente eadem parameter quoque in diversis angulis elevationis eadem est (§. 485); erunt altitudines jactuum sub diversis angulis elevationum ut sinus versi eorundem angulorum duplorum (§. 196 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

505. Si sinus anguli elevationis in uno casu a, in altero c, velocitate existente eadem, altitudines jactuum sunt ut $a^2x : 4t^2$ ad $c^2x : 4t^2$ (§. 503),

(§. 503), hoc est, ut a^2 ad c^2 (178.181 *Arith.*), ideoque in ratione duplicata sinuum angulorum elevationum.

PROBLEMA 99.

506. *Data celeritate projectilis, altitudine feriendi (Vid. Fig. pag. præc.)* In *& ejus distantia horizontali* AI, *invenire jactus angulum elevationis.*

RESOLUTIO.

Cum data celeritate projectilis parameter diametri AS detur (§. 483); sit ea $= a$. Sit præterea $In = b$, $AI = c$, sinus totus $= t$, tangens anguli quæsiti $= x$. Quodsi AI sumatur pro sinu toto, erit bI tangens anguli bAI (§. 7 *Trigon.*). Est itaque

$$t : x = AI : Ib$$

$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $bn = Ar = cx : t - b$ & $rn^2 = acx : t - ab$ (§. 416 *Analys. finit.*). Est vero etiam $rn^2 = AI^2 + Ib^2$ (§. 417 *Geom.*) $= c^2 + c^2x^2 : t^2$. Quare.

$$c^2 + c^2x^2 : t^2 = acx : t - ab$$

$$c^2x^2 : t^2 - acx : t = -ab - c^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$c^2x^2 : t^2 - acx : t + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2$$

$$cx : t - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$cx : t = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$x = (\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)})t : c$$

Est igitur ut c ad $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ ita sinus totus t ad tangentem anguli elevationis quæsiti RAB.

COROLLARIUM 1.

507. Si $ab + c^2 = \frac{1}{4}a^2$ seu $\frac{1}{4}a = b + c^2 : a$; erit $x = at : 2c$, ideoque in hoc casu est $2c : a = t : x$, hoc est, ut dupla distantia objecti feriendi AI ad parametrum, ita sinus totus ad tangentem anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

508. Si $ab + c^2 > \frac{1}{4}a^2$; $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ radix imaginaria evadit (§. 71 *Analys. finit.*), ideoque valor ipsius x est impossibilis (§. *cit.*). Quare in hoc casu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA 70.

509. *Tempora jactuum sub diversis elevationis angulis, velocitate existente eadem, sunt ut sinus angulorum elevationis.*

DEMONSTRATIO.

Si sinus totus (*Vid. Fig. pag. præc.*) $= t$, sinus anguli elevationis BAR $= a$, cosinus $= b$, parameter semitæ $= x$; erit secans anguli elevationis $= t^2 : b$ (§. 26 *Trigon.*), ideoque $\frac{t^2}{b} : a = x$; AB (§. 491), consequenter AB $= abx : t^2$. Quare cum sit (§. 33 *Trig.*)

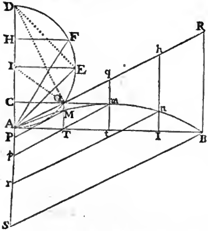
$$b : t = AB : AR$$

$$b : t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t}$$

ideoque $AR = ax : t$; erit ut sinus totus t ad sinum anguli elevationis in casu uno ita parameter ad AR, & ut sinus totus ad sinum anguli elevationis in casu alio ita parameter ad AR in casu alio. Quoniam vero celeritas in utroque casu eadem *per hypoth.* parameter quoque eadem est (§. 485). Ergo ut sinus angulorum elevationis ita sunt rectæ AR in diversis elevationum angulis (§. 196 *Arith.*). Enimvero rectæ AR sunt spatia, quæ projectilia eadem celeritate uniformiter describunt, cessante gravitatis actione (§. 71). Tempora igitur jactuum sunt ut ista spatia (§. 32), consequenter ut sinus angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PRO-

Problema 100.



510. *Data celeritate projectilis una cum angulo elevationis* RAB, *invenire amplitudinem* AB, *altitudinem jactus* tm *&* *semitam* AmB *describere*.

Resolutio.

1. Ad rectam horizontalem AB erigatur perpendicularis AD, quæ sit altitudo, unde projectile cadendo celeritatem datam acquirere valet (§. 92).
2. Super AD describatur semicirculus AQD, lineam directionis AR secaturus in Q.
3. Per Q ducatur ipsi AB parallela C*m* fiatque CQ = Q*m*.
4. Ex puncto *m* demittatur ad AB perpendicularis *mt*.
5. Denique per verticem *m* describatur parabola A*m*B parametro 4CD (§. 393 *Analyf. finit.*)

Dico hanc esse semitam quæsitam, 4CQ ejus amplitudinem & *tm* jactus altitudinem.

Demonstratio.

Cum anguli ad C & *m* sint recti *per constr.* & verticales ad Q æquales (§. 156 *Geom.*), sit etiam CQ = Q*m per constr.* erit *qm* = AC (§. 251 *Geom.*). Est vero *tm* = AC (§. 257 *Geom.*). Ergo *qm* = *mt* (§. 87 *Arith.*), consequenter *tm* est altitudo jactus (§. 500) & projectile parabolam A*m*B describit, cujus ideo amplitudo AB = 2A*t* (§. 499) = 2C*m* = 4CQ, ob CQ = Q*m per constr.* *Quod erat primum, secundum & tertium.*

Denique quia A*t* = C*m* (§. 257 *Geom.*) = 2CQ; $At^2 = 4CQ^2$ = 4DC . AC (§. 327. 377 *Geom.*) = 4DC . *tm per demonstr.* Ergo 4DC est parameter parabolæ in vertice *m* (§. 388 *Analyf. finit.*). *Quod erat ultimum.*

Corollarium 1.

511. Data igitur projectilis celeritate, dantur amplitudines & altitudines omnium jactuum, qui fieri possunt eadem opera. Ducta enim EA, erit sub angulo elevationis EAB altitudo AI, amplitudo 4IE; sub angulo elevationis FAB altitudo AH, amplitudo 4HF (§. 510).

Corollarium 2.

512. Cum AB sit ad AD perpendicularis *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 304 *Geom.*), & hinc angulus ADQ angulo elevationis RAB æqualis (§. 323 *Geom.*) consequenter AIQ est duplus anguli elevationis (§. 313 *Geom.*). Est itaque CQ quarta pars amplitudinis (§. 510) sinus rectus; AC altitudo jactus (§. *cit.*) sinus versus anguli dupli elevationis (§. 2 *Trigon*).

Scholion.

513. *Hinc facili opera deducuntur, quæ supra per analysin invenire docuimus, ut ejus in hisce usum ostenderemus.*

Problema 101.

514. *Data altitudine jactus* (*Vid. Fig.* §. 510) tm *aut amplitudine* AB, *una cum*

cum angulo elevationis RAB *invenire projectilis celeritatem, qua ab initio fertur, hoc est, altitudinem* AD, *unde cadendo istiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum AC = *tm* sit sinus versus, CQ = $\frac{1}{4}$AB (§. 512) sinus rectus anguli AIQ (§. 2 *Trigon.*), quem esse anguli elevationis RAB duplum ex demonstratione §. 412 constat: quæratur ad sinum versum anguli dupli elevationis, sinum totum & altitudinem jactus: vel ad sinum rectum anguli dupli elevationis, sinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ sive IA, cujus duplum AD est altitudo quæsita (§. 510).

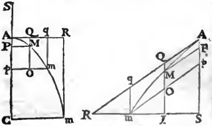
SCHOLION.

515. *Potuisset quoque curva projectionis analytice investigari & quidem in omni gravitatis hypothesi possibili: quod ut appareat, sequens subjungere lubet problema.*

PROBLEMA 102.

516. *Invenire curvam projectionis, directionibus gravium suppositis parallelis, in medio non resistente.*

RESOLUTIO.



Ponamus corpus grave sive horizontaliter sive oblique projici secundum directionem AR, AM*m* esse curvam projectionis, AP abscissam, PM semiordinatam. Sit AP = QM = x, PM = AQ = y. Intelligatur semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua, erit Pp = dx, Om = dy. Quoniam projectile in medio non resistente movetur *per hypoth.* motus, quo vi impressa movetur æquabilis (§. 71). Porro cum grave dum motu composito per M*m* fertur (§. 238) per spatiolum infinite parvum MO = Pp descendens, isto tempusculo etiam æquabiliter moveatur: erit MO ad Om ut celeritas per AP acquisita ad celeritatem constantem per AR (§. 33.). Sit igitur celeritas acquisita cadendo per A = v, celeritas vero constans per AR = 1; erit

$$dx : dy = v : 1$$

ideoque $dx = v dy$

$$dx : v = dy$$

$$\int v^{-1} dx = y$$

Data igitur celeritate v a gravi in M acquisita per x; reperietur æquatio ad curvam projectionis.

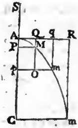
Jam in hypothesi *Galilæi* $v = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 87. 89).

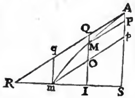
$$\text{Ergo } dy = x^{-1:2} dx$$

$$\text{hoc est, } y = 2x^{1:2} = 2\sqrt{x}$$

$$y^2 = 4x$$

Est ergo in hypothesi *Galilæana* curva projectionis parabola, cujus parameter 4 (§. 388 *Anal. fin.*): quemadmodum superius demonstratum (§. 480). Quoniam $x : y = y : 4$, hoc est, AP : PM = PM : 4, sive QM : AQ = AQ : 4; parameter curvæ projectionis est tertia proportionalis ad spatium, quod in tempore quocunque grave cadendo confi-





conficit, & spatium, quod vi impressa describit: quemadmodum supra reperimus (§. 480).

Sit in hypothesi *Baliana* v ut x: erit

$$dy = x^{-1}dx = \frac{dx}{x}$$

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

$$= lx \text{ (§. 243 } \textit{Analys. infinit.}\text{)}.$$

Sunt igitur abscissæ AQ, Aq &c. ut logarithmi semiordinatarum QM, qm &c. consequenter curva projectionis est Logarithmica, cujus subtangens $= 1$ (§. 553 *Analys. finit.*).

SCHOLION.

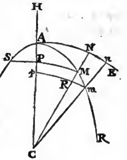
517. *Supposuimus directiones parallelas, propterea quod lineæ in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi possunt citra errorem assignabilem in iis distantiis, in quibus experimenta capere licet. Quod si tamen desideraveris problema solvi in hypothesi linearum directionis convergentium; solutionem dudum dedit Vir summus* Newtonus (a): *dederunt deinde Geometræ celeberrimus* Hermannus (b) *aliique ab eodem laudati* (c). *Nos sequentem subjungimus, ne quid in hoc argumento desiderari possit.*

PROBLEMA 103.

518. *Invenire curvam projectionis in hypothesi gravitatis cujuscunque directionibus in centro Telluris convergentibus.*

(a) In Principiis Philos. natur. Mathem. prop. 41. lib. 1.
(b) In Phoronomia lib. 1. prop. 23. §. 262.
(c) Loc. cit. §. 264.

RESOLUTIO.



Sit curva projectionis AMR & linea directionis ex centro Telluris C ducta CN. Intelligatur Cn radius ipsi CN infinite propinquus, & radio CA $=$ CN $= Cn$ descripto arcu AB, ducantur porro radiis CM & Cm arcus concentrici PM & pm. Sit denique AH altitudo, per quam grave cadendo acquirit eam celeritatem, qua vi impressa movetur, ac deinde per curvam AMR descendat vi impressa & velocitate vi gravitatis quomodocunque accelerata. Dicatur jam AH $= a$, AP $= x$, AC $= b$, arcus AN $= y$; erit $Pp = RM = dx$, $Nn = dy$, PC $=$ MC $= mC$ (§. 4 *Analys. infinit.*) $= b - x$. Porro propter sectores similes CNn & CRm; erit (§. 137. 412 *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$

$$b : b - x = dy :$$

ideoque

$$Rm = (b - x)\,dy : b$$

$$Rm^2 = (b - x)^2 dy^2 : b^2$$

$$MR^2 = dx^2$$

$$Mm^2 = \frac{b^2dx^2 + (b - x)^2dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile urgetur per MR vi gravitatis, seu quæ caden-

cadendo per altitudinem AP acquiritur $= z$; altera vero, qua per arculum *m*M motu composito fertur, seu quæ cadendo per HP acquiritur $= v$. Quoniam in spatiolis infinite parvis M*m* & RM motus æquabilis; $MR : Mm = z : v$ (§. 33) consequenter

$$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2 \text{ (§.260 } Arith.)$$

hoc est, $dx^2 : \frac{b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$

$$b^2dx^2 : b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2 = z^2 : v^2$$

$$v^2b^2dx^2 = b^2z^2dx^2 + (b-x)^2z^2dy^2$$

$$v^2b^2dx^2 - b^2z^2dx^2 = (b-x)^2z^2dy^2$$

$$bdx\sqrt{(v^2 - z^2)} = zdy(b-x)$$

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b-x)}$$

$$y = \int \frac{bdx\sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b-x)}$$

Quodsi jam valor ipsius v atque z exprimatur per x ex hypothesi gravitatis; prodit æquatio ad curvam projectionis specialem.

In hypothesi *Galilæana* $v = \sqrt{HP} = \sqrt{(a+x)}$ & $z = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$ (§.87. 89). Substitutis itaque hisce valoribus in æquatione differentiali generali, prodit specialis

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(a+x-x)}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}}.$$

Pendet ideo constructio hujus curvæ a quadratura alterius curvæ, cujus abscissa x, semiordinata vero $ab\sqrt{a} : (b-x)\sqrt{x} = a^2b : (b-x)\sqrt{ax}$. Nimirum si areæ hujus curvæ dividuntur per a, seu rectam AH, unde projectile acquirit celeritatem, qua vi impressa movetur; prodeunt arcus respondentes AN eo modo, quem jam exposuimus, cum de curva isochrona in hypothesi directionum in centro Telluris convergentium ageremus (§.336). Construitur autem Curva, a cujus quadratura pendet constructio Curvæ projectionis, ope parabolæ circa axem AC parametro AH descripta, ut semiordinata abscissæ AP respondens sit $\sqrt{ax} = PS$. Est enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam proportionalem & ut CP ad CA ita tertia hæc proportionalis ad semiordinatam Curvæ quadrandæ.

Fiat $b = \infty$: quo in casu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x respectu $b = o$, ideoque $b - x = b$, consequenter

$$dy = \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{bdx\sqrt{a}}{b\sqrt{x}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1:2}x^{-1:2}dx$$

$$y = 2a^{1:2}x^{1:2} = 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = 4ax$$

Est igitur curva projectionis in hoc casu parabola (§. 388 *Analys. finit.*), quemadmodum ante reperimus (§.516), & parameter $4a$ est quadrupla altitudinis AH, unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem, qua projicitur.

SCHOLION.

519. *Curva projectionis* Trajectoria *appellari solet, qua denominatione quoque utitur* Newtonus.

CAPUT XII.

De Motu Corporum ex Percussione.

DEFINITIO 55.

520. *Corpus perfecte durum* est, quod ab ictu figuram non mutat.

Corpus molle est, quod ab ictu figuram pristinam amittit, ut argilla, sebum, cera.

DEFINITIO 56.

521. *Corpus elasticum* est, quod ab ictu figuram quidem mutat, sed vi propria in eandem rursus restituitur. Talis est ensis, qui ad ictum incurvatur, sed statim resilit in figuram pristinam.

DEFINITIO 57.

522. *Corpus unum in alterum directe impingere* dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

523. Sphæra igitur A directe in alteram B impingit, si linea directionis centra utriusque jungit (§. 38 *Analys. infinit.*).



DEFINITIO 58.

524. *Corpus unum in alterum indirecte* vel *oblique impingere* dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum obliquam.

DEFINITIO 59.

525. *Centrum percussionis* est punctum, in quo ictus est maximus.

AXIOMA 8.

526. *Actioni æqualis, sed contraria est reactio.*

SCHOLION.

527. *Hoc legum motus principium ab experientia petitur & a celeberrimo* Newtono (a) *his exemplis illustratur.* „ Si quis, inquit, lapidem digito „ premit, premitur & hujus digitus a lapide. „ Si equus lapidem funi alligatum trahit, re- „ trahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: „ nam funis utrinque distentus eodem relaxan- „ di se conatu urgebit equum versus lapidem „ ac lapidem versus equum, tantumque impe- „ diet progressum unius, quantum promovet „ progressum alterius. Si corpus aliquod in „ corpus aliud impingens, motum ejus vi sua „ quomodocunque mutaverit, idem quoque vi- „ cissim in motu proprio eandem mutationem in „ partem contrariam vi alterius (ob æqualita- „ tem pressionis mutuæ) subibit.

THEOREMA 71.

528. *Effectus pleni sunt viribus causarum suarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit (§. 25), vis determinata indifferens non est, ideoque ipsi determinata effectus quantitas ex necessitate respondet. Quare si vis V ut V, seclusa omni vi alia sive adjuvante, sive impediente, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E ut E producet; consequenter mV ut mV (ubi m notat multiplum aut submultiplum ipsius V) producet effectum mE ut mE. Est igitur $V : mV = E : mE$ (§. 149 *Arith.*) hoc

(a) Princip. Mathem. Philos. Natural. pag. 13. conf. Cosmologia nostra generalis, §. 316. 346.

hoc est, effectus pleni sunt viribus suarum caussarum proportionales. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

529. Vires igitur motum producentes si fuerint æquales, eandem motus quantitatem producunt (§. 528) addendam mobili secundum eandem directionem progredienti (§. 76), subtrahendam vero, si secundum contrariam progredi nitatur (§. 77).

THEOREMA 72.

530. *Si corpus unum* (*Vid. Fig. §. 523*) A *in alterum* B *vel quiescens vel tardius motum secundum eandem directionem, vel etiam secundum contrariam ipsi obvium factum impingat; summa motuum in corporibus secundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias eadem erit ante & post ictum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem, sitque quantitas motus ipsius A $= a$, ipsius B $= b$, erit summa motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipsius B juxta ejusdem directionem, in conflictu incrementum quoddam motus efficit (§. 22). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 526), ob contrarias virium æqualium directiones tantum motus subtrahitur ex A, quantum additur ipsius B (§. 529). Unde si quantitas motus ipsius B fuerit post ictum $= b + c$; erit quantitas motus ipsius A post ictum $= a - c$. Summa igitur motuum $b + c + a - c = b + a$ eadem post ictum, quæ ante ictum. Si B quiescit, erit motus quantitas ante ictum $= 0$, ideoque motuum summa $= a$. Sed si post ictum quantitas motus ipsius B $= c$ *per demonstr.* quantitas motus ipsius A $= a - c$. Unde denuo summa motuum eadem ante & post ictum, hoc est, $= a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipsius B, qua efficitur motus $a - c$ *per demonstrata*, destruitur quantitas motus a & efficitur motus secundum directionem contrariam impulsi corporis A $= c - a$. Differentia igitur motuum post ictum in corporibus B & A secundum contrarias directiones motis $= b + c - c + a$ eadem est quæ summa ante ictum $a + b$.

Si $c = a$, reactione ipsius B destruitur motus in A, ideoque corpus A quiescit, & B versus eandem plagam solum progreditur. Unde denuo summa motuum post ictum $a + b + 0$ æquatur summæ ante ictum $a + b$.

Si corpora A & B sibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a - b$. Sit post conflictum quantitas motus ipsius B $= c$: destruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c. Reactione igitur ipsius B in A destruitur motus $b + c$, ideoque post conflictum remanet motus $a - b - c$. Quodsi $a > b + c$, progrediuntur A & B post conflictum juxta eandem directionem estque summa motuum $a - b - c + c$ eadem quæ differentia $a - b$ ante ictum.

Quodsi $c + b > a$, destruitur reactione ipsius B $= c + b$ motus a & efficitur secundum contrariam directionem motus $c + b - a$, ideoque B & A resiliunt secundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum post ictum $c - c - b + a$ eadem est, quæ fuerat ante ictum $a - b$.

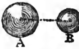
Denique si $b + c = a$, reactione ipsius B destruitur motus totus in A, qui ideo

R 2 post

post ictum $=0$. Unde summa motuum $c = a - b$ eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA 73.

531. *Si duo corpora A & B pondere æqualia & non elastica, æqualibus celeritatibus lata, sibi mutuo occurrunt, post ictum ambo quiescunt.*



DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B massæ atque celeritates æquales sint *per hypoth.* motuum quantitates æquales sunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla est. Quodsi post ictum secundum eandem directionem progrederentur; summa motuum deberet esse nulla (§. 530), secundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum secundum contrarias se mutuo urgeant eadem vi, nec ulla sit ratio, cur a se invicem resiliant *per hypoth.* secundum directiones contrarias moveri nequeunt. Post ictum ergo ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 74.

532. *Si corpus elateris expers (Vid. Fig. §. 531) A in aliud itidem non elasticum B directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; post ictum ambo eadem celeritate movetur secundum eandem directionem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B sive quiescens, sive segnius motum, urgebit ipsum secundum directionem suam, ideoque cum nulla adsit ratio, cur a se invicem resiliant *per hypoth.* si A vincat, B necessario movebitur secundum directionem ipsius. *Quod erat unum.*

Quodsi jam A & B secundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam insequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiscitur, quam habet ipsum A, motui ejus non amplius resistit, ideoque fugit, consequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 75.

533. *Si corpus elateris expers (Vid. Fig. §. 531) A in aliud non elasticum B quiescens directe incurrat, celeritas post ictum est ad celeritatem ante ictum ut pondus ipsius A ad ponderum A & B summam.*

DEMONSTRATIO.

Sit massa ipsius $A = M$, alterius $B = m$, celeritas prioris $= C$, erit quantitas motus ipsius $A = MC$ (§. 22), ipsius B vero nulla, ideoque motuum summa post ictum $= MC$ (§. 530), consequenter celeritas $= MC:(M+m)$ (§. 532. 22). Est ideo ut $M+m$ ponderum summa ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

534. Quodsi corpora A & B fuerint ejusdem ponderis; erit $M = m$, ideoque celeritas post ictum $= MC : 2M = \frac{1}{2}C$. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA 76.

535. *Si corpus elateris expers (Vid. Fig. §. 531) A in aliud non elasticum B tardius motum secundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas post*

post ictum æqualis motuum summæ per ponderum summam divisæ.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit motus quantitas ante conflictum MC & *mc* (§.22), ideoque summa eorundem MC + *mc*: quæ cum eadem sit post conflictum (§. 530), erit celeritas communis (§.532) corporum A & B post eundem (MC+*mc*):(M+*m*)(§.22). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit M = *m*, ideoque celeritas post ictum M(C+*c*):2M = (C+*c*):2, seu semisumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA 77.

537. *Si duo corpora non elastica, pondere æqualia, diversis celeritatibus lata, sibi mutuo directe occurrant; post conflictum feruntur celeritatum semidifferentia, qua movebantur ante ictum.*

DEMONSTRATIO.

Sit massa communis = M, celeritates sint ut C & *c*; erit differentia motuum M(C—*c*); cui cum æqualis sit post conflictum summa eorundem (§. 530) erit celeritas communis = M(C—*c*):2M = (C—*c*):2, hoc est, æqualis velocitatum ante impactum semidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 78.

538. *Si duo corpora non elastica (Vid. Fig. §. 531) A & B iis celeritatibus sibi mutuo directe occurrant; quæ sunt reciproce ut pondera eorundem; ambo post ictum quiescunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & *m*, celeritates C & *c*; quoniam M:*m* = *c*:C *per hypoth.* erit *mc* = MC, ideoque motuum differentia ante conflictum nulla (§. 22). Ergo summa motuum post ictum cum nihilo æqualis sit (§. 530); nullus quoque post ictum erit motus, hoc est, ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 79.

539. *Si duo corpora non elastica A & B eadem celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad summam eorundem.*

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas = C, massæ corporum A & B ut M & *m*; erit differentia motuum ante impactum (M—*m*)C (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 530); erit velocitas communis post eundem =(M—*m*)C:(M+*m*) (§.22), hoc est, ut ponderum summa ad differentiam eorundem ita celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 80.

540. *Si duo corpora non elastica A & B quacunque celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post ictum æqualis differentiæ motuum per summam ponderum divisæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit differentia motuum ante ictum MC — *mc* (§.22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§.530); erit velocitas communis post eundem (MC—*mc*):(M+*m*)(§.22). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA 102.

541. *Determinare partem quantitatis motus in conflictu amissam a fortiori.*

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante conflictum, ducatur in massam ejus, ita habebitur quantitas motus ante conflictum (§. 22).
2. Similiter celeritas, qua idem fertur post conflictum, ducatur in massam ejus, ita habebitur quantitas motus post conflictum (§. *cit.*).
3. Quodsi motuum quantitatem posteriorem a priori auferas, relinquetur pars amissa.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis sibi mutuo occurrant celeritatibus C & c, erit celeritas post conflictum $= \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$ (§. 537). Ergo motus quantitas in fortiori post conflictum est $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum in eodem erat MC. Motus ergo quantitas amissa est $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Quare integra motus quantitas ad partem amissam ut MC ad $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$, hoc est, ut 2C ad C + c, seu ut dupla celeritas fortioris ad summam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

542. *Hac ergo methodo inveniri possunt theoremata de quantitate motus in conflictu amissa & inde magnitudinem ictus æstimare licet.*

DEFINITIO 60.

543. *Impetum* cum *Leibnitio* (a) appello quantitatem motus, seu id quod efficitur ducendo massam in celeritatem (§. 22), quodque ideo vi mortuæ æquipollet (§. 278).

AXIOMA 9.

544. *Si corpus aliquod non elasticum in obicem, qui cedere nequit, impingit, motus omnis cessat.*

(a) In actis Erudit. An 1695, pag. 145.

COROLLARIUM.

545. Si ergo corpus quoddam non elasticum in obicem cedere nescium impingit; impetum omnem amittit (§. 543).

SCHOLION.

546. *Propositio per experientiam satis manifesta, ut ideo eam instar axiomatis sumere licuerit, nec opus sit ex notione elateris deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA 81.

547. *Centrum percussionis idem est cum centro oscillationis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percusionis est punctum, in quo colligitur impetus omnis, seu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 525). Invenitur ideo si impetus partium considerentur instar ponderum ad lineam inflexilem ac gravitatis expertem applicatorum, hoc est, dividendo summam factorum ex impetibus partium in distantias a puncto suspensionis per summam impetuum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oscillationis (§. 431). Ergo centrum oscillationis idem est cum centro percussionis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Quæ igitur supra de centro oscillationis dicta sunt, eadem quoque de centro percussionis valent, si grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA 82.

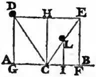
549. *Centrum percussionis idem est cum centro gravitatis, si corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur seu eadem celeritate moventur.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Impetus enim sunt facta ex ponderibus in celeritates (§. 543). Quare si æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde est, ac si eorum æquimultiplicia sumas. Sed æquiponderantium æquimultiplicia quoque æquiponderant (nam si A æquiponderet ipsi B, etiam 2A ipsis 2B & in genere *m*A ipsis *m*B æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis impetus æquivalentes disponuntur, consequenter centrum gravitatis cum centro percussionis in hoc casu coincidit.

DEFINITIO 61.



550. *Angulus incidentiæ* DCA est, quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C.

DEFINITIO 62.

551. Quodsi post ictum reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi CE efficit ad punctum contactus, unde resilit.

THEOREMA 83.

552. *Ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ* DCA.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipsum obicem, si superficies plana, aut in rectam, quæ eundem in contactu C tangit, si superficies curva, & compleatur rectangulum DHCG. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (§. 241 245). Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, sed tantum alteri DG; perinde est ac si corpus D tantum percuteret obicem vi secundum DG agente. Æstimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amisso (§. 542) impetus vero ex quantitate motus (§. 543), ideoque cum corpus idem sit, ex celeritate (§. 49), consequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 247). Est ideo impetus corporis D per DC ad impetum per DG ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, destruitur tantum ab obice impetus per DG *per demonstr.*; si vero perpendiculariter seu directe impingeret, destrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc est, per DC (§. 241). Est ergo ictus perpendicularis ad obliquum ut DC ad DG. Sed si DC sumatur pro sinu toto, erit DG sinus anguli incidentiæ DCG (§. 2 *Trig.*). Ictus itaque perpendicularis ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. *Q.e.d.*

THEOREMA 84.

553. *Elater est æqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

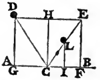
Corpus elasticum adhuc ulterius comprimi aut tendi potest, nec tamen comprimitur aut tenditur *per hypoth.* Ergo tanta vi resistit, quanta comprimitur

mitur vel tenditur (§. 75). Resistit autem vi elateris (§. 521): ideoque elater æqualis est vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elasticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA 85.



555. *Si corpus* H *in obicem* AB, *qui cedere nescit, directe impingat, sitque vel utrumque, vel alterutrum elasticum, eadem celeritate reflectitur per eandem rectam* CH, *qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, tota vis corporis H in resistentiam obicis frangendam insumeretur, motusque cessaret (§. 544). Ergo vis omnis impenditur in compressionem corporis elastici, atque ideo hoc acquirit vim elasticam isti æqualem (§. 553). Cum igitur elater, absumta vi comprimente, corpus reducat in statum pristinum (§. 521); eadem vi illud repellit, qua impegerat, consequenter hoc eadem celeritate resilit. Et quoniam corpus elasticum se restituit secundum directionem, secundum quam compressum fuerat (nulla enim adest ratio, quæ directionem immutet); corpus resilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA 86.

556. *Si corpus elasticum (Vid. Fig. §. 555)* D *oblique impingit in obicem* AB, *qui cedere nescit, ita post ictum resilit, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione theorematis 83. (§. 552) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum ideo post ictum remaneat vis per DH sive CF & per vim elasticam recuperetur vis DG sive CH (§. 555); corpus post ictum iisdem viribus urgetur per CF & CH, quibus urgebatur ante conflictum, ideoque motu composito describet rectam CE dato tempore ipsi DC æqualem, eruntque eodem tempore HE & DH æquales utpote ab eadem vi descriptæ (§. 241). Sunt igitur △△ DCH & CHE æqualia angulique cognomines æquales (§. 204 *Geom.*), consequenter, cum HCA = HCF (§. 79 *Geom.*), DCA = ECF (§. 91 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 103.

557. *Determinare angulum (Vid. Fig. §. 555)* ECF, *sub quo resilire debet corpus in* C *oblique impingens, ut ex* D *in* E *via brevissima perveniat, supposita nempe reflexione in* C.

RESOLUTIO.

Demissis ex D & E perpendicularibus DG & FE, fiat $DG = a$, $EF = b$, $FG = c$, $CG = x$; erit $CF = c - x$, $DC^2 = a^2 + x^2$, $CE^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Quoniam DC + CE est minimum

mum aliquod *per hypoth.* fiat (§.63 *Analys. infinit.*).

$$\sqrt{(a^2+x^2)} + \sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = y$$

erit $(xdx):\sqrt{(a^2+x^2)} + (xdx - cdx:\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = dy = 0$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} + (x-c)\sqrt{(a^2+x^2)} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = (c-x)\sqrt{(a^2+x^2)}$$

hoc est, CG . CE = CF . CD

Est itaque CG : CD = CF : CE (§.299 *Arith.*). Quodsi DC sumatur pro sinu toto, erit GC sinus anguli GDC, & si CE sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli CEF (§.2 *Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum similium sinus (§. 12 *Trigon.*), ideoque anguli GDC & CEF (§. 141 *Geom.*), consequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§. 246 *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D post impactum in C ita resilit, ut angulus reflexionis ECF sit æqualis angulo incidentiæ DCG (§. 556); ex D in E, supposita reflexione in C, via brevissima pervenit.

PROBLEMA 106.

559. *Determinare punctum* (*Vid. Fig.* §. 555) C, *in quod impingere debet corpus* D, *ut resiliens incurrat in corpus* L.

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendiculum $= a$. Dato puncto L, datur LI $= b$, consequenter GI $= c$. Fiat GC $= x$, erit CI $= c - x$. Et quia angulus LCI = DCG (§. 556), G vero & I recti *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*).

DG : LI = GC : CI

$$a : b = x : c - x$$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§. 190 *Arith.*), hoc est, DG + LI : DG = GI : GC.

THEOREMA 87.

560. *Si corpus elasticum* A *in aliud quiescens* B *eidem æquale directe incurrat; post ictum quiescet* A, *&* B *movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur* A.



DEMONSTRATIO.

Si corpora non essent elastica, utrumque post ictum moveretur secundum eandem directionem celeritate dimidia (§. 534). Sed cum vis elastica secundum eam directionem agat, secundum quam facta est compressio, sitque vi comprimenti æqualis (§. 553); dimidia celeritate repellit A, ideoque motum ejus sistit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit, ideoque motum ejus accelerat (§. 76). Fertur itaque post ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A, & A quiescit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.



561. Cum ideo A omnem suam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, C rursus in D, & D tandem in E transferre debet. Quare si fuerint plura corpora elastica pondere æqualia & se mutuo tangentia; atque A impingat in B, quiescentibus omnibus intermediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A.

THEOREMA 88.



562. *Si duo corpora elastica* A & B *pondere æqualia celeritate æquali sibi mutuo directe occurrant, utrumque resiliet ea celeritate & secundum eam directionem, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, ambo quiescerent (§. 531). Omnis ergo vis in compressione consumitur. Huic ideo cum æqualis sit vis elastica (§. 533), qua resiliunt secundum directionem, qua advenerant (§. 555); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem pristinæ æqualem producit. Resiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA 89.

563. *Si duo corpora elastica* A & B (*Vid. Fig. §. 562*) *pondere æqualia celeritate inæquali sibi mutuo directe occurrant; post ictum celeritatibus permutatis feruntur.*

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus C + *c* & C. Quodsi eadem celeritate C concurrerent, A & B post ictum moverentur celeritate C (§. 562). Si B quiesceret & A celeritate *c* in ipsum incurreret, post ictum quiesceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 560). Ergo excessus celeritatis *c*, quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B, ideoque ipso peracto A movetur celeritate C, B vero celeritate C + *c*. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

564. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se invicem accedebant.

THEOREMA 90.

565. *Si corpus elasticum* (*Vid. Fig. §. 562*) A *in aliud* B *æqualis ponderis & segnius motum incurrat; post ictum ambo permutatis celeritatibus feruntur secundum eandem, nempe pristinam, directionem.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate C + *c* in B celeritate C motum. Quoniam ob celeritates C & C æquales nullus fit impulsus, perinde est ac si A sola celeritate *c* in B quiescens impingeret. Tum vero quiesceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 560). Ergo post ictum A movebitur sola celeritate C, B vero celeritate C + *c*, & utrumque quidem secundum pristinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

566. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se mutuo accedebant.

THEOREMA 91.

567. *Si corpus* (*Vid. Fig. §. 562*) A *in alterum* B *incurrit; ictus idem est, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum differentia velocitatum incurrente.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & *m*, celeritates C & *c*, erit celeritas communis post impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 535), ideoque impetus ipsius A $= (M^2C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543), consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2C - Mmc) : (M + m) =$ $(M^2C$

$(M^2C+MmC-M^2C-Mmc):(M+m)=Mm(C-c):(M+m)$ (§.541). Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C-c$; erit celeritas post ictum $=(MC-Mc):(M+m)$ (§.533), ideoque impetus $(M^2C-M^2c):(M+m)$ (§.543), consequenter per ictum amissus $MC-Mc-(M^2C+M^2c):(M+m)=(M^2C-M^2c+MmC-Mmc-M^2C+M^2c):(M+m)=Mm(C-c):(M+m)$ (§.541). In utroque igitur casu idem impetus amittitur, consequenter ictus idem est (§.542).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§.554); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA 92.

569. *Si duo corpora (Vid. Fid. §.562) A & B sibi mutuo occurrunt, ictus idem contingit, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum summa velocitatum impingente.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis post impactum $(MC-mc):(M+m)$ (§.540), ideoque impetus ipsius A seu fortioris $(M^2C-Mmc):(M+m)$, consequenter impetus per ictum amissus $=MC-(M^2C+Mmc):(M+m)$ (§.541) $=(M^2C+MmC-M^2C+Mmc):(M+m)=(MmC+Mmc):(M+m)=Mm(C+c):(M+m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C+c$, erit celeritas post ictum $=(MC+Mc):(M+m)$ (§.533), ideoque impetus $(M^2C+M^2c):(M+m)$ (§.543), consequenter per ictum amissus $MC+Mc-(M^2C-M^2c):(M+m)$ (§.541) $=(M^2C+M^2c+MmC+Mmc-M^2C-M^2c):(M+m)=(MmC+Mmc):(M+m)=Mm(C+c):(M+m)$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

570. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§.554), in corpora A & B cum summa velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA 107.

571. *Determinare celeritatem corporum elasticorum quorumcunque (Vid. Fig. §.562) A & B celeritatibus quibuscunque directe concurrentibus.*

RESOLUTIO.

I. Si corpora A & B in easdem plagas tendant, post ictum vi solius impulsus secundum eandem moventur celeritate communi $(MC+mc):(M+m)$ (§.535). Accedat jam vis elastica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C-c$ (§.568), ideoque cum in momento ictus A & B corpus unum constituant, eandem ita distribuit, ut celeritates, post ictum a vi elastica acquisitæ sint in ratione massarum reciproca. Si ergo celeritas ipsi B acquisita $=x$, erit

$$M:m=x:C-c-x$$
$$MC-Mc-Mx=mx$$
$$MC-Mc=Mx+mx$$
$$(MC-Mc):(M+m)=x$$

Hinc celeritas ipsi A acquisita $=C-c-(MC+Mc):(M+m)=(MC-Mc+mC-mc-MC+Mc):(M+m)=(mC-mc):(M+m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius, celeritas hæc subtrahenda est ab ea, quæ per solum impul-

 sum

ſum acquiritur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat, celeritas x, hoc



eſt, $(MC - Mc):(M + m)$ addenda eſt priori per impulſum ſolum acquiſitæ (§. 76). Unde tandem prodit celeritas ipſius $A = (MC + mc - mC + mc):(M + m) = (MC - mC + 2mc):(M + m)$, & ipſius $B = (MC + mc + MC - Mc):(M + m) = (2MC + mc - Mc):(M + m)$.

E. gr. Sit $M = 6$ librarum, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit poſt conflictum celeritas ipſius $A = (18 - 12 + 16):(6 + 4) = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$ & ipſius $B = (36 + 8 - 12):10 = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B verſus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M = 2$, $m = 6$, $C = 4$, $c = 1$; erit poſt conflictum celeritas ipſius $A = (8 - 24 + 12):(2 + 6) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; celeritas ipſius $B = (16 + 6 - 2):(2 + 6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipſius A negativa prodeat, id indicio eſt, celeritatem per actionem elateris acquiſitam eſſe majorem celeritate per impulſum acquiſita, ideoque corpus A reſilire poſt ictum. Poſt conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia ſibi mutuo occurrant, in conflictu per impulſum ſolum utrique acquiritur celeritas $(MC - mc):(M + m)$ (§. 540). Cum vis elaſtica in corpora, quæ inter ſe colliduntur, agat cum celeritate $C + c$ (§. 570), ſi celeritas ipſi B inde acquiſita ſit x, erit vi ſuperiorum.

$$M : m = x : C + c - x$$

$$MC + Mc - Mx = mx$$

$$MC + Mc = Mx + mx$$

$$(MC + Mc):(M + m) = x$$

Hinc celeritas, quæ ipſi A acquiritur, $C + c - (MC - Mc):(M + m) = (MC + Mc + mC + mc - MC - Mc):(M + m) = (mC + mc):(M + m)$. Unde tandem ut ante prodit celeritas ipſius $A = (MC - mc - mC - mc):(M + m) = (MC - mC - 2mc):(M + m)$; celeritas vero ipſius $B = (MC - mc + MC + Mc):(M + m) = (2MC + Mc - mc):(M + m)$. Quodſi $mC + 2mc > MC$, celeritas ipſius A eſt negativa, quod oſtendit, vim elaſticam eſſe impulſu ſuperiorem, ideoque corpus A reſilire, nec progredi cum reſiliente B.

E. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit poſt conflictum celeritas ipſius $A = (18 - 12 - 16):10 = -1$ & ipſius $B = (36 + 12 - 8):10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur ideo corpus B cum quatuor gradibus celeritatis, & A cum uno.

COROLLARIUM 1.

572. Quoniam $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC + 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$, & $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} = \frac{Mc + mc + 2MC - 2Mc}{M + m} = c + \frac{2MC - 2Mc}{M + m}$, atque $(2MC - 2Mc):(M + m)$ & $(2mC - 2mc):(M + m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum differentiam ante impactum (quæ *celeritas reſpectiva* dicitur) ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum ſummam; ſi corpus elaſticum A in aliud B ſive quieſcens, ſive tardius motum incurrat, invenitur celeritas poſt impactum corporis A, ubi fiet: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius B, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ ex celeritate ipſius A ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejuſdem poſt impactum.* Celeritas vero ipſius B reperitur, ſi fiat: *Ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius A, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ addita celeritati ipſius B prodit celeritas hujus poſt impactum.*

COROLLARIUM 2.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M + m}$, & $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c$, atque $(2mC + 2mc):(M + m)$,

$+ m)$, & $(2MC + 2Mc):(M + m)$ sunt celeritates, quæ se habent ad celeritatum ante impactum summam (quæ *celeritas respectiva* dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem summam; si duo corpora elastica A & B sibi mutuo occurrant, invenitur post impactum corporis A celeritas, ubi fiat: *ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius* B, *ita celeritatum ante impactum summa ad celeritatem, quæ ex celeritate ipsius* A *ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum*. Celeritas vero ipsius B invenitur, si fiat: *ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius* A *ita summa celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua subducta celeritas ante impactum relinquit eam, quæ inest post eundem*.

THEOREMA 93.

574. *Si corpus elasticum (Vid. Fig. pag. præc.)* A *directe impingit in aliud quiescens* B; *erit celeritas ejus post conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad summam eorundem, quam vero communicat cum* B, *ea ad eandem est ut duplum pondus ipsius* A *ad ponderum summam*.

DEMONSTRATIO.

Si B non quiescit, celeritas ipsius A post ictum est $(MC - mC + 2mc):M + m)$ (§. 571). Si vero quiescit, celeritas ipsius B ante conflictum nulla est, ideoque $c = o$. Quare cum in hoc casu fiat $2mc = o$; erit celeritas ipsius A post impactum $= (MC - mC):(M + m)$. Est itaque ad C celeritatem ante conflictum ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem summam. *Quod erat unum*.

Similiter si B non quiescit, celeritas ipsius post conflictum est $(2MC + mc - Mc:(M + m)$, (§. 571). Jam si quiescit, celeritas ejus ante conflictum nulla est, ideoque $c = o$, consequenter $mc = o$ & $Mc = o$. Quare celeritas ipsius B post conflictum $=$ $2MC:(M + m)$. Est igitur ad celeritatem ipsius A ante conflictum ut duplum ponderis A ad summam ponderum. *Quod erat alterum*.

COROLLARIUM.

575. Erit ergo ex æquo post conflictum velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B ut differentia ponderum ad duplum ipsius A (§. 196 *Arith.*).

THEOREMA 94.

576. *Si duo corpora elastica* A & B *sibi mutuo directe occurrunt cum celeritatibus, quæ ipsorum ponderibus reciproce proportionales sunt; post conflictum eadem celeritate a se invicem resiliunt, qua advenerant*.

DEMONSTRATIO.

Post conflictum celeritas ipsius A est $(MC - mC - 2mc):(M + m)$, & celeritas ipsius B est $(2MC + Mc - mc):(M + m)$ (§. 571). Est vero $M:m = c:C$ *per hypoth.* ideoque $mc = MC$ (§. 297 *Arith.*). Quod si ergo in expressione celeritatis ipsius A pro $2mc$ substituas $2MC$, prodibit $(-mC - MC):(M + m) = -C$. Resilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum*.

Quodsi similiter in expressione celeritatis ipsius B pro $2MC$ substituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc):(M + m) = c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum*.

THEOREMA 95.

577. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; differentia celeritatum tam ante, quam post impulsum eadem*.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante con-

te conflictum C & *c*; erit earum differentia $= C - c$, & corpus M, quod sequitur, in alterum *m* incurrat. Celeritas igitur ipsius M post conflictum $= \frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$; ipsius autem $m = \frac{mc + 2MC - Mc}{M + m}$ (§. 571), & quoniam post conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius *m* minor est, consequenter celeritatum differentia post conflictum $\frac{mc + 2MC - Mc - MC - 2mc + mC}{M + m} = \frac{MC - Mc - mc + mC}{M + m} = C - c$. Est ideo celeritatum differentia post conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 96.

578. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem plagam moventur, post conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum æqualis est summæ celeritatum post eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*: erit differentia earundem $C - c$. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur *per hypoth.* in alterum *m* incurrit, & post conflictum M & *m* moventur in plagas contrarias *per hypoth.* celeritas vi elastica producta in M major est celeritate ex ictu, utpote qua M cum *m* in eandem plagam progrediebatur (§. 532). Celeritas igitur in corpore M negativa est, ideoque $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$ & in corpore $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571), consequenter summa celeritatum post conflictum $\frac{MC + mC - Mc - mc}{M + m} = C - c$. Ergo summa celeritatum post conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 97.

579. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur; summa celeritatum ante conflictum æqualis est differentiæ earum post eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*: erit summa earundem $C + c$. Quoniam corpora sibi mutuo occurrunt & post conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit post conflictum celeritas corporis $M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ & corporis $m = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Est vero differentia harum celeritatum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, quæ eadem cum summa celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 98.

580. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; summa celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & *m* celeritates ante conflictum C & *c*; erit earum summa $C + c$. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, ideoque sibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Enimvero

corpus

corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, in quam ante eundem tendebat *per hypoth.* ideoque $mC + 2mc > MC$, seu celeritas post conflictum negativa, consequenter $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (*§. cit.*). Est igitur summa celeritatum post conflictum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, ideoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 99.

581. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; quantitas motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, & unum *per hyp.* in alterum incurrit; Incurrat corpus M celeritate C in corpus *m* celeritate *c* motum: erit celeritas illius post conflictum $\frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$ & hujus celeritas $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571), consequenter quantitas motus corporis M post conflictum $= \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M + m}$ & corporis $m = \frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$ (§.22). Est itaque summa motuum post conflictum $= \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M + m} = MC + mc$. Enimvero quantitas motus utriusque corporis ante conflictum in unam summam collecta erat itidem $MC + mc$ (*§. cit.*). Quamobrem patet quantitatem motus ante & post conflictum esse eandem. *Q. e. d.*

THEOREMA 100.

582. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur *per hypoth.* sibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori *m* celeritate *c* moto; erit celeritas corporis *m* post conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M + m}$ (§.571), & cum corpus M post conflictum in partem ei contrariam moveatur, qua advenerat; erit celeritas corporis M post conflictum $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (*§. cit.*) Quare quantitates motuum in corporibus M & *m* sunt $\frac{MmC + 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M + m}$, consequenter earum differentia $= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M + m} = MC - mc$. Est vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem. *Q. e. d.*

THEOREMA 101.

583. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem partem, post conflictum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus post conflictum est æqualis summæ earundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, & corpus unum *per hyp.* in alterum incurrit; incurrat corpus M celeritate C in alterum *m* celeritate *c* motum; erit celeritas

corpo-

corporis *m* $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571). Quoniam vero corpus M movetur post conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, ideoque celeritas positiva evadet $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$ (§. *cit.*). Sunt igitur quantitates motus post conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$, ideoque differentia $\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M + m} = MC +$ *mc*. Quare cum sit MC + *mc* summa quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum post conflictum æqualis est summæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 102.

584. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in easdem moventur; summa motuum post eundem æqualis est differentiæ eorundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, sibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri *m* celeritate *c* moto; erit celeritas corporis *m* post conflictum $= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ & corporis $M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ (§. 571). Sunt ideo quantitates motus post conflictum $= \frac{2MmC + Mmc - m^2c}{M + m}$ & $\frac{M^2C - MmC - 2Mmc}{M + m}$ (§. 22), consequenter summa motuum post conflictum $= \frac{M^2C + MmC - Mmc - m^2c}{M + m} = MC -$ *mc*. Quoniam differentia motuum ante conflictum est MC — *mc*, summa motuum post eundem est æqualis differentiæ motuum ante eundem.

THEOREMA 103.

585. *In conflictu corporum elasticorum hoc solo in casu eadem conservatur motus quantitas, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & post conflictum in eandem plagam moventur, aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, post eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes, post eundem in eandem tendunt. Jam in hoc solo casu, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam tendunt, summa motuum ante & post conflictum eadem (§. 581 & seqq.). In hoc igitur casu solo eadem conservatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit *Cartesius*, dum hanc statuit naturæ legem, quod in omni corporum conflictu eadem semper conservetur motus quantitas.

SCHOLION.

587. *Ut idem evidentius appareat, ostendendum porro erit, quonam in casu quantitas motus augeatur, in quonam minuatur. Eo igitur fine addimus theoremata proxime sequentia.*

THEOREMA 104.

588. *In conflictu corporum elasticorum quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum

ctum in partem eandem, post conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum post conflictum est æqualis summæ eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero summa motuum post conflictum est major differentia motuum post eundem: id quod ex terminis manifestum est (§. 61. 64 *Arith.*). Quamobrem etiam summa motuum post conflictum major est summa eorundem ante conflictum (§. 89 *Arith.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetur. *Q. e. d.*

THEOREMA 105.

589. *In conflictu corporum elasticorum quantitas motus minuitur, quando ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem feruntur; summa motuum post conflictum æqualis est differentiæ eorundem ante conflictum (§. 584). Enimvero summa motuum ante conflictum major est differentia eorundem ante conflictum: id quod ex terminis manifestum (§. 61. 64 *Arith.*). Ergo summa motuum ante conflictum major est summa motuum post eundem (§. 89 *Arith.*). Quantitas igitur motus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA 106.

590. *Corpora elastica post conflictum eadem celeritate a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum sequitur, quemadmodum in conflictu supponi debet; differentia celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi vero post conflictum itidem in eandem plagam feruntur, differentia celeritatum post conflictum est æqualis differentiæ celeritatum ante eundem (§. 577). Quoniam itaque tardius motum sequitur, celerius motum præcedit, quemadmodum ex actione elateris intelligitur, qua corpora, vi ictus eadem celeritate secundum eandem directionem progressura (§. 532), a se invicem separantur (§. 571), ideoque differentia celeritatum a se invicem discedunt; post conflictum ea celeritate a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum sequitur; differentia celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi post conflictum in diversas plagas tendunt, summa celeritatum a se invicem recedunt. Quare cum in hoc casu summa celeritatum post conflictum sit æqualis differentiæ ante eundem (§. 578); eadem celeritate etiam in hoc casu post conflictum a se invicem discedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat secundum.*

III. Quodsi duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura; summa celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi

Quodsi post conflictum tendant in eandem, cum celerius motum præcedat, tardius motum sequatur vi eorum, quæ *n. I.* dicta sunt; differentia celeritatum a se invicem recedunt. Est vero differentia celeritatum post conflictum æqualis summæ ante eundem (§. 579). Ergo corpora post conflictum eadem celeritate a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat tertium.*

IV. Denique si duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura; & post conflictum in contrarias ad se invicem discedunt; summa celeritatum ante conflictum ad se invicem accedunt, post conflictum a se invicem recedunt. Est vero in hoc casu summa celeritatum ante & post conflictum eadem (§. 580). Ergo eadem celeritate post conflictum a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

591. *Hoc theorema breviter ita enuntiatur.* In conflictu corporum elasticorum eadem semper conservatur celeritas respectiva. *Hanc propositionem alii inter leges motus referunt ac inde regulas motus demonstrant.*

COROLLARIUM.

592. Æqualibus igitur temporibus ante & post conflictum æquales sunt corporum a se invicem distantiæ, veluti quo intervallo uno minuto ante conflictum corpora a se invicem distant, eodem uno minuto post eundem a se invicem distant.

THEOREMA 107.



593. *Si duo corpora elastica* A & B *directe concurrant vel sibi mutuo occurrant, summa factorum ex massis in quadrata celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

In concursu directo celeritates post conflictum sunt $(MC - mC + 2mc):(M + m)$ vel $(mC - 2mc - MC):(M + m)$, & $(2MC - Mc + mc):(M + m)$ (§. 571). Hinc quadrata earundem $(M^2C^2 + 4MmCc - 4m^2Cc + 4m^2c^2 + m^2C^2 - 2mMC^2):(M^2 + 2mM + m^2)$, & $(4M^2C^2 + 4MmCc - 2Mmc^2 + m^2c^2 - 4M^2Cc + M^2c^2):(M^2 + 2Mm + m^2)$, consequenter priore per M, posteriore per m mutiplicato, prodit summa factorum ex massis in quadrata celeritatum $(M^3C^2 + 2Mm^2c^2 + 2M^2C^2m + M^2c^2m + Mm^2C^2 + m^3c^2):(M^2 + 2mM + m^2) = MC^2 + mc^2$, quæ eadem est summa ex factis massarum in quadrata celeritatum ante conflictum. Idem cum eodem modo in occursu corporum directo ostendatur, quo celeritas corporis m est $(2MC + Mc - mc):(M + m)$, corporis vero M est $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, vel $\frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (§. 571); patet propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. Eadem itaque in conflictu conservatur virium vivarum quantitas (§. 325).

THEOREMA 108.

595. *Si duo corpora elastica celeritatibus per conflictum acquisitis denuo in se invicem incurrere, vel sibi mutuo occurrere supponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates, quas ante primum habebant.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum M & m, celeritates ante primum conflictum C & c, ac corpus M incurrat in alterum m: erunt post conflictum celeritates eorundem corporum $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571). Quoniam celeritas corporis m major est celeritate alterius M post conflictum (§. *cit.*); mutatis directionibus corpus m in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A = m$, $B = M$ celeritas ipsius $A = V = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ & celeritas corporis $B = v = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$. Erit igitur post alterum conflictum celeritas corporis incurrentis $A = \frac{AV - BV + 2Bv}{A + B}$, & celeritas alterius $B = \frac{2AV + Bv - Av}{A + B}$. Jam substitutis valoribus quantitatum A, B, V, & v est $\frac{AV - BV + 2Bv}{A + B} = (2MmC + m^2c - Mmc - 2M^2C - Mmc + M^2c + 2M^2C - 2MmC + 4Mmc) : (M + m)^2 = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$.

Recuperat igitur corpus m post conflictum alterum celeritatem c, quam ante primum habebat. *Quod erat unum.*

Porro $\frac{2AV + Bv - Av}{A + B} = (4MmC + 2m^2c - 2Mmc + M^2C - MmC + 2Mmc - MmC + m^2C - 2m^2c) : (M + m)^2 = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$.

Recuperat itaque etiam corpus M per conflictum alterum celeritatem C, quam ante primum habebat. *Quod erat secundum.*

Utrumque eodem modo ostenditur, si corpora duo sibi mutuo directe occurrant & mutatis directionibus post conflictum primum denuo sibi occurrere supponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO 63.



596. Si linea recta AB jungit centra gravitatis A & B duorum corporum & punctum C ita eandem dividat, ut sit pondus corporis A ad pondus corporis B uti reciproce BC ad CA; dicetur punctum C *Centrum gravitatis corporum* A & B.

SCHOLION.

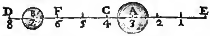
597. *Ratio denominandi patet ex iis, quæ superius* (§. 144) *demonstrata sunt.*

THEOREMA 109.

598. *Centrum gravitatis corporum elasticorum ante & post conflictum vel quiescit, vel uniformiter seu eadem velocitate in eandem plagam movetur, & temporibus æqualibus eodem intervallo ab eodem distant mobilia ante & post conflictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim sumtis temporibus ante & post conflictum æqualibus eadem est corporum (*Vid. Fig.* §. 596) A & B distantia, ideoque recta jungens eorum centra gravitatis AB eadem (§. 192 *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum sit; mobilia ab eodem æquali intervallo distare debent sumtis ante & post conflictum



ctum temporibus æqualibus. *Quod erat primum*.

Fieri autem non poteſt ut eadem ante & poſt conflictum temporibus æqualibus ſit corporum A & B a centro gravitatis diſtantia, niſi aut centrum iſtud quieſcat, aut ante & poſt conflictum eodem modo moveatur: quod per ſe patet. Ergo centrum gravitatis ante & poſt conflictum vel moveri eodem modo, vel queſcere debet. *Quod erat ſecundum*.

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius eſt (§. 144); cum corpore majore ſeu graviore in eandem plagam, ideoque continuo juxta eandem directionem movetur. *Quod erat tertium*.

Denique cum corporum motus ſit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a ſe invicem recedentibus diſtantia, in accedentibus vero ad ſe invicem ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla (§. 31), conſequenter cum diſtantiæ a centro ſint in conſtante ratione, nimirum in ratione maſſarum reciproca (§. 596), eædem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in caſu priori, aſt ſubduplæ, ſubtriplæ, ſubquadruplæ in poſteriori evadere debent (§. 178. 181 *Arith.*). Quamobrem ſi centrum gravitatis movetur, ſpatia ab eodem deſcripta temporum rationem habere, ideoque ipſum motu æquabili ferri (§. 31), conſequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24). *Quod erat quartum*.

SCHOLION.

599. *Quod centrum gravitatis ſubinde quieſcat, ſubinde moveri debeat, & quandonam quieſcat, quandonam moveatur, patet ex propoſitione ſequente.*

THEOREMA 110.

600. *Si duo corpora elaſtica moventur celeritatibus, quæ ſunt maſſis ſeu ponderibus ipſorum reciproce proportionales, ſibique mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & poſt conflictum quieſcit: in alio autem caſu quocunque non quieſcit, ſed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur *per hypoth.* ſpatia deſcripta eodem tempore continuo ſunt ut celeritates, quibus feruntur (§. 33), ideoque in ratione maſſarum reciproca (§. 167 *Arith.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus diſtat in ratione maſſarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a diſtantiis anterioribus continuo partes in ratione maſſarum reciproca *per demonſtr.* ideoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ ſunt itidem in ratione maſſarum reciproca (§. 188 *Arith.*), conſequenter centrum gravitatis in eodem loco conſtanter hæret (§. 596) & hinc ante conflictum quieſcit. Enimvero poſt conflictum celeritates eædem prorſus ſunt, quæ ante eundem fuerant (§. 590), ideoque itidem maſſis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur ut ante, quod diſtantiæ continuo creſcant a loco centri

gravi-

gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione massarum reciproca (§.187 *Arith.*), consequenter post conflictum quiescit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo casu eodem, quo ante, modo patet, quod distantiæ a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decrescant, nec post conflictum crescant in ratione massarum reciproca, consequenter a loco isto continuo non distent corpora in ratione massarum reciproca (§. 188 187 *Arith.*). Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco est (§. 596), consequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elastica æqualia eadem celeritate sibi mutuo occurrunt; celeritates quoque massis reciproce proportionales sunt, quod per se patet. Centrum gravitatis igitur ante & post conflictum quiescit, si corpora elastica æqualia æquali celeritate sibi mutuo occurrunt.

SCHOLION.

602. *Nimirum casus hic specialis sub generali theorematis actu continetur, ut dici non possit præter casum theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quiescit. Ceterum theorema præsens ita enunciari solet:* Status centri gravitatis non mutatur ab actione corporum in se invicem. *Sunt quidam philosophi, qui ut authoritatem* Cartesii *tueantur, eandem motus quantitatem conservari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & post conflictum movetur. Verum enim est quantitatem motus centri gravitatis ante & post conflictum esse eandem.*

THEOREMA III.

603. *Si corpora elastica sibi mutuo occurrunt; celeritas ab uno eorum amissa est ad celeritatem, quam idem amitteret, si in alterum quiescens impingeret, ut summa celeritatum utriusque ad celeritatem ipsius impingentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & *m* celeritatibus C & *c* sibi mutuo occurrant erit illius celeritas post conflictum $= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ (§.571), consequenter celeritas in conflictu amissa $= C - \frac{MC + mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC + 2mc}{M + m} = \frac{2mC + 2mc}{M + m}$. Jam vero si corpus M in alterum *m* quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $= \frac{MC - mC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574, consequenter celeritas amissa foret $C - \frac{MC + mC}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m} = \frac{2mC}{M + m}$. Est igitur celeritas in casu priori amissa ad celeritatem in posteriori amittendam $= \frac{2mC + 2mc}{M + m} : \frac{2mC}{M + m} = C + c : C$, hoc est, ut summa celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA II2.

604. *Si corpus elasticum unum in alterum incurrit; celeritas ab incurrente in conflictu amissa est ad celeritatem, quam idem amitteret, si in alterum quiescens impingeret, ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus *m* incurrit, quod celeritate *c* movetur; erit illius celeritas post conflictum $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$ (§. 571), ideoq; celeritas

in

in conflictu amissa $C - \frac{MC + mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC - 2mc}{M + m} = \frac{2mC - 2mc}{M + m}$. Enimvero si corpus M in alterum *m* quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $\frac{MC - mC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574, ideoque celeritas amissa foret $C - \frac{MC + mc}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m} = \frac{2mC}{M + m}$. Est igitur celeritas in casu priori amissa ad celeritatem in casu posteriori amittendam $= \frac{2mC - 2mc}{M + m} : \frac{2mC}{M + m} = C - c : C$, hoc est, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 113.

605. *Si corpus elasticum majus incurrat in minus quiescens, celeritatem majorem ea, qua fertur, sed dupla minorem eidem communicat.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus *m* quiescens: erit celeritas corporis *m* post conflictum $2MC : (M + m)$ (§. 574), hoc est, si $M = m + n$, $\frac{2mC + 2nC}{2m + n}$. Est igitur celeritas corpori minori *m* communicata per conflictum a corpore M, ad celeritatem hujus ante conflictum $= \frac{2mC + 2nC}{2m + n} : C = 2mC + 2nC : 2mC + nC$ (§. 178 *Arith.*) $= 2m + 2n : 2m + n = 2 : 1 + \frac{m}{m + n}$ (§. 181 *Arith.*). Est igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, sed minor quam dupla ejusdem: nimirum si dupla foret, antecedens rationis esse deberet $2 + 2m : (m + n)$. Idem etiam patet si celeritatem corpori minori acquisitam $\frac{2mC + 2nC}{2m + n}$ dividas per $2m + n$; prodit enim $C + \frac{nC}{2m + n}$. Est vero $C + \frac{nC}{2m + n} > C$ (§. 84 *Arith.*). Jam vero $\frac{nC}{2m + n} : C = nC : (2m + n) C = n : 2m + n$. Sed $n < 2m + n$ (§. 20 *Arith.*). Ergo $\frac{nC}{m + n} < C$ (§. 151 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 114.

606. *Si corpus elasticum majus in minus quiescens incurrat, minus post conflictum movetur celeritate composita ex ea, qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera, qua post conflictum idem incedit.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quescens *m*, sitque $M = m + n$; patet ex demonstratione theorematis præcedentis corporis *m* celeritatem post conflictum esse $C + \frac{nC}{2m + n}$. Enimvero celeritas corporis M post conflictum $= \frac{MC - mC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574 $= \frac{mC + nC - mC}{2m + n} = \frac{nC}{2m + n}$. Componitur ideo celeritas corporis *m* ex celeritate C, quam habet majus M ante conflictum, & ex celeritate $\frac{nC}{2m + n}$, quæ est eidem post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 115.

607. *Si celeritas corporis elastici majoris*

joris in aliud minus quiescens incurrentis fuerit ut summa massarum utriusque corporis; minori dat celeritatem, quæ est ut duplum sui, amittit vero celeritatem, quæ est ut duplum minoris corporis.

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus *m*, in quod majus M celeritate C incurrit, quiescit; celeritas ipsius M post conflictum est $\frac{MC - mC}{M + m}$ & minori dat celeritatem $\frac{2MC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574. Est vero $C = M + m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris sive incurrentis $= M - m$, quæ differt a celeritate initiali $M + m$ quantitate $2m$. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem, quæ est ut duplum corporis minoris. *Quod erat unum.*

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquisita erit 2M, ideoque ea est ut duplum corporis majoris incurrentis. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 116.

608. *Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit celeritate, quæ est ut massarum utriusque corporis summa; dat ei celeritatem, quæ est ut duplum sui; sed celeritatem amittit, quæ est ut duplum majoris.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus *m* celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas post conflictum $\frac{2mC}{M + m}$ & celeritas ipsius post eundem $\frac{mC - MC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574. Nimirum in formula generali litteræ M & *m* permutantur, quia ibi M percutiens, hic vero *m* percutiens est. Est autem C ut $M + m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris ut $2m$, seu duplum minoris; minoris vero sive incurrentis ut $m - M$. Differentia vero inter $M + m$ & $m - M$ est 2M. Celeritas igitur in ictu amissa est ut duplum corporis M. *Q. e. d.*

THEOREMA 117.

609. *Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit, post conflictum semper resilit eique celeritatem sua minorem dat.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus *m* celeritate C incurrat in majus M; erit celeritas majoris M post conflictum $\frac{2mC}{M + m}$, minoris vero seu incurrentis $\frac{mC - MC}{M + m}$ *per demonstrata* in §. 574. Jam vero celeritas incurrentis ante conflictum $C = \frac{MC + mC}{M + m}$. Quare si ponamus $M = m + n$ (§. 20 *Arith.*): erit celeritas minoris ante conflictum $= \frac{2mC + nC}{2m + n}$, majoris vero post eundem $\frac{2mC}{2m + n}$. Est igitur majori acquisita minor celeritate incurrentis (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

Jam cum sit $M = m + n$; erit celeritas minoris post conflictum $\frac{mC - mC - nC}{2m + n} = -\frac{nC}{2m + n}$, ideoque negativa. Post conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571). Corpus igitur minus *m* semper resilit post conflictum. *Quod erat alterum.*

THEO-

THEOREMA 118.

610. *Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit, celeritas utriusque post conflictum simul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrit in majus M, atque $M = m + n$; erit celeritas majoris post conflictum $= \frac{2mC}{2m+n}$; minoris vero non habita ratione directionis $= \frac{nC}{2m+n}$: quemadmodum ex demonstratione theorematis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum post conflictum est $\frac{2mC + nC}{2m+n} = C$. *Q. e. d.*

THEOREMA 119.



611. *Si corpus elasticum unum* A *incurrat in duo elastica* B & C, *quorum* B *sit majus quam* A & C *vicissim majus quam* B, *atque corpus* C *mediante altero* B *percutiat; majorem corpori* C *celeritatem dat, quam si idem immediate, seu corpore* B *non interveniente, percuteret.*

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum A, B & C $=$ M, nM & niM, celeritas incurrentis $=$ C. Cum sit ut summa massarum ad duplam massam incurrentis ita celeritas percutientis ad celeritatem percussi (§. 574); erit $M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M+nM}$, quæ est celeritas corpori B acquisita. Quodsi jam hac celeritate corpus B in C impingat, seu idem urgeat; erit $nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M+nM} : \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)}$ (§. cit.), quæ est celeritas corpori C interventu corporis B acquisita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M + niM : 2M = C : \frac{2MC}{M+niM}$ (§. cit.), quæ est celeritas corpori C acquirenda, si corpus A immediate seu absque interventu corporis B idem percuteret. Est ideo celeritas mediata corporis C ad immediatam $= \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{2MC}{M+niM} = \frac{2nM}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{1}{M+niM} = 2nM^2 + 2n^2iM^2 : nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^2iM^2 = 2n + 2n^2i : n + ni + n^2 + n^2i$. Est vero $n + n^2i = n(1 + ni) > ni + n^2 = n(i + n)$, quia $ni > i + n$, ideoque $2n + 2n^2i > n + n^2 + n^2i + ni$ (§. 90 *Arith.*). Patet igitur celeritatem corporis C interventu alterius B a corpore A percussi esse majorem ea, quam acciperet si a corpore A immediate percuteretur.

E. gr. Sit massa corporis A $= 1$, alterius B $= 2$, tertii C $= 6$, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquisita ad eam, quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Est igitur celeritas mediata major immediata. Similiter sit $M = 2$, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$, ideoque celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Est igitur denuo celeritas mediata major immediata.

THEOREMA 120.

612. *Si corpus elasticum unum* A *in aliud segnius motum, sed majus* B *incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus* C *quiescens,*

sed

sed se itidem majus (Vid. fig. §. 611); corpus C *majore celeritate feretur, quam si immediate a corpore* A *percuteretur.*

DEMONSTRATIO.

Sit massa corporis $A = M$, massa secundi $B = nM$ & tertii $C = niM$, celeritas corporis $A = C$, corporis B vero $= lC$. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B $= \frac{2MC + nlMC - lMC}{M + nM}$ (§. 571). Quodsi idem corpus A in tertium C quiescens incurreret, foret hujus celeritas $= \frac{2MC}{M + niM}$ *per demonstrata* in §. 574. Incurrat jam corpus B celeritate per conflictum cum corpore A modificata in quiescens C; erit celeritas corporis $C = \frac{4nM^2C + 2n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}$ (§. *cit.*). Est igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam $= \frac{4nM^2C + 2n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{2MC}{M + niM}$ $= \frac{2nM + n^2lM - nlM}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{1}{M + niM}$ $= (2n + n^2l - nl)(1 + ni : (1 + n)(n + ni) = 2n + n^2l - nl + 2n^2i + n^3il - n^2il : n + ni + n^2 + n^2i$. Est vero $n + n^2i > n^2 + ni$, ideoque $2n + n^2l - nl + 2n^2i + n^3il - n^2il > n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major est immediata.

E. gr. Sit massa corporis $A = 1$, alterius $B = 2$, tertii $C = 6$, ideoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 2 - 1 + 24 + 12 - 6 : 2 + 6 + 4 + 12 = 35 : 24 = 1\frac{1}{2}\frac{1}{4} : 1$. Est itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, sed $l = \frac{1}{4}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 1 - \frac{1}{2} + 24 + 6 - 3 : 2 + 6 + 4 + 12 = 31\frac{1}{2} : 24$. Est ideo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA 108.

613. *Invenire corpus* B (*Vid. Fig.* §. 611) *interponendum inter duo alia corpora* A & C, *ut corpus* C *quiescens a corpore* A *data celeritate moto percussum maximam acquirat celeritatem, quam ex percussione istiusmodi habere potest.*

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur $= V$. Incurrat A in B quiescens; erit hujus celeritas post conflictum $= \frac{2AV}{A + B}$ *per demonstrata* in §. 574. Incurrat jam corpus B celeritate hac acquisita in tertium C quiescens; erit corporis C celeritas post conflictum $= \frac{4ABV}{AB + B^2 + AC + BC}$ (§. *cit.*). Quoniam celeritas hæc maxima est, quam corpus C istiusmodi percussione acquirere valet *per hypoth.* erit differentiale ejus nihilo æquale (§. 63 *Analys. infin.*). Jam cum A, C & V sint quantitates constantes, B vero sola sit variabilis, facta differentiatione (§. 19 *Anal. infin.*) reperitur $(4A^2VBdB + 4AB^2VdB + 4A^2CVdB + 4ABCVdB - 4A^2BVdB - 8AB^2VdB - 4ACBVdB) : (AB + B^2 + AC + BC)^2 = 0$, hoc est,

$$4A^2CVdB - 4AB^2VdB = 0$$

$$AC - B^2 = 0$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit $A : B = B : C$ (§. 299 *Arith.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quiescens a corpore A quacunque celeritate percutitur, fuerit medium proportionale inter percutiens & percussum; celeritatem ei dabit maximam, quam interventu cujusdam corporis ei communicare valet.

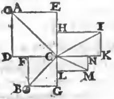
COROLLARIUM.

614. Quodsi ergo series fuerit corporum in continua proportione crescentium, ultimum acquiret celeritatem maximam, quam a priori ex percussione tot corporum interventu acquirere valet, quæ continuo crescunt.

SCHOLION.

615. *Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari posse, quæ fidem omnem superare videtur, calculus probat;* & Hugenius (a) *exemplo illustri docuit. Idem valet si corpora continuo decrescunt.*

PROBLEMA 109.



616. *Determinare motum corporum* A & B *oblique impingentium, sive elasticorum, sive elateris expertium post conflictum.*

RESOLUTIO.

Motus corporis A per AC resolvitur in duos alios secundum AE & AD, & motus corporis B per BC similiter in duos alios secundum BF & BG (§. 245) suntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC ut ipsæ rectæ AD, BF, AC, BC (§. 247). Jam cum rectæ AE & BG sint parallelæ, vires secundum has directiones agentes sibi mutuo non opponuntur, ideoque in conflictu insuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, seu quod perinde est, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem constituant, perinde est ac si corpora A & B solis velocitatibus, quæ sunt ut EC & GC, directe sibi mutuo occurrerent (§. 522). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta superiora. Sit e. gr. corporis A resilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur, fiat CK = AE & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI designabit motum corporis A post conflictum, movebitur nempe post ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241). Eodem modo reperitur, corpus B resiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM = BG. Sunt ideo celeritates post ictum ut CI ad CM. Quodsi post conflictum corpora A & B versus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC construitur.

(a) De Motu corporum ex percussione prop. 13.

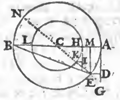
CAPUT

CAPUT XIII.

De Vi Centrifuga & Centripeta.

DEFINITIO 64.

617. *Vis centrifuga* est vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.



E. gr. Si corpus in peripheria circuli movetur, in quovis puncto A conatur progredi per tangentem AD (§. 71), & , si nihil obstaret, actu progrederetur, ideoque eodem tempore, quo arculum AE describit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROLLARIUM.

618. Est ideo vis centrifuga ut recta DE ad DA perpendicularis, si arcus AE infinite parvus (§. 245).

DEFINITIO 65.

619. *Vis centripeta* est vis, qua mobile per rectam AG progressurum retrahitur a motu rectilineo, ut in curva incedat.

COROLLARIUM 1.

620. Est itaque vis centripeta ut recta DE, si arculus AE infinite parvus.

COROLLARIUM 2.

621. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis est (§. 618).

DEFINITIO 66.

622. *Vires centrales* communi nomine dicuntur vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA 121.

623. *Si duo corpora pondere æqualia eodem vel æquali tempore motu æquabili peripherias circulorum inæqualium describant; erunt vires centrales ut diametri (Vid. Fig. §. 617)* AB & HL.

DEMONSTRATIO.

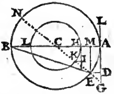
Sit arculus AE infinite parvus, ideoque a subtensa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore describuntur *per hypoth.* si ex centro C ducatur radius CE, erit HK arculus eodem momento descriptus, & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137 *Geom.*). Quodsi jam ducantur tangentes AD & HI atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, △△ ADE & HIK eodem modo determinantur (§. 119 *Geom.*), ideoque similia sunt (§. 120 *Geom.*), consequenter AE : HK = DE : IK (§. 175 *Geom.*). Est vero ut DE ad IK, ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 618. 620). Ergo vires centrales sunt ut arcus AE & HK (§. 167 *Arith.*), consequenter ut peripheriæ circulorum, quas percurrunt, *per demonstrata*, ideoque & ut diametri eorundem (§. 412 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

624. Quodsi ergo vires centrales duorum corporum, peripherias circulorum inæqualium describen-

fcribentium, fuerint ut diametri, temporibus æqualibus eafdem percurrunt.

THEOREMA 122.



625. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis eſt ut arcus infinite parvi* AE *quadratum per diametrum* AB *diviſum*.

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM; erit in rectangulo ADEM, $AM = DE$. Quoniam arcus infinite parvus AE a ſubtenſa non differt; erit $BA : AE = AE : AM$ (§. 330 *Geom.*). Eſt ergo $AM = DE = AE^2 : BA$ (§. 301 *Arith.*). Quare cum vis centralis ſit ut DE (§. 618. 620); erit eadem ut $AE^2 : BA$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquabili tempuſculis æqualibus arculos æquales AE deſcribat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, conſtanter eadem eſt.

THEOREMA 123.

627. *Si duo corpora diverſas peripherias motu æquabili deſcribant, vires centrales ſunt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim (*Vid. Fig.* §. 625) ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 625), ideoque ut $AE^2 . HL$ ad $HK^2 . AB$ (§. 178 *Arith.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore deſcribantur, *per hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

628. Si celeritates fuerint æquales; erunt virea centrales reciproce ut diametri AB & HL (§. 181 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

629. Si diametri AB & HL fuerint æquales, hoc eſt, ſi utrumque mobile in eadem peripheria, ſed diſpari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. *cit. Arith.*).

THEOREMA 124.

630. *Si duorum mobilium in diverſis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulorum* (*Vid. Fig.* §. 625) AB & HL *in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem inſtanti ſunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ *per hypoth.* conſequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 173 *Arith.*). *Q. e. d.*

LEMMA 1.

631. *Quantitatum proportionalium radices ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$ *per hypoth.* Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a} . \sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b} . \sqrt{m}$; erit $\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{a}} = \sqrt{m}$, & $\frac{\sqrt{mb}}{\sqrt{b}} = \sqrt{m}$, hinc $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149 *Arith.*). *Q. e. d.*

LEMMA 2.

632. *Sint quatuor quæcunque quantitates*

titates proportionales, sintque totidem aliæ inter se quoque proportionales; si priores singulas per singulas posteriores dividas, vel contra, quoti quoque proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$ & $c : nc = d : nd$ *per hypoth.* Quodsi a per c, ma per nc, b per d, mb per nd dividas; prodibunt $\frac{a}{c}$, $\frac{ma}{nc}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{mb}{nd}$. Jam cum sit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{n}{m}$ & $\frac{b}{d} : \frac{mb}{nd} = \frac{nbd}{mbd} = \frac{n}{m}$; erit utique $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$. Eodem modo patet, esse $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} : \frac{nd}{mb}$. *Q. e. d.*

THEOREMA 125.

633. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus eadem vi centrali urgentur, tempus in majori est ad tempus in minori in ratione subduplicata diametri majoris (Vid. Fig. §. 625)* AB *ad minorem* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = D$, $HL = d$, celeritas in majori peripheria $= C$, in minori $= c$, peripheria major $= P$, minor $= p$, tempus per illam $= T$, per hanc $= t$; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), ideoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Est vero $P : p = D : d$ (§. 412 *Geom.*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}}$ (§. 632) $= \frac{\sqrt{D}^2}{\sqrt{D}} : \frac{\sqrt{d}^2}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$. Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ sunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus similes, qui peripheriarum rationem habent (§. 170 *Arith.*), describuntur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

634. Est igitur $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 263 *Arith.*), hoc est, diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 2.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634); erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167 *Arith.*), consequenter $T : t = C : c$ (§. 631), hoc est, tempora, quibus peripheriæ aut arcus similes percurruntur a mobilibus, eadem vi centrali impulsis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA 126.

636. *Vires centrales sunt in ratione composita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.*

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v, reliqua ut in demonstratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = \frac{P}{T} : \frac{p}{t}$ (§. 38) $= \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$ (§. 412 *Geom.* & §. 632 *Mechan.*), ideoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = \frac{D^2}{DT^2} : \frac{d^2}{dt^2}$ (§. 185 *Arith.*) $= \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 231 *Arith.*). Est igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167 *Arith.*) $= Dt^2 : dT^2$ (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 127.

637. *Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus similibus mobilia feruntur, sunt ut diametri circulorum; vires centrales sunt reciproce ut eædem diametri.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$ *per hypoth.* & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 636); erit etiam

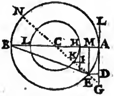
$V : v$

$V:v = \frac{D}{D^2}:\frac{d}{d^2} = \frac{1}{D}:\frac{1}{d} = d:D$ (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V:v = \frac{C^2}{D}:\frac{c^2}{d}$ (§. 627); erit $\frac{C^2}{D}:\frac{c^2}{d} = d:D$ (§. 167 *Arith.*), consequenter $C^2:c^2 = Dd:Dd$ (§. 185 *Arith.*). Sunt itaque celeritates hoc in casu æquales.

THEOREMA 128.



639. *Si corpus quoddam in peripheria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, quæ acquiritur per altitudinem* AL *cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo* AL *ad radium* CA.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi describeret 2AL, nempe celeritate, quam cadendo per AL acquisivit & qua per AE movetur (§. 92). Est igitur tempus per AE ad tempus per AL ut AE ad 2AL (§. 32), & hinc reperitur spatium eodem tempore a gravi cadente percursum, quo percurritur AE, $= AL . AE^2 : 4AL^2 = AE^2 : 4AL$ (§. 86). Est vero vis centralis ad gravitatem in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires istæ producunt (§. 280), ideoque spatiorum eodem tempore motu æquabili descriptorum (§. 33). Quare cum spatium eo instanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2:4AL$, sit $AE^2:BA$ (§. 625); erit vis centralis ad gravitatem ejus ut $AE^2:BA$ ad $AE^2:4AL$, hoc est, ut 4AL ad BA, seu 2AL ad CA (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

640. Quod si ideo gravitas corporis dicatur G; erit vis centrifuga $2AL . G : CA$.

THEOREMA 129.

641. *Si grave in peripheria circuli æquabili motu feratur ea quidem celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem (Vid. Fig. §. 639) AL dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitatis æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Vis centralis est $2AL . G : CA$ (§. 640). Quare si $AL = \frac{1}{2}CA$; eadem erit $CA . G : CA = G$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

642. Ergo si gravitati vis centralis æqualis est, ea celeritate in peripheria circuli fertur, quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA 130.

643. *Si vis centralis gravitati æqualis est, tempus per peripheriam integram est ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium.*

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percursum (*Vid. Fig.* §. 639), quæ cadendo per $\frac{1}{2}$AC acquiritur, est in tempore æquali = CA (§. 92). Quare cum peripheria circuli eadem celeritate uniformiter percurratur (§. 642); erit tempus per peripheriam ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium CA (§. 32). *Q. e. d.*

THEO-

Theorema 131.

644. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, quæ sit reciproce in ratione subduplicata diametrorum; vires centrales sunt in ratione duplicata distantiarum a centro virium reciproce sumtarum.*

Demonstratio.

Si celeritates fuerint C & c, diametri D & d, vires V & v; erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$ *per hypoth.* ideoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260 *Arith.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178 *Arith.*) $= \frac{1}{4}d^2$ ad $\frac{1}{4}D^2$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, reciproce sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum. *Q. e. d.*

Theorema 132.

645. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus incedunt celeritatibus, quæ sunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi distantiarum a centro virium.*

Demonstratio.

$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = d : D$ *per hypoth.* ideoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§. 260 *Arith.*). Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178 *Arith.*) $= \frac{1}{8}d^3 : \frac{1}{8}D^3$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires centrales reciproce sunt ut cubi radiorum seu distantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

Theorema 133.

646. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione subduplicata diametrorum; tempora duplicata, quibus integras peripherias aut arcus similes percurrunt, sunt in ratione triplicata distantiarum a centro virium.*

Demonstratio.

Sint tempora T & t, celeritates C & c, diametri D & d. Cum tam peripheriæ (§. 412 *Geom.*) quam arcus similes (§. 170 *Arith.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39). Est vero $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}} = D\sqrt{D} : d\sqrt{d}$ (§. 124 *Analys. finit.*) $= \sqrt{D^3} : \sqrt{d^3}$ (§. 65 *Analys. finit.*), consequenter $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$ (§. 260 *Arith.*). $= \frac{1}{8}D^3 : \frac{1}{8}d^3$ (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

Corollarium.

647. Ergo si vires centrales sunt in reciproca ratione distantiarum a centro duplicata, temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus similes percurruntur, sunt in triplicata earundem distantiarum (§. 644).

Theorema 134.

648. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce; tempora sunt in ratione duplicata distantiarum a centro.*

Demonstratio.

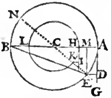
Quia $C : c = d : D$ *per hypoth.* & peripheriæ (§. 412 *Geom.*) atque arcus similes (§. 171 *Arith.*) sunt ut radii, ideoque $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit $T : t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2$ (§. 124 *Analys. finit.*) $= \frac{1}{4}D^2 : \frac{1}{4}d^2$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, tempora sunt in ratione duplica-

plicata radiorum seu distantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

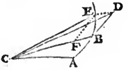
649. Si ergo vires centrales sunt reciproce ut cubi distantiarum a centro virium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus similes percurruntur, sunt ut quadrata earundem (§. 645).

SCHOLION.



650. *Quodsi supponamus vim centripetam urgere corpus versus centrum* C, *ut pro effectu ejus sumatur portio secantis* EG; *omnia manent ut ante, propterea quod in casu infinite parvi*, EG & DE *pro æqualibus haberi possint, atque ideo eadem in utroque casu eruatur mensura vis centralis. Nimirum cum* CA (§. 308 Geom.) & DE per hypoth. *sint perpendiculares ad* AG; *erunt inter se parallelæ* (§. 256 Geom.), *ideoque angulus* GED = ECM (§. 233 Geom.). *Quare cum etiam recti ad* D & M *sint æquales* (§. 145 Geom.); *erit* GE : ED = EC : CM (§. 267 Geom.). *Quoniam* AM *infinite parva* per hypoth. CM & CA *æquales habentur* (§. 4 Analys. infinit.). *Ergo etiam* CM = CE (§. 40 Geom. & §. 87 Arith.). *Est igitur etiam* GE = DE (§. 149 Arith.). *Quod vero sit etiam* EG *ut* $AE^2 : AB$, *quemadmodum supra ostendimus esse* ED (§. 627), *ita evincitur*. $AG^2 = NG . EG$ (§. 379 Geom.), *hoc est, quia in casu arcus* AE *infinite parvi*, NG = NE (§. 4 Analys. infinit.), $NE . EG = AB . EG = AG^2$, *seu, quia arcus infinite parvus* AE *a portiuncula tangentis* AD *assignabiliter non differt*, $AB . EG = AE^2$. *Unde prodit* $EG = AE^2 : AB$, *aut quod perinde est, vis centrifuga est ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum divisum.*

THEOREMA 135.



651. *Si corpus in linea curva* ABE *versus easdem partes* C *cava ea lege incedat, ut radius* CB *ex ipsa in punctum fixum* C, *quod in eodem plano situm est, ductus, areas* BAC, BCE, &c. *describat temporibus proportionales, seu dato tempore æquales: a vi centripeta versus punctum* C *urgetur.*

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus sola vi insita per rectam seu arcum infinite parvum AB dato minimo quovis instanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipsi AB æqualem (§. 31) & in directum sitam (§. 71). Sed per vim centripetam a BD retrahitur, & per arculum BE incedere cogitur, estque △ CAB = △ CBE *per hypoth.* & ducta recta CD, ob AB = DB *per demonstrata*, △ CBD = △ CAB (§. 385 *Geom.*). Ergo △ CBD = △ CBE (§. 87 *Arith.*), consequenter perpendicula ex E & D in BC demissa æqualia sunt (§. 385 *Geom.*), & hinc DE ipsi FB parallela (§. 226 *Geom.*). Cum ideo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 241); vis centripeta in B tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonstretur, patet vim centripetam a motu rectilineo versus C retrahere mobile. *Q. e. d.*

THEOREMA 136.

652. *Si corpus secundum directionem rectæ* (*Vid. Fig. §. 651*) AD *progrediatur, & una a vi centripeta ad punctum fixum* C *in eodem plano situm urgeatur; curvam describit versus* C *cavam, cujus areæ quæcunque duobus radiis*

radiis AC & CB *comprehensæ sunt temporibus, quibus describuntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim insita vel impressa cum agat juxta BD, & centripeta juxta BF seu BC *per hypoth.* viribus conjunctis describitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis instanti directio mobilis a vi centripeta mutatur, curva describitur, eaque versus C cava, quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB versus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero ob AB = DB *per hypoth.* △△ ABC & BCD æqualia (§. 385 *Geom.*), & ob ED & BC parallelas (§. 241), △△ BCD & BCE itidem æqualia sunt (§. 385 *Geom.*), consequenter ABC = BCE. Quod cum eodem modo demonstretur de triangulis quotcunque aliis æqualibus, tempusculis descriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas, temporibus, quibus describuntur, proportionales esse. *Quod erat alterum.*

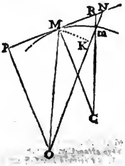
THEOREMA 138.

653. *Si mobile in linea curva (Vid. fig. §. 651) ABE incedens vi centripeta versus centrum immobile C urgetur; celeritas ejus est reciproce ut perpendiculum a centro illo in tangentem curvæ demissum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus describuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE & in tempusculis infinite parvis motus æquabilis; erunt celeritates in A & B ut AB ad BE (§. 33), hoc est, ut bases triangulorum ACB & BCE. Sunt vero triangula ista æqualia *per hypoth.* ideoque bases AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393 *Geom.*), hoc est, reciproce ut perpendicula ex centro C in bases AB & BE continuatas, quæ sunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20 *Analys. infinit.*), demissa (§. 227 *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B sunt reciproce ut perpendicula ex centro C in tangentes demissa (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO 67.



654. *Centrum virium* dicimus punctum O, ad quod mobile, in linea curva revolutum, a vi centripeta continuo urgetur. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur *Orbis* vel *Orbitas*, item *Trajectoria*.

DEFINITIO 68.

655. *Radius vector* est recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hærere supponitur.

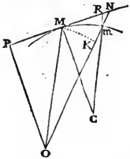
COROLLARIUM.

656. Est ideo radius vector distantia mobilis a centro virium (§. 192 *Geom.*).

THEOREMA 139.

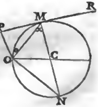
657. *In omni curva vis centralis est in ratione composita ex directa radii vectoris & reciproca radii osculi simplici atque triplicata perpendiculi ex centro virium in tangentem orbis demissi.*

DEMONSTRATIO.



Tangat PN curvam in puncto M, sitque O centrum virium, OM radius vector & CM radius osculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius osculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ M*m* haberi potest pro arcu circuli radio CM descripti (§. 313. 314 *Analys. infinit.*). Vis centripeta agens versus centrum circuli erit ut *m*R, quæ vero agit versus centrum virium O ut *m*N. Quoniam radius osculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317 *Anal. infin.*) & *m*RN = CMN + MCR (§. 239 *Geom.*) = CMN, ob MCR infinite parvum = o (§. 3 *Anal. infin.*); angulus R recto æqualis, consequenter etiam ipsi P (§. 145 *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON (§. 239 *Geom.*) = MNO, ob MON infinite parvum = o (§. 3 *Analys. infinit.*). Ergo *m*R : *m*N = PO : MO (§. 267 *Geom.*), hoc est, vis centripeta agens versus centrum circuli osculatoris C est ad vim centripetam versus centrum virium O agentem ut PO ad MO *per demonstrata*. Quodsi celeritas, qua arculus M*m* describitur, fuerit = C; erit vis centripeta, agens in centrum osculi C, = $C^2 : MC$ (§. 627). Est vero C reciproce ut PO, hoc est ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653), ideoque vis centripeta agens in centrum osculi = $\frac{1}{PO^2 . MC}$. Quare cum sit *per demonstrata* vis petens centrum osculi ad vim, quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens versus centrum Orbis O = $\frac{MO}{PO^3 . MC}$, atque ideo est in ratione composita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii osculi MC & reciproca triplicata perpendiculi PO demissi ex centro virium in orbis tangentem. *Q. e. d.*

THEOREMA 140.



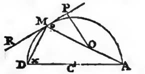
658. *Si corpus in peripheria circuli revolvatur, & vis centripeta idem urgeat versus punctum fixum O in peripheria situm; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris* OM.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tangat PR circulum in puncto dato M, & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP, atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius osculi (§. 324 *Analyſ. infin.*). Jam cum CM (§. 308 *Geom.*) & OP *per hypoth.* ſint perpendiculares ad PR; erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), conſequenter $o = x$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum OPM ſit rectus *per conſtruct.* & MON itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit $MN : MO = MO . OP$ (§. 267 *Geom.*), ideoque $OP = \frac{MO^2}{MN}$, conſequenter $OP^3 = \frac{MO^6}{MN^3}$. Eſt vero vis centripeta in $M = \frac{MO}{OP^3 . MC}$ (§. 657). Quare ſi pro OP^3 ſubſtituatur ejus valor $\frac{MO^6}{MN^3}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO . MN^3}{MO^6 . MC}$. Sunt vero MN & MC in omni puncto peripheriæ conſtantes, ideoque ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diverſis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^6}$ ſeu $\frac{1}{MO^5}$ (§. 178 *Arith.*) hoc eſt, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q. e. d.*

THEOREMA 141.



659. *Si corpus in peripheria circuli revolvitur, & vis centripeta ad punctum quodcunque intra circulum datum* O *tendat; erit ea in ratione compoſita reciproca ex duplicata radii vectoris* OM *& triplicata chordæ* AM.

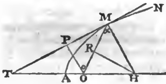
DEMONSTRATIO.

Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda DM, ſitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P *per conſtruct.* & AMD (§. 317 *Geom.*) rectus eſt, ac præterea $o = x$ (§. 323 *Geom.*); erit $AD : AM = OM : OP$ (§. 267 *Geom.*), ideoque $OP = \frac{OM . AM}{AD}$, conſequenter $OP^3 = \frac{OM^3 . AM^3}{AD^3}$. Eſt vero vis centripeta in $M = \frac{MO}{OP^3 . DC}$ (§. 657 *Mech.* & §. 324 *Anal. infinit.*). Quare eadem $= \frac{MO . AD^3}{AM^3 . OM^3 . DC}$, conſequenter cum AD & CD conſtantes ſint, ſeu in omni puncto curvæ eædem, vis centripeta $= \frac{1}{AM^3 . OM^2}$ (§. 178. 181 *Arith.*), hoc eſt, in ratione compoſita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q. e. d.*

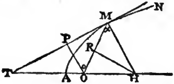
THEOREMA 142.

660. *In omni ſectione conica vis centripeta tendens ad focum curvæ eſt reciproce in ratione duplicata radii vectoris, ſeu diſtantiæ a foco.*

DEMONSTRATIO.



Sit AMN ſectio conica quæcunque, parabola, ellipſis vel hyperbola. Sit focus in O, & in eo centrum virium.



Tangat TM ſectionem conicam in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit, ob OP & MH parallelas (§. 256 *Geom.*), $o = x$ (§. 233 *Geom.*), ideoque ob rectos ad P & R *per conſtruct.* MO : OP = MH : MR (§. 267 *Geom.*), conſequenter $OP = \frac{MO.\,MR}{MH}$. Eſt vero MR æqualis ſemiparametro (§. 418. 458. 504 *Analyſ. finit.*), ideoque $= \frac{1}{2}a$, ſi ea dicatur a. Ergo $OP = \frac{MO.\,\frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^3 = \frac{MO^3.\,a^3}{8MH^3}$. Porro in omni ſectione conica radius oſculi $= \frac{4MH^3}{a^2}$ (§. 322. 325. 327 *Analyſ. infinit.*). Quare cum vis centripeta ſit ut $\frac{MO}{PO^3.\,MC}$ (§. 657), ſubſtitutis valoribus PO^3 & radii oſculi MC reperitur ea $\frac{8MO.\,MH^3.\,a^2}{4MO^3.\,MH^3.\,a^3} = \frac{2}{MO^2 a}$, hoc eſt, ob 2 & a conſtantes quantitates in omni puncto curvæ, $= \frac{1}{MO^2}$ (§. 178. 181 *Arith.*). Vis igitur centripeta tendens ad focum ſectionis conicæ eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a foco ſeu radii vectoris. *Q. e. d.*

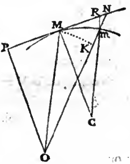
SCHOLION.

661. *Quoniam proprietas hæc ſectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus finit; ideo conveniens eſt ut generaliter ex iiſdem demonſtretur. Menſuram virium centripetarum ut* $\frac{MO}{PO^3.\,MC}$ *ſuperius demonſtratam (§. 657) invenit* Abrahamus de Moivre, *Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum menſuris aliorum, quæ quantitates infinite parva ingrediuntur, ſequente problemate oſtendere lubet.*

PROBLEMA 110.

662. *Invenire vim centripetam in qualibet curva.*

RESOLUTIO.



Sit O centrum virium, MO radius vector, MC radius oſculi, & OP ad tangentem PM perpendicularis. Deſcribatur ex centro virium O radio vectore MO arcus infinite parvus MK. Fiat MC $= n$, MO $= x$; erit $mK = dx$. Sit porro MK $= dz$ & arculus curvæ $Mm = ds$: tempus vero per arcum $Mm = dt$. Quoniam tempus eſt ut ſector OMm (§. 652); erit $dt =$ MK . $\frac{1}{2}$MO ſeu, ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut MK . MO (§. 178 *Arith.*), ideoque ut xdz. Porro cum angulus P ſit rectus *per conſtruct.* & K rectus (§. 38 *Analyſ. infinit.*), &, ob infinite parvum MO$m = o$ (§. 3 *Analyſ. infinit.*), PMO = MmK (§. 239 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*)

Mm:

$$Mm : MK = MO : OP$$
$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Est igitur $OP^3 = \frac{x^3 dz^3}{ds^3}$, & hinc cum vis centralis $\frac{MO}{OP^3 . MC}$ (§. 657), erit ea

$$= x : \frac{nx^3 dz^3}{ds^3}$$
$$= \frac{ds^3}{nx^2 dz^3}$$

Est vero $dt = xdz$ *per demonstr.*
& hinc $dt^2 = x^2 dz^2$
Quare vis centralis $= \frac{ds^3}{ndzdt^2}$

Atque hic est character analyticus unus, quem dedit *Varignonius* (a).

ALITER.

Quoniam angulus CMR rectus (§. 38 *Analyſ. infinit.*); erit MRm, ab eodem non differens nisi quantitate infinite parva MCR (§. 239 *Geom.*), itidem rectus (§. 4 *Analyſ. infinit.* & §. 145 *Geom.*), & ex eadem ratione MmR etiam rectus. Quamobrem mR haberi potest pro arculo radio Mm descripto ex centro M (§. 38 *Analyſ. infinit.*). Cum ideo sit Mm = MR (§. 40 *Geom.*); erit RN differentia inter arcum Mm & portionem tangentis MN, seu differentia secunda arculi Mm. Unde si M$m = ds$, ut ante, RN $= d^2s$. Sit porro ut ante MK $= dz$, MO $= x$, ideoque K$m = dx$: tempusculum vero per arculum M$m = dt$. Cum MmK + KmC sit rectus (§. 38 *Anal. infin.*), & RNm + RmN itidem rectus (§. 241 *Geom.*), sit vero KmC = RmN (§. 156 *Geom.*); erit MmK = RNm (§. 91 *Arith.*).

Est vero præterea NRm rectus *per demonstr.* & MKm itidem rectus (§. 38 *Analyſ. infinit.*). Quamobrem (§. 267 *Geom.*)

$$Km : MK = NR : mR$$
$$dx : dz = d^2s : \frac{d^2 s dz}{dx}$$

Porro cum CMR sit rectus & Mm ad RC perpendicularis *per demonstr.* erit (§. 327 *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$
$$\frac{d^2 s dz}{dx} : ds = ds : \frac{ds^2 dx}{dz d^2 s}$$

Est itaque CM $= n = \frac{ds^2 dx}{dz d^2 s}$.

Jam vis centralis ante reperta fuit $\frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Quare si substituatur valor radii circuli osculatoris n modo inventus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3 dz d^2 s}{ds^2 dz dx dt^2} = \frac{ds d^2 s}{dx dt^2}$. Atque hæc est formula altera, quam dedit *Varignonius* (b).

SCHOLION.

663. *Quodsi beneficio harum formularum vis centralis in circulo & sectionibus conicis eruere volueris, quemadmodum ante factum est; multo difficilius idem fieri intelliges, quam in anterioribus a nobis factum est. Sufficit itaque ostendisse, quomodo formula, qua nos usi sumus, in Varignonianas degeneret.*

PROBLEMA III.

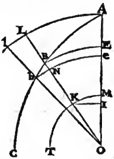
664. *Data lege virium centripetarum & concessis quadraturis, invenire trajectoriam, in qua mobile incedit.*

RESO-

(a) In Comment. A. 1701. p. 28. edit. Bat.

(b) In Comment. Academ. Reg. Scient. An. 1700 pag. 228.

RESOLUTIO.



Sit in O centrum virium, AC trajectoria, AO ejus axis, AL arcus radio AO descriptus. Ducantur radii OL & Ol infinite propinqui & radiis OB ac Ob describantur arculi EB & eb. Fiat denique $AO = a$, $AL = z$, $OE = x$; erit $Ee = BN = dx$, $Ll = dz$ & ob sectores similes ObN ac OlL (§. 138. 412 *Geom.*).

$$OL : Ll = Ob : bN$$
$$a : dz = x : \frac{xdz}{a}$$

Sit celeritas, qua mobile fertur in $B = c$ & vis centralis $= v$. Quoniam massa mobilis eadem existente sive $= 1$, elementum celeritatis dc, quod positivum vel negativum esse potest, prout celeritas vel augetur, vel minuitur, est ut elementum temporis in vim sollicitantem sive centralem ductum (§. 113); tempus vero per BN ob motus in spatiolo infinite parvo æquabilitatem ut $\frac{dx}{c}$ (§. 39); erit

$$-dc = \frac{vdx}{c}$$
$$-cdc = vdx$$
$$-\tfrac{1}{2}c^2 = \int vdx$$

hoc est, omissa quantitate constante $\frac{1}{2}$, cum hic tantummodo rationum habeatur ratio, & addita constante homogenea ex lege integrationis (§. 95 *Analys. infinit.*)

$$ab - c^2 = \int vdx$$
$$ab - \int vdx = c^2$$
$$\sqrt{(ab - \int vdx)} = c.$$

Quoniam motus per Bb in tempusculo infinite parvo peractus æquabilis, erit spatium $Bb = cdt$ (§. 34)

ideoque $Bb = dt\sqrt{(ab - \int vdx)}$

Sed $dt = \frac{1}{2}BO \cdot bN$ (§. 652), seu, ob rationem supra allatam omissa quantitate constante $\frac{1}{2}$, $= BO \cdot bN = \frac{x^2dz}{a}$.

$$\text{Ergo } Bb = \frac{x^2dz\sqrt{(ab - \int vdx)}}{a}$$
$$Bb^2 = \frac{x^4dz^2(ab - \int vdx)}{a^2}$$

$$\text{Jam } BN^2 = dx^2$$
$$bN^2 = \frac{x^2dz^2}{a^2}$$
$$Bb^2 = dx^2 + \frac{x^2dz^2}{a^2} \text{ (§. 417 Geom.)}$$
$$= \frac{a^2dx^2 + x^2dz^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2dx^2 + x^2dz^2}{a^2} = \frac{x^4dz^2(ab - \int vdx)}{a^2}$$

hoc est, ut observetur lex homogeneorum,

$$a^4c^2dx^2 + a^2c^2x^2dz^2 = x^4dz^2(ab - \int vdx)$$
$$a^4c^2dx^2 = x^4dz^2(ab - \int vdx) - a^2c^2x^2dz^2$$
$$\frac{a^4c^2dx^2}{x^4(ab - \int vdx) - a^2c^2x^2} = dz^2$$
$$\frac{a^2cdx}{\sqrt{(abx^4 - x^4\int vdx - a^2c^2x^2)}} = dz$$
$$z = \int(a^2cdx : \sqrt{(abx^4 - x^4\int vdx - a^2c^2x^2)})$$

Hæc est æquatio generalis ad trajectoriam, in qua mobile data vi centrali v versus punctum O urgetur & in qua c denotat quantitatem arbitrariam con-

constantem ex lege homogeneorum assumendam.

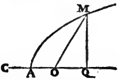
SCHOLION.

665. *Æquationem hanc generalem ad trajectoriam invenit* Joannes Bernoulli *problema inversum de trajectoriis, in quibus vires centrales sunt reciproce ut quadrata distantiarum, soluturus, ac inde casum hunc specialem non sine artificio deduxit* (a): *majoris enim artis est solvere problema in casu speciali, quam generaliter. Ut vero solutionem nostro more cum primis Matheseos principiis perspicue connectamus, problemata quædam per modum Lemmatum præmittenda sunt.*

PROBLEMA 112.

666. *Invenire æquationem ad parabolam abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

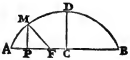


Sit in Parabola QO $= x$, QM $= y$, parameter $= p$; erit AO $= \frac{1}{4}p$ (§. 396 *Analys. finit.*), ideoque AQ $= \frac{1}{4}p + x$, consequenter $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px$ (§. 388 *Analys. finit.*). *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA 113.

667. *Invenire æquationem ad Ellipsin abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.



Sit F focus ellipsis & in C centrum. Fiat AB $= m$, parameter $= p$, FP $= x$: erit FA $= \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)}$ (§. 427 *Analys. finit.*), ideoque

$$AP = \tfrac{1}{2}m - \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} - x$$
$$PB = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} + x:$$

$$AP . PB = \tfrac{1}{4}pm - 2x\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} - x^2$$

Jam ex natura Ellipseos (§. 420 *Analys. finit.*)

$$y^2 : \tfrac{1}{4}pm - 2x\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} - x^2 = p : m$$

Ergo

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} - \frac{px^2}{m}.$$ *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA 114.

668. *Invenire æquationem ad Hyperbolam abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

Sit focus hyperbolæ (*Vid. Fig. §. 667*) in O, centrum C, axis dimidius transversus CA. Sit 2AC $= m$, parameter $= p$, OQ $= x$, QM $= y$; erit AO $= \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m$ (§. 463 *Analys. finit.*), ideoque

$$AQ = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} - \tfrac{1}{2}m + x$$
$$AQ + 2AC = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + \tfrac{1}{2}m + x.$$

$$AQ(AQ + 2AC) = \tfrac{1}{4}pm + 2x\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + x^2$$

Quare cum sit ex natura Hyperbolæ (§. 459 *Analys. finit.*)

$$y^2 : \tfrac{1}{4}pm + 2x\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + x^2 = p : m$$

erit

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + \frac{px^2}{m}.$$

Q. e. i. & d.

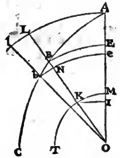
PROBLEMA 115.

669. *Invenire trajectoriam, in qua mobile incedit, si vis centripeta, qua* urge-

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1710. p. 391 & seqq.

urgetur, fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris.

RESOLUTIO.



Quoniam in ſolutione generali radium vectorem diximus x, erit vis centralis $v = \frac{1}{x^2} = \frac{a^2g}{x^2}$, ſervata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali ſubſtitui poſſit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (§. 664) in caſu generali $=$

$$\frac{a^2cdx}{\sqrt{(abx^4 - x^4\int vdx - a^2c^2x^2)}}$$

erit idem in caſu ſpeciali

$$\frac{a^2cdx}{x\sqrt{(abx^2 - x^2\int\frac{a^2gdx}{x^2} - a^2c^2)}}$$

Sed $\int\frac{a^2gdx}{x^2} = \int a^2gx^{-2}dx = -a^2gx^{-1}$

Quare $dz = \frac{a^2cdx}{x\sqrt{(abx^2 + a^2gx - a^2c^2)}}$

Cum dz ſive Ll ſit elementum arcus a forma ordinaria diſcedens, ut ad eam reducatur, fiat

$$x = \frac{a^2}{y}$$

erit $dx = -\frac{a^2dy}{y^2}$ & $x^2 = \frac{a^4}{y^2}$

ideoq; $dz = -\frac{a^4cdy:y^2}{\frac{a^2}{y}\sqrt{(\frac{a^5b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2)}}$

$$= -\frac{a^4cdy}{a^2y\sqrt{(\frac{a^5b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2)}}$$

$$= -\frac{a^4cdy}{a^3\sqrt{(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}}$$

$$= -\frac{acdy}{\sqrt{(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2g}{2c^2} - t$

erit $y^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^2gt}{c^2} + t^2$

ideoque $-c^2y^2 = -\frac{a^4g^2}{4c^2} + a^2gt - c^2t^2$

$$a^2gy = \frac{a^4g^2}{2c^2} - a^2gt$$

$$dy = -dt$$

Unde tandem habetur

$$dz = \frac{acdt}{\sqrt{(a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} - c^2t^2)}}$$

Fiat denique $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = c^2h^2$

erit $dz = \frac{acdt}{c\sqrt{(h^2 - t^2)}}$

$$\frac{dz}{a} = \frac{dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{hdt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$$

Habemus ideo elementum circuli $\frac{hdt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$, cujus radius h, ſinus rectus t (§. 153 *Analyſ. infinit.*), per radium h diviſum, & $\frac{dz}{a}$ eſt itidem elementum circuli Ll per radium LO diviſum vi denominationis in ſolutione generali (§. 664) factæ. Jam dato radio datoque arcu, datur angulus (§. 57 *Geom.*), atque ideo ratio arcus ad radium, conſequenter arcus per radium divi-

divisus (§. 129 *Arith.*). Arcus itaque per radium divisus exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LO*l* & $\int\frac{dz}{a}$ angulum AOL, pariterque $\frac{hdt}{h\sqrt{(h^2-t^2)}}$ angulum priori LO*l* & $\int\frac{hdt}{h\sqrt{(h^2-t^2)}}$ alium posteriori AOL æqualem, cujus radius b, sinus rectus t. Unde jam fluit constructio curvæ ABC istiusmodi.

Radio $b=\sqrt{(\frac{a^3b}{c^2}+\frac{a^4g^2}{4c^4})}$ describatur quadrans MKT sumtoque arcu AL $=z$ pro arbitrio ducatur recta OL secans quadrantem istum in K; erit arcus KM $=\int\frac{hdt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$ & KI $=t$. Jam porro inveniri potest radius OB sive OE. Quoniam enim.

$$y=\frac{a^2g}{2c^2}-t=\frac{a^2g-2c^2t}{2c^2}$$

$$\&\quad x=\frac{a^2}{y}$$

$$\text{erit } x=\frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$$

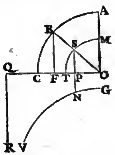
$$=\frac{2c^2}{g-2c^2t:a^2}$$

Est igitur $a:c=c:\frac{c^2}{a}$ & $a:t=\frac{c^2}{a}:\frac{c^2t}{a^2}$, ac denique $g-2\frac{c^2t}{a^2}:c=2c:\frac{2c^2}{g-2c^2t:a^2}$. Quodsi recta OB hoc modo inventa, ex centro O describatur arcus EB, intersecabit is radium OL in B, eritque punctum B in trajectoria quæsita.

PROBLEMA 116.

670. *Invenire æquationem ad trajectoriam, in qua vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium.*

RESOLUTIO.



Sit OQ $=\frac{a^2g}{2c^2}$ & OP $=t$; erit PQ $=\frac{a^2g}{2c^2}-t=y$ (§. 669). Quoniam OB $=x=\frac{a^2}{y}$, si intra asymptotos QO & QR describatur hyperbola GNV, latere potentiæ existente $=a$ (§. 489 *Anal. finit.*), erit PN $=a^2:y$ (§. 488 *Analys. finit.*). Fiat jam OF $=x$, FB $=y$, reliqua sint ut ante; erit (§. 268 *Geom.*):

$$\text{OP}:\text{OS}=\text{OF}:\text{OB}$$

$$t:b=x:\frac{hx}{t}$$

$$\text{Sed OB}=\frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$$

$$\text{Ergo } \frac{hx}{t}=\frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$$

$$a^2gbx-2c^2btx=2a^2c^2t$$

$$a^2gbx=2c^2btx+2a^2c^2t$$

$$\frac{a^2ghx}{2c^2hx+2a^2c^2}=t$$

Porro (§. *cit. Geom.*)

$$\text{OP}:\text{PS}=\text{OF}:\text{FB}$$

$$t:\sqrt{(b^2-t^2)}=x:y$$

$$x\sqrt{(b^2-t^2)}=ty$$

$$b^2x^2-t^2x^2=t^2y^2$$

$$b^2x^2=t^2x^2+t^2y^2$$

$$\frac{h^2x^2}{x^2+y^2}=t^2 \quad \text{Y}$$

Est

Eſt vero etiam *per demonſtrata*

$$t^2 = \frac{a^4g^2h^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{h^2x^2}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2h^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

$$4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2 - a^4g^2x^2 = a^4g^2y^2$$

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Quæ eſt æquatio ad Trajectoriam quæſitam. Cum ea ſit quadratica, erit ad ſectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in trajectoria urgetur a vi centripeta, quæ eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium; erit trajectoria iſta aliqua ſectio conica.

Ut appareat, ad quamnam ſectionem conicam ſit æquatio, comparetur ea cum æquationibus ſingularum ſectionum conicarum, quas ante reperimus abſciſſis a foco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter $= p$, (§. 666).

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + px$$

Æquatio vero ad trajectoriam *per demonſtr.*

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

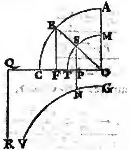
Ob deficientem in Parabola ſecundum terminum erit

$$\frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1 = 0$$

$$4c^4h^2 = a^4g^2$$

$$h^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4}$$

$$h = \frac{a^2g}{2c^2}$$



Eſt vero per conſtructionem $h = OT = OS$, & $\frac{a^2g}{2c^2} = OQ$.

Trajectoria igitur parabola eſt, ſi $OT = OQ$.

In calculo ſumſimus (§. 669)

$$b = \sqrt{\left(\frac{a^3b}{c^2} + \frac{a^4g^2}{4c^4}\right)}$$

in caſu parabolæ

$$\frac{a^3b}{c^2} = 0$$

ideoque $b = 0$

$$p = \frac{8c^4h}{a^2g^2} = \frac{8c^4a^2g}{2a^2c^2g^2} = \frac{4c^2}{g}$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter ideo parabolæ eſt tertia proportionalis ad g & $2c$.

Æquatio pro ellipſi abſciſſis a foco computatis eſt (§. 667)

$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad trajectoriam per *demonſtrata*

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$\tfrac{1}{4}p^2$

$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$

$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$

$p = \frac{4c^2}{g}$

Parameter ideo eadem, quæ in parabola.

Porro $-\frac{p}{m} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1$

hoc est $1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2}$

$a^4g^2 - \frac{4a^4c^2g}{m} = 4c^4b^2$

$b^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2}$

$b = \sqrt{(\frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2})}$

In Ellipsi ideo $\frac{a^2g}{2c^2} > b$

hoc est, $OQ > OT$

Quodsi ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$-\frac{2p}{m}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$

hoc est, $-\frac{8c^2}{mg}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g})} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$

$-\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g})} = \frac{mc^2h}{a^2g}$

$\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g} = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$

$\frac{1}{4}m - \frac{c^2}{g} = \frac{mc^4h^2}{a^4g^2}$

$a^4g^2m - 4a^4c^2g = 4mc^4b^2$

$a^4g^2m - 4mc^4b^2 = 4a^4c^2g$

$m = \frac{4a^4c^2g}{a^4g^2 - 4c^4h^2}$

Æquatio pro hyperbola abscissis a foco computatis est (§. 668)

$y^2 = \frac{px^2}{m} + \frac{2px}{m}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{1}{4}p^2$

Æquatio ad trajectoriam est

$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$

$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$

$\frac{1}{2}p = \frac{2c^2}{g}$

$p = \frac{4c^2}{g}$

Eadem ergo parameter in hyperbola, quæ in ceteris sectionibus conicis.

$\frac{p}{m} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1$

hoc est $\frac{4c^2}{gm} = \frac{4c^4h^2 - a^4g^2}{a^4g^2}$

$4a^4c^2g^2 = 4c^4b^2gm - a^4g^3m$

$4a^4c^2g^2 + a^4g^3m = 4c^4b^2gm$

$\frac{4a^4c^2g + a^4g^2m}{4c^4m} = b^2$

$\sqrt{(\frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{c^2m})} = b$

Jam cum $QO = \frac{a^2g}{2c^2}$ & $TO = b$, sitque $\frac{a^2g}{2c^2} < b$; erit $QO < TO$, quando trajectoria hyperbola.

Si ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$\frac{2p}{m}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$

hoc est, ob $p = \frac{4c^2}{g}$,

$\frac{8c^2}{gm}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} = \frac{mc^2h}{a^2g}$

$\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$

$m + p = \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$

hoc est, $m + \frac{4c^2}{g} = \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$

$a^4g^2m + 4a^4c^2g = 4mc^4b^2$

$4a^4c^2g = 4mc^4b^2 - a^4g^2m$

$\frac{4a^4c^2g}{4c^4h^2 - a^4g^2} = m.$

Quodsi

Quodſi datis m & p per litteras aſſumtitias b, c, g & a harum valores deſiderentur per m & p, æquationum reductione facta facile determinantur.

Eſt enim $p = \frac{4c^2}{g}$ $\quad b = \frac{a^2 g}{2c^2}$

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad c^2 = \frac{a^2 g}{2h}$$

$$c^2 = \tfrac{1}{4}pg$$

$$\tfrac{1}{4}pg = \frac{a^2 g}{2h}$$

$$p = \frac{2a^2}{h}$$

$$b = \frac{2a^2}{p}$$

Si ergo p datur & c pro arbitrio aſſumitur, cum in omni ſectione conica ſit $p = 4c^2 : g$, valor ipſius g omni ſectioni conicæ reſpondet. Aſt cum in parabola tantummodo ſit $b = a^2 g : 2c^2$; valor ipſius b per a & p determinatus parabolæ proprius. Unde ſi valores quantitatum g & b modo repertos ſubſtituas in æquatione ad trajectoriam, in æquationem ad parabolam abſciſſis a foco computatis eadem degenerat. Nimirum æquatio ad trajectoriam (§. 670)

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 hx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Porro

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad b = \frac{2a^2}{p}$$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \qquad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} = \frac{16a^4 c^4 p^2}{16a^4 c^4 p^2} = 1$$

Coefficiens itaque ipſius $x^2 = 1 - 1 = 0$, atque ideo hic terminus in æquatione, quæ quæritur, deficit.

$$\frac{8c^4 h}{a^2 g^2} = \frac{16a^2 c^4 p^2}{16a^2 c^4 p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4 p^2}{16c^4} = \tfrac{1}{4}p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \frac{1}{4}p^2$, quæ eſt ad parabolam abſciſſis a foco computatis (§. 666).

Quodſi valor ipſius b in ellipſi vel hyperbola deſideretur, in æquationibus.

$$b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2} \;\&\; b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} + \frac{a^4 g}{mc^2}$$

ſubſtituendus eſt valor ipſius g. Nimirum.

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo

$$b^2 = \frac{16a^4 c^4}{4c^4 p^2} \mp \frac{a^4 c^2}{mpc^2} = \frac{4a^4}{p^2} \mp \frac{4a^4}{mp}$$

$$= \frac{4a^4 m \mp 4a^4 p}{mp^2}$$

$$b = \frac{2a^2}{p} \surd(1 \mp \frac{p}{m})$$

Si denique valor ipſius b deſideretur, in æquatione $a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} = c^2 b^2$, ſubſtituendus eſt valor ipſius g^2 & b^2.

In parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \qquad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Unde $a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$

h.e. $a^3 b + \frac{4a^4 c^2}{p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$

$$a^3 b = 0$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam ſupra reperimus.

In Hyperbola

$$b^2 = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2} \qquad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo

Ergo $a^3 b + \frac{16a^4c^4}{4c^2p^2} = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4c^2p}{mp^2}$

$$a^3 b = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4pc^2}{mp^2} - \frac{4a^4c^2}{p^2}$$

$$= \frac{4a^4c^2}{mp}$$

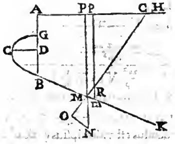
$$b = \frac{4ac^2}{mp}$$

In ellipsi idem prodit valor, sed negativus.

SCHOLION.

671. *A theoria virium centralium pendet solutio problematis de curva, in qua grave descendens eandem ubique premit vi ponderi absoluto aequali: quod a* Johanne Bernoulli *propositum* (a) *solvit* Hospitalius (b). *Ejus igitur solutionem hic subnectere lubet.*

PROBLEMA 117.



672. ***Invenire curvam, in qua grave descendens motu naturaliter accelerato eandem in singulis punctis premat vi ubique aequali ponderi corporis absoluto, seu, si MC sit radius evolutae in puncto M, ut ubique filum MC eadem vi tendat.***

RESOLUTIO.

Sit AH axis curvae, AB altitudo per quam cadendo acquirit celeritatem initialem, qua descensum in curva inchoat, PM & *pm* sint ordinatae infinite propinquae, MC radius evolutae ad curvam BMK ex evolutione descriptam normalis (§. 317 *Anal. infin.*). Producatur PM in N & repraesentet MN pondus absolutum corporis descendentis. Producatur itidem radius evolutae CM indefinite & in eum sic productum ex N demittatur perpendicularis NO; repraesentabit MO partem ponderis, quo premitur curva in puncto M seu planum, in quo est tangens curvae in puncto M (§. 47 *Geom.*).

Enimvero filum CM non modo tenditur in M ab hac ponderis parte, quod est ut MO, verum etiam a vi centrifuga, quam habet in arculo M*m* radio evolutae MC descripto. Quamobrem aggregatum ex ea gravitatis parte & conatu centrifugo in M est aequale ponderi absoluto *per hypoth.*

Sit jam conatus centrifugus $= V$, erit (§. 639).

$$MC : 2PM = MN : V$$

ideoque $V = \frac{2PM.MN}{MC}$

consequenter

$$MN = \frac{2PM.MN}{MC} + MO$$

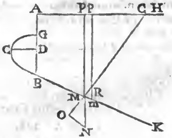
per demonstr.

Sit igitur $MN = a$, quia MN pondus absolutum denotans constans est, $AP = x$, $PM = y$, arcus curvae $BM = v$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, $Mm = dv$, & $MC = tdv : dx$ (§. 320 *Analys. Infinit.*).

Ut valor ipsius t determinetur, fiat ut ibidem differentiale ipsius $MC = o$. Sed quia in singulis arculis M*m* pressio eadem *per hypoth.* ubivis assumendi sunt aequales, atque ideo $Mm = dv$ quantitas constans. Sumta igitur in differentiatione dv pro constante, prodibit

$dvdtdx$

(a) in Actis Erudit. Supplem. T. 1. p. 291.
(b) in Comment. Accad. Reg. Scient. A. 1700. p. 11.



$$\frac{dvdtdx - tdvd^2x}{dx^2} = o$$

$$dvdtdx = tdvd^2x$$

$$\frac{dtdx}{d^2x} = t$$

Est vero $dt = dy$ (§. *cit. Analyſ. infinit.*)

Ergo $t = \frac{dydx}{d^2x}$.

Substituatur hic valor in expressione radii osculi seu evolutæ $MC = tdv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dydvdx}{dxd^2x} = \frac{dydv}{d^2x}$$

Porro CMR + RM*m* rectus (§. 317 *Analyſ. infinit.*) & PMC + CMR itidem rectus ob MR & P*p* perpendiculares ad *p*R alteri PM parallelam (§. 230 *Geom.*). Quamobrem CMR + RM*m* = PMC + CMR (§. 145 *Geom.*), ideoque RM*m* = CMP (§. 91 *Arith.*). Est vero CMP = OMN (§. 156 *Geom.*). Ergo RM*m* = OMN (§. 87 *Arith.*). Quoniam præterea anguli O & R recti sunt *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : MO$$

$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}$$

Denique cum sit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2PM \cdot MN}{MC}$$

hoc est, $\frac{dydv}{d^2x} : a = 2y : \frac{2ayd^2x}{dydv}$

habebimus ob $\frac{MN \cdot 2PM}{MC} + MO = MN$ *per demonstrata*, $\frac{2ayd^2x}{dydv} + \frac{adx}{dv} = a$

$$2ayd^2x + adydx = adydv$$

$$2yd^2x + dydx = dydv$$

Quodsi coefficiens 2 abesset, summa membri primi foret ydx. Sed si integrabile fieri debet, dividendum est per $2\sqrt{y}$; quo facto prodit

$$\frac{2yd^2x + dydx}{2\sqrt{y}} = \frac{dydv}{2\sqrt{y}}$$

$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$, quia dv constans.

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv sit differentiale arcus, dx abscissæ, adjicienda est quantitas constans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $= dv\sqrt{a}$. Habemus ideo

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$$

$$ydx^2 = ydv^2 - 2dv^2\sqrt{ay} + adv^2$$

Sed $dv^2 = dx^2 + dy^2$

Ergo $ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 + ady^2 - 2dy^2\sqrt{ay}$$

$$dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$$

Fiat $z = 2\sqrt{ay} - a$

erit $dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$

$$\frac{dz\sqrt{y}}{\sqrt{a}} = dy$$

Jam $z = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{y} - a$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

sive $\frac{z + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$

Porro $\frac{z}{2\sqrt{a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

seu $\frac{z - a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

Quodsi

Quodſi ergo valores hactenus inventi ſubſtituantur in formula

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}};\ \text{prodibit}$$

$$dx = \frac{dz(z+a)(z-a)}{4a\sqrt{a}\cdot\sqrt{z}}.$$

$$= \frac{(z^2 - a^2)dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a} = (z^2dz - a^2dz):\sqrt{z}$$

$$= z^{3:2}dz - a^2z^{-1:2}dz$$

$$4ax\sqrt{a} = \tfrac{2}{5}z^{5:2} - 2a^2z^{1:2}$$

$$2ax\sqrt{a} = \tfrac{1}{5}(z^2 - 5a^2)\sqrt{z}$$

Jam $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$

$$\sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

Quamobrem

$$10ax\sqrt{a} = (4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2)\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)}$$

Sit $x = 0$; erit

$$(2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)} = 0$$

unde fit tum $y = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, tum $y = \frac{1}{4}a$.

Quare ſi fiat AG $= \frac{1}{4}a$, & AB $= \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ utrumque punctum G & B erit in curva CBK.

Sit $dx = 0$;

erit $dy(\sqrt{y} - \sqrt{a}) = 0$

$$y = a$$

Ponatur hic valor in æquatione

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)}$$

erit $5ax = (2a - 2\sqrt{a^2} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{a^2} - a^2)}$

$$x = -\tfrac{2}{5}a$$

Principium itaque abſciſſarum removetur ultra verticalem AB quantitate $\frac{2}{5}a$, ibique eſt $y = a$. Quodſi ergo fiat AD $= a$, & CD ipſi AD perpendicularis $= \frac{2}{5}a$, curva CBM occurret rectæ DC in puncto C, ibique a recta AB maxime diſtabit.

Fiat porro $dy = 0$

erit $dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = 0$

$$y = \tfrac{1}{4}a$$

Nimirum minima ſemiordinata $= \frac{1}{4}a$. Ponatur $\frac{1}{4}a$ loco y in æquatione curvæ, erit

$$5ax = (\tfrac{1}{2}a - 3a)\sqrt{(a^2 - a^2)}$$

unde fit $x = 0$

Minima igitur ſemiordinata eſt AG. Curva itaque principium habet in G, ibique AB ad angulos rectos ſecat.

PROBLEMA 118.

673. *Invenire curvam, in qua mobile deſcendens eandem quidem conſtanter eadem vi premit, ſed quæ non æqualis eſt ponderi abſoluto.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, niſi quod vis premens dicatur b; erit (§. 672).

$$\frac{2ayd^2x}{dydv} + \frac{adx}{dv} = b$$

$$2ayd^2x + adydx = bdydv$$

$$\frac{2ayd^2x + adydx}{2\sqrt{y}} = \frac{bdvdy}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y} = bdv\sqrt{y} - adv\sqrt{a}$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydv^2 - 2abdv^2\sqrt{ay} + a^3dv^2$$

$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydy^2 + b^2ydx^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} - 2abdx^2\sqrt{ay} + a^3dy^2 + a^3dx^2$$

$$a^2ydx^2 - b^2ydx^2 + 2abdx^2\sqrt{ay} - a^3dx^2 = b^2ydy^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} + a^3dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)} = dy(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})}{\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)}}$$

Fiat $b = 0$; erit

$$-dx = \frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2y - a^3)}} = \frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$

$$-x = 2\sqrt{(ay - a^2)}$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

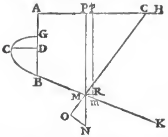
Eſt igitur in hoc caſu curva, per quam mobile deſcendit parabola, cujus

jus parameter $= 4a$. Quando vero $b = 0$, perinde eſt ac ſi mobile in vacuo libere deſcenderet. Quamobrem conſenſus hypotheſium præſentium cum curva deſcenſus *Galilæana* patet (§. 482).

SCHOLION.

674. *Menuit jam* Varignonius (a) *eandem ſolutionem ad alia problemata ſimilia extendi poſſe: quod quomodo fiat ſequente problemate oſtendere lubet.*

PROBLEMA 119.



675. *Invenire curvam, quæ a pondere in ea deſcendente premitur in ratione dignitatum altitudinum* PM.

RESOLUTIO.

Si omnia ſint ut in antecedentibus, erit *per hypoth.*

$$\frac{2ayd^2x + adxdy}{dydv} = \frac{y^n}{a^{n-1}} \text{ (§. 672)}$$

$$2yd^2x + dxdy = y^n a^{-n} dvdy$$

$$\frac{2yd^2x + dxdy}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2} y^{n-1:2} a^{-n} dvdy$$

$$dx\sqrt{y} = \frac{y^{n+1:2}dv}{(2n+1)a^n} = \frac{y^n dv\sqrt{y}}{(2n+1)a^n}$$

$$(2n+1)a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 = y^{2n} dv^2$$
$$= y^{2n}dx^2 + y^{2n}dy^2$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 - y^{2n}dx^2 = y^{2n}dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})}}$$

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1710. p. 196.

Quodſi jam fuerit $n = 1$, ideoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile deſcendit, conſequenter in ratione duplicata celeritatum (§. 86); erit

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(9a^2 - y^2)}}$$

$$x = -\sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

Fiat $y = 0$, relinquetur $\sqrt{9a} = 3a$; conſequenter (§. 107 *Analyſ. infinit.*)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Eſt ergo curva quæſita circulus, cujus radius eſt $3a$.

Sit $n = 2$, hoc eſt, prematur curva in ratione duplicata altitudinum deſcenſus, ſeu quadruplicata celeritatum (§. 86); erit

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(25a^4 - y^4)}}$$

Quæ eſt æquatio ad curvam elaſticam *Bernoullianam* (a).

Sit $n = \frac{1}{2}$, hoc eſt prematur curva in ratioue ſubduplicata altitudinum, ſeu in ratione celeritatum (§. *cit.*); erit

$$dx = \frac{y^{1:2}dy}{\sqrt{(4a - y)}}$$

$$dx^2 = \frac{ydy^2}{4a - y}$$

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 = \frac{ydy^2}{4a - y} + dy^2$$
$$= \frac{ydy^2 + 4ady^2 - ydy^2}{4a - y}$$
$$= \frac{4ady^2}{4a - y}$$

$$dv = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{(4a - y)}} = \frac{2ady}{\sqrt{(4a^2 - ay)}}$$

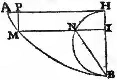
$$v = -4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Fiat

(a) In Actis Erudit. A. 1694 p. 272. & A. 1695. p. 537.

Fiat $y = 0$, erit residuum $= - 8a$, ideoque

$$v = 8a - 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$



Quodsi diameter circuli HB $= 4a$, HI $= y$; erit IB $= 4a - y$.

Quare $IB^2 = 16a^2 - 8ay + y^2$

$IN^2 = \quad 4ay - y^2$

(§. 377 *Analys. finit.*)

$$BN^2 = 16a^2 - 4ay$$

$$BN = 2\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$$2BN = 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$=$ arcui Cycloidis BM (§. 168 *Analys. infinit.*)

$$2BN = 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$$8a = BMA$$

$$8a - 4\sqrt{(4a^2 - ay)} = \text{arcui } AM.$$

Atque ideo patet, curvam, quæ a mobili descendente premitur in ratione celeritatum, esse cycloidem ordinariam.

Corollarium.

676. Quodsi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$ & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem est $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(4a - y)}}$. Quare si diameter circuli genitoris fuerit $= a$, reliqua maneant ut ante; æquatio ad cycloidem est $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a - y)}} = \frac{ydy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$, consequenter area cycloidis APM $= \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$.

CAPUT XIV.

De Resistentia Medii.

Definitio 69.

677. Per *Resistentiam medii* intelligitur resistentia fluidi, per quod mobile fertur.

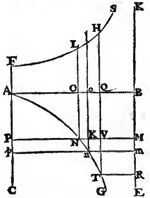
Corollarium.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus resistit, loco pellere tenetur, atque ideo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, massa quippe manente eadem, minuitur (§. 22).

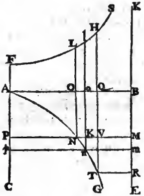
Problema 120.

679. *Data celeritate mobilis in medio resistente motu æquabili lati, invenire celeritatem dato tempore amissam, spatium confectum & curvam resistentiæ, in qua semiordinatæ sunt ut celeritates amissæ.*

Resolutio.

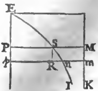


Sit AB celeritas, qua mobile initio fer-



fertur, $= a$, ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP $= x$ amissas, PN celeritas amissa $= r$; erit NM celeritas residua, quæ dicatur v. Sit jam *pm* alteri PM infinite propinqua; erit NK differentia positiva semiordinatarum PN & *pn* seu celeritatum extinctarum $= dr$, eademque differentia negativa semiordinatarum NM & *nm* seu celeritatum residuarum $= -dv$. Unde resultat

$$\text{I. } dr = -dv.$$



Sit porro curva ESI, cujus ordinatæ sunt ut NK figuræ præcedentis, seu legem resistentiæ exponunt. Quodsi ergo NK dividas per PS, quotus erit quantitas constans, perinde enim fere est ac si eandem quantitatem dividas per se ipsam. Sit PS $= z$. Quoniam NK $= -dv$ *per demonstrata*; erit $\frac{NK}{PS} = -\frac{dv}{z}$. Jam cum P$p = dx$, quia EP perinde ac in curva præcedente tempus exponit, sit constans; erit per legem homogeneorum

$$-\frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{II. } -adv = zdx$$

Sit denique spatium, a mobili tempusculo dx percursum, $= ds$. Quoniam idem est vdx (§. 34), erit

$$ds = vdx$$

ideoque III. $s = \int vdx$

SCHOLION

680. *Ex formulis hisce generalibus, quas dedit* Varignonius (a), *deducuntur, quæ de resistentia medii in hypothesibus specialibus a* Wallisio, Newtono, Hugenio *atque* Leibnitio *inventa sunt: quemadmodum ex sequentibus patebit.*

THEOREMA 143.

681. *Si mobile motu æquabili fertur per medium, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum residuarum* NM, nm (*Vid. Fig.* I §. 679), *curva resistentiæ totalis* ANG *est Logarithmica, cujus asymptotus tempus, semiordinatæ ad ipsam relatæ celeritates residuas repræsentant.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobili resistitur in ratione celeritatum *per hypoth.* seu celeritates in instanti amissæ sunt ut celeritates residuæ; si omnia sint ut in problemate præcedente (§. 679): erit $z = v$. Est vero $-adv = zdx$ *vi num. II.* (*§. cit.*). Ergo $-adv = vdx$ consequenter $a = -\frac{vdx}{dv}$. Est vero $-\frac{vdx}{dv}$ subtangens curvæ, cujus abscissæ sunt x, semiordinatæ

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1707. p. m. 503.

natæ decrescentes v (§. 20 *Anal. infin.*). Ergo subtangens curvæ resistentiæ totalis ANG constans est, ac proinde curva ipsa est Logarithmica, cujus asymptotus BE (§. 54 *Analys. infinit.*). Repræsentat autem BE tempus & semiordinatæ ad ipsum relatæ exprimunt celeritates residuas a resistentia medii. *Q. e. d.*

SCHOLION.

682. *Si quis dubitet hanc esse Logarithmicæ proprietatem propriam, quod subtangens sit constans, haud difficulter idem demonstratur. Sint enim* z & y *duæ semiordinatæ*, v & x *ipsis respondentes abscissæ: erunt subtangentes* $\frac{ydx}{dy}$ & $\frac{zdv}{dz}$, *ideoque* $ydx:dy = a$ & $zdv:dz = a$ per hypothesim *consequenter* $ydx:dy = zdv:dz$ (§. 87 Arith.). *Quoniam differentiale abscissæ sumitur constans; erit* $dx = dv$, *consequenter* $y:dy = z:dz$ (§. 183 Arith.), *ideoque* $y + dy:y = z + dz:z$ (§. 190 Arith.). *Habemus igitur semiordinatas in proportione geometrica. Jam ipsis respondentes abscissæ* $x + dx$ & x *atque* $v + dv$ & v *ob* $dx = dv$ *sunt æquidifferentes* (§. 322 Arith.). *Abscissis ergo æquidifferentibus respondent semiordinatæ in geometrica progressione, consequenter curva constantis subtangentis est Logarithmica* (§. 552 Analys. finit.). *Ceterum* ANG *dicitur* curva resistentiæ totalis *ad differentiam* curvæ resistentiæ instantaneæ, *in qua semiordinatæ sunt ut celeritates in instanti amissæ.*

THEOREMA 144.

683. *Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum residuarum, & tempora sumuntur æqualia; erunt celeritates residuæ in principiis singulorum temporum in progressione geometrica, & partes singulis temporibus amissæ erunt iisdem proportionales seu ut totæ; vel etiam ut celeritates in fine illorum temporum residuæ.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobili a medio, per quod motu æquabili fertur, resistitur in ratione celeritatum residuarum (*Vid. Fig. 1 pag. præc.*); curva resistentiæ ANG Logarithmica est, cujus asymptotus BE tempus repræsentat, abscissæ vero NM celeritates residuas exhibent (§. 681). Quodsi ergo tempora sumuntur æqualia, celeritates in principiis temporum sunt in geometrica progressione (§. 552 *Analys. finit.*). *Quod erat unum.*

Quodsi fiat $BM = MR$, tempora, quibus amittuntur celeritates AO & NV æqualia sunt. Est vero $AB:NM = NM:TR$ *per demonstr.* Ergo $AB - NM:AB = NM - TR:NM$ (§. 193 *Arith.*), hoc est, $AO:AB = NV:NM$, consequenter $AO:NV = AB:NM$ (§. 173 *Arith.*), seu celeritates temporibus æqualibus amissæ sunt ut totæ in principiis illorum temporum. *Quod erat secundum.*

Quoniam $AB:NM = NM:TR$ *per demonstr.* erit etiam $AB - NM:NM = NM - TR:TR$ (§. 193 *Arith.*), hoc est, $AO:NM = NV:TR$, consequenter $AO:NV = NM:TR$ (§. 173 *Arith.*), seu celeritates temporibus æqualibus BM & MR amissæ sunt ut celeritates NM & TR in fine illorum temporum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 145.

684. *Si mobile motu æquabili per medium fertur in quo eidem resistitur in ratione celeritatum residuarum; spatia singulis temporibus descripta sunt ut celeritates amissæ, &, si tempora sumantur æqualiia, ut celeritates totæ in principio vel in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia ſint ut in problemate generali (§. 679), erit $-adv = zdx$ *vi num. II.* & $vdx = ds$ *vi num. III.* Eſt vero $z = v$ *per hypoth.* Ergo $-adv = vdx$ (§. 15 *Arith.*), conſequenter $ds = -adv$ (§. 87 *Arith.*). Eſt igitur $s = a^2 - av$ (§. 95 *Analyſ. infinit.*), ſeu ob conſtantem a eſt s ut $a-v$ (§. 181 *Arith.*). Sed $a-v$ eſt celeritas a mobili tempore x amiſſa. Quamobrem ſpatia ſunt ut celeritates amiſſæ. *Quod erat unum.*

Quodſi tempora ſumantur æqualia, celeritates amiſſæ ſunt ut totæ in principio, vel fine illorum temporum (§. 683). Sunt vero etiam ut celeritates amiſſæ iſtis temporibus ita ſpatia movendo iiſdem confecta *per demonſtr.* Ergo eadem ſpatia ſunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

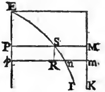
THEOREMA 146.

685. *Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum reſiſtitur, & tempora ſumuntur æqualia ſeu in progreſſione arithmetica; erunt celeritates in inſtanti ſeu tempuſculo infinite parvo amiſſæ ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Curva enim reſiſtentiæ Logarithmica eſt, cujus aſymptotus tempora, ſemiordinatæ ad eundem relatæ celeritates in fine illorum temporum repræſentant (§. 681). Quare ſi tempora ſint x & t, ſemiordinatæ ipſis reſpondentes y & z; erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (§. 54 *Analyſ. infinit.*), conſequenter cum tempora ſumantur in progreſſione arithmetica *per hypoth.* ſitque propterea $dx = dt$ (§. 333 *Arith.*), $y:dy = z:dz$. Eſt itaque $y:z = dy:dz$ (§. 173 *Arith.*), hoc eſt, celeritates in fine temporum iſtorum y & z ſunt ut celeritates in inſtanti inde amiſſæ dy & dz. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.



686. Quoniam in curva reſiſtentiæ inſtantaneæ ESI abſciſſa EP eſt ut tempus, ſemiordinata PS ut celeritas in inſtanti amiſſa (§. 682); PS vero eſt ut celeritas in fine temporis EP mobili reſidua (§. 685) & in curva reſiſtentiæ totalis abſciſſis tanquam temporibus reſpondent ſemiordinatæ tanquam celeritates iſtis amiſſæ (§. 682); curva reſiſtentiæ totalis eadem quæ curva reſiſtentiæ inſtantaneæ, ſi mobili motu æquabili lato reſiſtitur in ratione velocitatum.

THEOREMA 147.

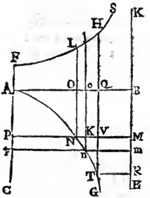
687. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur in medio, per quod fertur, in ratione celeritatum; ſpatia adhuc percurrenda ſunt celeritatibus reſiduis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut ſpatium integrum percurrendum ad ſpatium aliud percurrendum, ita celeritas, quam initio motus habet mobile ad celeritatem reſiduam (§. 684). Quamobrem ſpatium quodlibet adhuc percurrendum eſt ad integrum ut celeritas reſidua, qua percurrendum, ad celeritatem initialem, ſeu quam in principio habet mobile (§. 193 *Arith.*): quod cum de omni ſpatio percurrendo verum ſit; erit ſpatium

tium percurrendum unum ad aliud quodcunque ut celeritas residua, qua illud percurrendum, ad celeritatem residuam, qua hoc percurrendum (§. 195 *Arith.*), hoc est, spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis, quibus percurrenda, proportionalia (§. 155 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.



688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per spatium integrum percurrendum, cum spatia percursa sint AO, AQ, &c. (§. 684) erunt percurrenda OB, QB &c. seu applicatæ MN & TR ad asymptotum BE Logisticæ ANG.

THEOREMA 148.

689. *Si mobili motu æquabili lato a medio resistitur in ratione celeritatum, & spatia adhuc percurrenda sint ut numeri; erunt tempora insumta spatiis jam percursis ut illorum Logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenda sunt ut semiordinatæ Logisticæ MN, TR &c. applicatæ ad tempora insumta BM, BR spatiis jam percursis AO, AQ (§. 688). Enimvero si in Logistica NM, TR sumuntur in numeri, abscissæ BM, BR sunt ut eorum Logarithmi (§. 553 *Anal. finit.*). Ergo si spatia percurrenda sint ut numeri, tempora sunt ut eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA 149.

690. *Si mobile æquabili motu incedit in medio, quod in ratione velocitatum eidem resistit (Vid. Fig. ut sup.), celeritas nonnisi tempore infinito extinguitur, & spatium percurrendum integrum* AB *nunquam absolvit, etsi semper accedat ad limitem.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decrescentes sunt ut semiordinatæ Logarithmicæ ad asymptotum BE applicatæ, & asymptotus tempus exhibet (§. 681). Quare cum AB celeritatem integram repræsentet, quam mobile in principio motus habet; ea prorsus extingui nequit, nisi punctis G & E coincidentibus, seu Logistica ANG cum asymptoto BE concurrente: quod cum fieri non possit nisi infinito intervallo (§. 556 *Analys. finit.*); celeritas quoque nullo tempore finito extingui potest. *Quod erat primum.*

Jam cum celeritate, quam in principio motus habet mobile, non prorsus extincta, terminum B attingere non possit, nullo quoque tempore finito eundem attingere valet, ideoque spatium percurrendum integrum AB nunquam absolvit. *Quod erat secundum.*

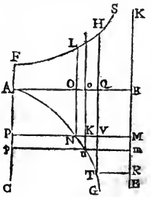
Quia tamen motus indesinenter continuatur, ideoque spatium celeritatibus amissis descriptum continuo crescit; mobile ad terminum suum B continuo propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHO-

SCHOLION.

691. *Nemo objiciat propositionem præsentem experientiæ repugnare: neque enim hypothesis resistentiæ in ratione velocitatum naturæ rerum conformis, quemadmodum suspicatus fuit* Wallisius. *Et si vel maxime hypothesis natura prope ad eam accederet, ex naturæ consuetudine motus in praxi tandem insensibilis fieri deberet, quemadmodum a* Leibnitio (a) *jam annotatum est.*

THEOREMA 150.



692. *Si intra asymptotos rectangulas* AB *&* BK *describatur hyperbola* FLS *& motus initio celeritas exponatur per rectam* AB, *elapso autem aliquo tempore per rectam* OB; *tempus per aream* AFLO *& spatium eo tempore descriptum per rectam* AO *exprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Si enim BO & BQ fuerint celeritates in fine temporum BM & BR restantes, dicaturque $BQ = y$, $BO = z$; erit $dy : dz = y : z$ (§. 685), consequenter $dy : y = dz : z$ (§. 173 *Arith.*). Sunt vero $\frac{dy}{y}$ & $\frac{dz}{z}$ elementa spatii hyperbolici asymptotici (§. 118 *Analys. infinit.*). Quamobrem elementa ista æqualia sunt, si eorum altitudines, quæ sunt abscissarum in asymptoto BA sumtarum differentialia, fuerint ut celeritates in instanti amissæ. Quodsi ergo ab initio motus usque ad plenariam extinctionem sumantur continuo AO, AQ ut celeritates extinctæ, spatium hyperbolicum asymptoticum resolvitur in elementa inter se æqualia. Atque ideo area FAOL successive elementorum æqualium additatione gignitur, quamadmodum abscissa AP continua accessione elementorum æqualium resultat. Enimvero abscissa AP exponitur tempus, quo celeritas PN sive AO amittitur *per hypoth.* Ergo etiam spatium hyperbolicum AFLO tempus designare debet, quo celeritas AO amittitur. *Quod erat unum.*

Jam rectæ AO & AQ sunt ut celeritates temporibus BM & BR amissæ *per hypoth.* Sunt vero spatia temporibus BM & BR movendo confecta ut celeritates iisdem temporibus extinctæ (§. 684). Ergo spatia temporibus BM & BR seu quod perinde est *per demonstrata*, temporibus AFLO & AFHQ confecta sunt ut rectæ AO & AQ. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 151.

693. *Si motui æquabili in medio resistitur in ratione celeritatum, decrementa celeritatum sunt incrementis spatiorum proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim & celeritates amissæ eodem tempore per eandem rectam exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decrementa eodem

(a) In Actis Erudit. An. 1689. p. 41.

eodem tempore per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa spatiorum & decrementa celeritatum iisdem rectis proportionalia sunt; spatiorum quoque incrementa celeritatum decrementis proportionalia sunt (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

SCHOLION 1.

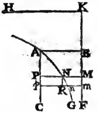
694. Wallisius, *qui primus de resistentia aëris in motu corporum determinanda cogitavit* (a) *& resistentiam in ratione celeritatum fieri supposuit; rationem celeritatis* a, *qua initio motus est, ad residuam uno momento seu tempusculo infinite parvo elapso sumit ut* m *ad* 1. *Celeritas igitur residua est* $\frac{a}{m}$. *Jam cum celeritates residuæ in progressione geometrica decrescant* (§. 681), *per hanc seriem exhibentur celeritates ab initio motus usque ad ejus extinctionem* $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}$, &c. *infinitum, donec scilicet quod restat, est respectu ipsius* a *infinite parvum, ideoque nullum. Summa igitur celeritatum* $a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5}$ &c. *in infinitum ob terminum ultimum contemptibilis parvitatis* $= \frac{a}{m-1} + a$ (§. 120 *Anal. finit.*) $= \frac{a + ma - a}{m-1} = \frac{ma}{m-1}$. *Jam vero singulis celeritatibus tempusculis æqualibus describuntur singula spatiola, quæ cum sint ut celeritates, spatium integrum celeritate prorsus extincta erit* $\frac{ma}{m-1}$, *seu, si* $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, *quemadmodum idem determinat* Wallisius.

SCHOLION 2.

695. Newtonus (b) *cum deprehenderet hypothesin resistentiæ in ratione celeritatis magis mathematicam esse, quam naturalem & naturæ magis conformem censens alteram de resistentia in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege resistentiæ oriundos considerare cœpit. Nostrum igitur est ut eosdem hic more nostro explicemus. Ex superioribus enim formulis generalibus deducuntur, quæ de eodem notanda veniunt, prouti ex sequentibus patet.*

(a) In Algebra cap. 103. folg. 438. Vol. 2. Oper.
(b) In Princ. lib. 2. prop. 5. & seqq. p. m. 239.

THEOREMA 152.



696. *Si corpus motu æquabili per medium similare fertur, ipsique resistitur in velocitatis ratione duplicata; curva resistentiæ totalis est Hyperbola æquilatera* ANG *intra asymptotos* HK *&* KF, *puncto* B, *in quo celeritas initialis* AB *applicatur, a centro* K *intervallo rectæ* AB, *quæ celeritatem initialem exponit, distante.*

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis $AB = a$, celeritas amissa $= v$, tempus quo amittitur $= x$, decrementum celeritatis instantaneum ut z; erit $-adv = zdx$ (*vi num. II.* §. 679). Est vero decrementum celeritatis instantaneum in ratione duplicata celeritatis extinctæ *per hypoth.* ideoque servata lege homogeneorum $z = \frac{v^2}{a}$. Quamobrem

$$-adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{a^2}$$

hoc est, $-v^{-2}dv = dx : a^2$

$$v^{-1} = x : a^2$$

Sive, si quantitas constans in integratione adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = 0$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, ideoque $\frac{1}{a} + b$

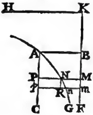
$$\frac{1}{a} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo $\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$

$$a^2 - av = vx$$

$$a^2 = vx + av$$



Curva igitur reſiſtentiæ totalis ANG eſt hyperbola æquilatera intra aſymptotos HK & KF, latere potentiæ hyperbolæ exiſtente linea recta, quæ celeritatem exponit, & applicata AB, quæ eandem exponit ſui intervallo a centro K remota (§. 490 *Anal.finit.*).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræſentatur per aſymptotum BF, celeritates reſiduæ per ſemiordinatas NM, hyperbola vero ANG cum aſymptoto non concurrit (§. 481 *Analyſ. finit.*) celeritas, qua fertur mobile, integra nonniſi infinito tempore per reſiſtentiam medii extinguitur, ſeu mobile nunquam motu ſuo prorſus privatur.

THEOREMA 153.

698. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis; celeritas reſidua erit ad extinctam in ea ratione (Vid. Fig. ut ſupr.), quam habet latus potentiæ hyperbolæ* KB *ad partem aſymptoti* BM *exponentem tempus, quo celeritas extincta fuit.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim potentiæ hyperbolæ latus KB = BA = a, recta tempus exponens BM = x, celeritas reſidua MN = v, ideoque extincta PN = $a - v$; erit $a^2 - av = vx$ (§. 696). Eſt igitur $a : x = v : a - v$ (§. 299 *Arith.*), hoc eſt, AB : BM = MN : NP, ſeu celeritas reſidua eſt ad extinctam ut latus potentiæ hyperbolæ ad partem aſymptoti tempus exponentem, quo celeritas extincta fuit. *Q. e. d.*

THEOREMA 154.

699. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis; ſpatium dato tempore eſt ut logarithmus celeritatis initialis diviſæ per reſiduam tempore iſto elapſo.*

DEMONSTRATIO.

Si enim ſpatium ſit s, reliqua ſint ut ante; erit $vdx = ds$ (§. 679). Eſt vero in hypotheſi propoſitionis $-\frac{a^2dv}{v^2} = dx$ (§. 696), ideoque $vdx = -a^2dv \cdot v$, conſequenter $ds = -a^2dv : v$. Sed $-adv : v$ eſt differentiale logarithmi fractionis $a : v$ (§. 243 *Anal. infin.*). Quamobrem $s = al(a : v)$, hoc eſt, ob conſtantem a, ſpatium dato percurſum tempore eſt ut $l(a : v)$, ſeu ut logarithmus celeritatis initialis a diviſæ per reſiduam v.

THEOREMA 155.

700. *Si mobili æquabili motu per medium reſiſtens lato reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum; tempore (Vid. Fig. ut ſup.), quod per partem aſymptoti* BM *hyperbolæ* ANG *exponitur, confectum ſpatium repræſentatur per ſpatium hyperbolicum aſymptoticum* ABMN *inter celerita-*

leritatem initialem AB *&* *residuam* NM *interceptum*.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus BM $= x$ & celeritas restans MN $= v$; erit vdx elementum areæ ABMN (§. 97 *Anal.infin.*). Sed si spatium tempore BM descriptum $= s$; erit $ds = vdx$ (§. 679). Ergo $s = \int vdx =$ ABMN. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, respondens ABMN exprimit spatium a mobili tempore isto confectum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

701. Quoniam spatia motu æquabili dato tempore confecta sunt in ratione composita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret spatium, quod est ut BM . AB (§. 159 *Arith.*), consequenter spatium istud exponit rectangulum ABMP (§. 376 *Geom.*). Quare cum motu resistentiis in duplicata celeritatum ratione impedito tempore BM conficiatur spatium per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit spatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita descriptum ad spatium, quod eodem tempore in medio non resistente describeret mobile; ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN ad rectangulum ABMP.

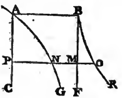
THEOREMA 156.

702. *Si motus æquabilis impeditur resistentiis, quæ sunt in ratione duplicata celeritatum; decrementa celeritatum instantanea sunt in ratione composita ex celeritate residua & incremento momentaneo spatii percursi.*

DEMONSTRATIO.

Constat ex demonstratione theorematis 152 (§. 696), esse $-adv = v^2dx : a$: Est igitur $-dv$ ut v^2dx propter constantem a^2 (§. 181 *Arith.*). Enimvero $v^2dx = v . vdx$, & v designat celeritatem residuam, $vdx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum spatii in medio resistente percursum. Ergo in hypothesi theorematis decrementa momentanea velocitatis $-dv$ sunt in ratione composita celeritatum residuarum & incrementorum momentaneorum spatii percursi. *Q.e.d.*

THEOREMA 157.



703. *Si recta* AB *celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio, per quod æquabiliter movetur, in ratione duplicata celeritatum resistitur, & erectis perpendicularibus* AC *&* BF *describantur duæ Logarithmicæ* ANG *&* BOR, *quarum communis est subtangens* AB, *altera vero* BOR *ad asymptotum* AC, *altera* ANG *ad asymptotum* BF *relata; ducta* PO *ipsi* AB *parallela, exponet* MO *tempus*, PN *celeritatem isto tempore amissam &* NM *celeritatem in fine illius temporis adhuc residuam*.

DEMONSTRATIO.

Si enim subtangens communis AB $= a$, tempus $= x$, celeritas in fine ejusdem residua $= v$; erit

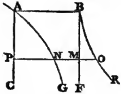
$$a^2 = vx + av \quad (\S. 696)$$

$$o = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

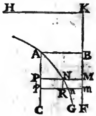
$$-\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

 Sunt



Sunt igitur $-\frac{dv}{v}$ & $\frac{dx}{a+x}$ duo Logarithmi æquales (§. 243 *Anal. infin.*). Quare si sit BM $= y$ & NM $= v$; erit $\frac{dy}{a} = -\frac{dv}{v}$, ideoque ANG Logarithmica ad asymptotum BF relata, cujus subtangens $a =$ AB. Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$ (§. 87 *Arith.*); erit itidem BOR Logarithmica ad asymptotum AC relata, cujus itidem subtangens AB (§. 54 *Analys. infinit.*). Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus $= x$, celeritas residua $= v$ *vi demonstrationis*; recta MO $= x$ tempus, NM $= v$ celeritatem in fine ejus residuam & PN celeritatem tempore MO amissam exponit. *Q. e. d.*

THEOREMA 158.



704. *Si tempus* BM *resolvitur in tempuscula, quæ sunt in progressione geometrica; spatiola istis tempusculis descripta æqualia sunt, & velocitates residuæ sunt in eadem ratione decrescente, in qua tempora crescunt quantitate quadam constante aucta.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM asymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; spatium hyperbolicum ABMN exponit spatium a mobili tempore BM in medio resistente descriptum (§. 700). Enimvero ostendimus in superioribus (§. 692), si BM resolvitur in particulas, quæ sunt in progressione geometrica, aream ABMN resolvi in spatiola seu elementa inter se æqualia: Spatiola igitur tempusculis in ratione geometrica progredientibus descripta sunt inter se æqualia. *Quod erat unum.*

Si (*Vid. Fig.* 1) AB exprimat celeritatem initialem & duæ fuerint Logisticæ ANG & BOR ad asymptotos BF & AC relatæ; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine istius residuam (§. 703). Sumantur jam in asymptotis abscissæ BM vel AP in progressione arithmetica; erunt NM & PO in progressione geometrica & quidem semiordinatæ NM in decrescente, semiordinatæ vero PO in crescente (§. 552 *Analys. finit.*). Patet igitur temporibus quantitate constante AB ($=$ PM) auctis in ratione geometrica crescentibus celeritates residuas NM in ratione geometrica decrescere. *Quod erat alterum.*

COROLLARUIM I.

705. Quoniam spatia dato tempore descripta sunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum residuarum (§. 699); si celeritates residuæ sumantur ut numeri, spatia sunt ut eorum logarithmi, & tempora etiam sunt ut numeri (§. 704).

COROL-

COROLLARIUM 2.

706. Quare cum AP vel BM sit ut logarithmus MN vel PO (§. 558 *Analys. finit.*); erit BM vel AP ut spatium tempore MO celeritate initiali AB descriptum (§. 705).

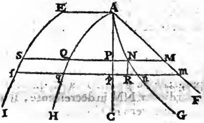
SCHOLION.

707. *Eadem methodo ad alias hypotheses resistentiæ applicari poterant formulæ generales. Sed cum ejusmodi hypotheses magis geometricæ, quam naturales sint, plura in præsente non addimus, ad resistentias in motu gravium explicandas progressuri in duabus hypothesibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in hypothesi* Galilæana, *utpote experimentis in iis a centro Telluris distantiis consentiente, in quibus ea capere licet.*

PROBLEMA 121.

708. *Invenire curvam resistentiæ, celeritatem residuam & spatium dato tempore descriptum in motu gravium seu æquabiliter accelerato.*

RESOLUTIO.



Exponat recta AC tempus. Fiat AP = PM; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquisitam (§. 68) & AMF erit linea recta ac APM triangulum æquicrurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per resistentiam & MN celeritas in fine illius temporis residua; erit ANG curva resistentiæ totalis. Ducatur *pm* ipsi PM infinite propinqua & demissa perpendiculari NR; erit *n*R particula celeritatis tempusculo P*p* extincta. Fiat PS ut *n*R; erit ESI curva resistentiæ instantaneæ (§. 682). Denique fiat QP = NM; erit AQH curva celeritatum residuarum.

Sit jam AP = PM = x, NM = PQ = v, PS = z, PN = r; erit

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

I. $dr = dx - dv$

Porro ut supra (§. 679).

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

Unde $\frac{dx - dv}{z} = \frac{dx}{a}$

II. $adx - adv = zdx$

quæ est æquatio ad curvam resistentiæ instantaneæ ESI.

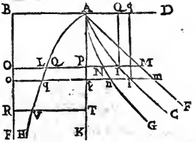
Tandem si s spatium tempore x confectum denotet, erit ut supra (§. 679)

III. $vdx = ds$.

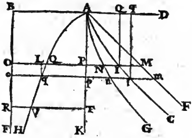
SCHOLION.

709. *Ex formulis hisce generalibus perinde ac supra deducuntur, quæ de motu gravium in medio resistente a* Newtono, Hugenio *&* Leibnitio *inventa sunt, quemadmodum ex sequentibus intelligitur.*

THEOREMA 159.



710. *Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum; curva celeritatum residuarum* AQH *est Logarithmica, cujus asymptotus* BF *tempus exponit,*



sit, semiordinatæ vero OQ *ad asymptotum relatæ sunt differentiæ inter celeritates residuas* PQ *& subtangentem* AB.

Demonstratio.

Si $AP = x$, $PQ = v$, $AB = a$; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708). Est vero $z = v$ *per hypoth.*

$$\text{Ergo } adx - adv = vdx$$

$$adx - vdx = adv$$

$$dx = \frac{adv}{a - v}$$

Quæ est æquatio ad curvam AQH. Fiat $a - v = y$

$$\text{erit } a - y = v$$

$$- dy = dv$$

$$- \frac{ady}{y} = \frac{adv}{a - v} = dx$$

Quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$ (§. 54 *Analys. infinit.*).

Sit itaque $AB = a$, $AP = BO = x$; erit $Oo = Pp = dx$. Quoniam $PQ = v$; erit $QO = a - v = y$, ideoque $QL = -dy$. Quodsi ergo sumta AB pro subtangente describatur Logarithmica, cujus asymptotus BF; erit $dx = - \frac{adv}{y}$ æquatio ad eandem. Est igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF, semiordinatæ vero sunt differentiæ inter lineas, quæ celeritates in fine singulorum temporum residuas exponunt, atque rectam quandam constantem AB, cui subtangens æqualis est (§. 54 *Anal. infin.*). *Q. e. d.*

Corollarium.

711. Quodsi fiat $PM = AP$ & $MN = PQ$; erit PN celeritas per resistentiam amissa tempore AP, consequenter ANG curva resistentiæ totalis (§. 682). Data igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum, datur curva resistentiæ totalis ANG.

Theorema 160.

712. *Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum; spatia movendo confecta sunt ut celeritates extinctæ.*

Demonstratio.

Si omia fuerint ut in theoremate præcedente; erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Est vero $vdx = ds$ (§. *cit.*). Ergo $ds = adx - adv$, consequenter $s = ax - av$. Est igitur propter constantem a spatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181 *Arith.*). Quoniam (*Vid. Fig. ut sup.*) $PM = x$, $MN = v$; PM vero est celeritas cadendo tempore AP acquisita, & MN celeritas in fine temporis in medio resistente residua; erit $PN = x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igitur spatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. *Q. e. d.*

Corollarium.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non resistente a gravi acquisitam est ut tempus AP (§. 68), PN vero denotans celeritatem extinctam ut spatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus insumtis proportionales, a quibus spatia movendo in medio resistente confecta si subtrahantur relinquunt rectas NM celeritati in medio resistente a gravi acquisitæ proportionales.

THEO-

THEOREMA 161.

714. *Si complementa celeritatum a gravi in medio resistente in ratione celeritatum cadendo acquisitarum ad celeritatem maximam, quam corpus cadendo acquirere valet, sumantur ut numeri; erunt tempora insumta ut eorum logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Si (*Vid. Fig. pag. præc.*) BF exponit tempus; curva AQH celeritatum residuarum est Logarithmica, cujus asymptotus BF, subtangens AB (§. 710). Quoniam Logistica AQH cum asymptoto BF non concurrit nisi infinito intervallo (§. 556 *Analys. finit.*); AB est celeritas, quam in medio resistente infinito tempore grave cadendo acquirere potest, ideoque absolute maxima. Est itaque QO celeritas tempore AP in medio resistente acquisita complementum ad maximam. Quamobrem si complementa celeritatum acquisitarum ad maximam sunt ut numeri; erunt tempora insumta, quæ per AP sive BO denotantur, ut ipsorum Logarithmi (§. 553 *Analys. finit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 162.

715. *Si grave in medio cadit, quod in ratione celeritatum descensui ejus resistit; celeritatem absolute maximam nunquam acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim curva celeritatum residuarum in medio resistente, seu acquisitarum (*Vid. Fig. pag. præc.*), si medium in ratione celeritatum resistit, AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF (§. 710). Quoniam celeritates acquisitæ sunt semiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræsentatur per semiordinatam, quæ respondet puncto, in quo curva AQH asymptotum BF secat. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 556 *Analys. finit.*), seu quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem absolute maximam acquirat. Eam igitur nunquam acquirit. *Q. e. d.*

THEOREMA 163.

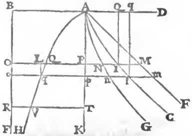
716. *Si grave descendit per medium in ratione velocitatum resistens; celeritatum temporibus in progressione arithmetica auctis cadendo acquisitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere potest, differentiæ in progressione geometrica decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Constat enim ex antecedentibus, (*Vid. Fig. pag. præc.*) si AQH sit Logarithmica, cujus asymptotus BF & AK eidem parallela, esse QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquisitam (§. 710), & BA celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abscissæ BO, BR ut tempora, semiordinatæ ipsis respondentes OQ & RV ut celeritatum QP & VT istis temporibus acquisitarum differentiæ a maxima, seu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero si in Logarithmica abscissæ crescunt in progressione arithmetica, semiordinatæ in geometrica decrescunt (§. 552 *Analys. finit.*). Ergo si grave per medium in ratio-

ratione velocitatum resistens cadit & tempora in progressione arithmetica crescunt, celeritatum temporibus istis acquisitarum differentiæ a maxima in geometrica decrescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 164.



717. *Si gravi per medium descendenti resistatur in ratione celeritatum & axis* AK *tempora descensus repræsentet*, ANG *sit curva resistentiæ totalis*, AQH *vero curva celeritatum acquisitarum*, & *circa axem* AD *ad* AK *normalem describatur parabola* AIC, *cujus parameter est ut dupla celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere valet; spatium in medio resistente confectum est ad spatium eodem tempore in vacuo conficiendum in ratione* PN *ad* PI, *seu ut semiordinata curvæ resistentiæ totalis ad semiordinatam parabolæ externæ ad eundem axem relatæ*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim spatium in medio resistente in ratione celeritatum movendo confectum est tempore $AP = x$ ut $ax - av$ (§. 712), spatium vero eodem tempore in vacuo conficiendum ut $\frac{1}{2}x^2$ (§. 80); erit illud ad hoc ut $ax - av$ ad $\frac{1}{2}x^2$, consequenter ut $x - v$ ad $x^2 : 2a$ (§. 181 *Arith.*). Jam cum ANG sit curva resistentiæ totalis *per hypoth.* erit $PN = x - v$ (§. 712) & quia AQH est curva celeritatum temporibus x acquisitarum *per hypoth.* celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere potest, est ut recta $AB = a$ (§. 715). Enimvero si circa axem AD parametro $2a$, quæ est dupla celeritas maxima a gravi acquisitu possibilis, describatur parabola AIC, cum sit $QI = AP = x$; erit $AQ = PI = x^2 : 2a$ (§. 391 *Analys. finit.*). Est igitur spatium movendo in medio resistente confectum ad spatium eodem tempore in medio non resistente conficiendum ut PN ad PI. *Q. e. d.*

THEOREMA 165.

718. *Spatium a gravi per medium in ratione velocitatum resistens descendente confectum tempore infinito infinitum est; celeritas vero tempore isto acquisita finita est.*

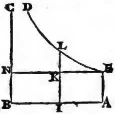
DEMONSTRATIO.

Iisdem enim positis, quæ in antecedentibus, spatium movendo confectum tempore AP est ut semiordinata PN. Quare cum crescente AP crescat etiam PN; ubi AP fit infinita, etiam applicata ad AP infinita evadere debet, consequenter tempore infinito percursum spatium infinitum est. *Quod erat unum.*

Jam celeritas absolute maxima, quam corpus in medio resistente cadendo acquirere potest, exponitur per subtangentem Logisticæ AQH ipsi AB æqualem, ideoque per lineam finitam, consequenter & ipsa finita est. Celeritas igitur tempore infinito acquisita finita est. *Quod erat alterum.*

THEO-

THEOREMA 166.



719. *Si intra asymptotos* CB & BA *rectangulas describatur Hyperbola aequilatera & recta* AB *vel rectangulum* ABNE *exponat celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens acquirere valet; area* AILE *exponet tempus, rectangulum* AIKE *celeritatem cadendo acquisitam & EKL spatium tempore isto confectum.*

DEMONSTRATIO.

Sit AB$=a$ seu ut celeritas maxima, quam corpus acquirere valet, AI$=v$, seu celeritas tempore x acquisita, & AE $= b$; erit ob constantem b, $ab:bv = a:v$ (§.178 *Arith.*), ideoque etiam rectangulum ABNE exponet celeritatem maximam, quam corpus cadendo in medio resistente acquirere valet & AIKE exponet celeritatem dato tempore x acquisitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium resistit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{adv}{a-v}$ (§.710); ideoque $bdx = \frac{abdv}{a-v}$. Quoniam AB$=a$, AI$=v$; erit BI$=a-v$. Est vero in Hyperbola BA . AE $=$ BI . IL (§.488 *Anal.fin.*), ideoque $(a-v)$. IL $=ab$, consequenter IL$=ab:(a-v)$. Est igitur $abdv:(a-v)$ elementum areae AILE. Quamobrem bx aequatur areae AILE, & hinc $x =$ AILE : AE. Ob constantem itaque AE tempus x est ut spatium hyperbolicum asymptoticum AILE (§. 188 *Arith.*). *Quod erat secundum.*

Jam si tempus per x exponatur & celeritas eodem acquisita per v; spatium cadendo confectum est ut $x-v$ (§. 712). Quare si tempus exponitur per spatium hyperbolicum AILE & celeritas isto tempore acquisita per rectangulum AIKE; spatium descensus exponitur per eorum differentiam, ideoque per trilineum hyperbolicum EKL. *Quod erat tertium.*

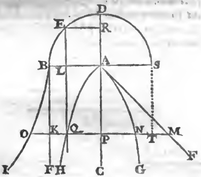
COROLLARIUM 1.

720. Quoniam celeritas per resistentiam medii in ratione celeritatis extincta est ut spatium dato tempore cadendo confectum (§.712), spatium vero hoc est ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore AILE extincta ut trilineum EKL.

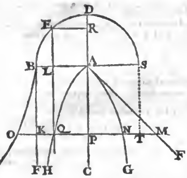
COROLLARIUM 2.

721. Et quia rectangulum AIKE celeritatem cadendo tempore AILE acquisitam exponit (§.719); celeritas acquisita est ad celeritatem extinctam ut rectangulum AIKE ad trilineum hyperbolicum EKL.

THEOREMA 167.



722. *Si recta dimidia* AB *sit subtangens &* AC *asymptotus Logarithmicae* BOI,



BOI, *ductaque* BF *ipsi* AC *parallela fiat ut semiordinata Logarithmicæ* OP *aucta dupla subtangente* AB *ad* OK *semiordinatam, ita abscissa* AP *ad quartam proportionalem* PQ; *erit punctum* Q *in curva celeritatum residuarum* AQH, *seu abscissa* AP *tempus, semiordinata* PQ *celeritatem hoc tempore cadendo a gravi acquisitam exponet, siquidem eidem resistitur in ratione celeritatum duplicata.*

DEMONSTRATIO.

Sit AB $= a$, AP $= x$, PQ $= v$; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708). Est vero $z = v^2 : a$ *per hypoth.* observata scilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2dx - a^2dv = v^2dx$$

$$a^2dx - v^2dx = a^2dv$$

$$dx = \frac{a^2dv}{a^2 - v^2}$$

Fiat $v = \frac{ay - a^2}{y + a}$

erit $dv = \frac{aydy + a^2dy - aydy + a^2dy}{(y + a)^2} = \frac{2a^2dy}{(y + a)^2}$

& $v^2 = \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

ideoque $a^2 - v^2 = a^2 - \frac{a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$
$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3 - a^4}{(y + a)^2} = \frac{4a^3y}{(y + a)^2}$

Ergo $\frac{a^2dv}{a^2 - v^2} = \frac{2a^4dy(y + a)^2}{4a^3y(y + a)^2} = \frac{\frac{1}{2}ady}{y}$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2}ady : y$, quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $\frac{1}{2}a$.

Sit itaque AB $= a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Describatur Logarithmica BOI, cujus asymptotus AC, subtangens $= \frac{1}{2}$AB $= \frac{1}{2}a$. Si jam sumatur AP $= x$; erit PO $= y$, ideoque OK $= y - a$, consequenter $dx = \frac{1}{2}ady : y$ (§. 54 *Analys. infinit.*). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, ideoque $y + a : y - a : = a : v$. Est itaque PO + AB : OK = AB : PQ. Quare cum PQ $= v$ sit celeritas tempore x residua; recta AP tempus, PQ celeritatem residuam seu hoc tempore acquisitam exponit, consequenter AQH est curva celeritatum residuarum (§. 682), *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

723. Quodsi fiat PM = AP & MN = PQ; erit punctum N in curva resistentiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM est ut celeritas cadendo in vacuo seu medio non resistente acquisita (§. 68). Quare cum PQ sit ut celeritas in medio resistente tempore AP acquisita (§. 722); si MN ipsi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas resistentia medii extincta tempore AP. Est igitur ANG curva resistentiæ totalis (§. 682).

THEOREMA 168.

724. *Iisdem positis, quæ in propositione præcedente (Vid. Fig. ut sup.), dupla subtangens* AB *Logarithmicæ* BOI, *cujus ope curva celeritatum residuarum* AQH *construitur, celeritatem maximam*

mam exponit, quam grave in medio in ratione duplicata celeritatum resistente cadendo acquirere potest; eam vero grave non acquirit nisi tempore infinito elapso & recta* BF *est curvæ celeritatum residuarum* AQH *asymptotus.

DEMONSTRATIO.

Ponamus semiordinatam QP, quæ celeritatem in medio resistente tempore AP acquisitam exponit, fieri ipsi AB seu subtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Est vero $PO + AB : OK = AB : PQ$ (§. 722), hoc est, $OK + 2AB : OK = AB : PQ$. Quare si PQ ipsi AB æqualis fieri debet, necesse est ut OK æqualis evadat ipsi $OK + 2AB$. Enimvero hoc fieri nequit, nisi quando 2AB respectu ipsius OK infinite parva evadit (§. 4 *Analys. infinit.*), consequenter quando OK, ideoque etiam BK infinita evadit. Ergo PQ ipsi AB æqualis fieri nequit, nisi quando AP infinita evadit. Curva igitur celeritatum residuarum cum recta BF nonnisi infinito intervallo concurrit, ideoque BF est ipsius asymptotus & AB exponit celeritatem maximam, quam corpus in medio resistente acquirere potest, cumque recta tempus repræsentans AP infinita evadit, quando fit $PQ = AB$, celeritas maxima nonnisi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

725. Quoniam $OK + 2AB : OK = AB : PQ$ (§. 724); erit $AB - PQ : PQ = 2AB : OK$ (§. 193 *Arith.*), hoc est, $KQ : QP = 2AB : OK$, seu differentia celeritatis dato tempore acquisitæ a maxima, quæ in medio resistente acquiri potest, est ad celeritatem dato tempore acquisitam ut dupla maxima, quæ acquiri potest, ad semiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad asymptotum BF curvæ celeritatum in medio resistente acquisitarum AQH.

COROLLARIUM. 2.

726. Quoniam celeritas maxima a gravi cadente in medio, quod in ratione duplicata celeritatum resistit, non acquiritur, nisi infinito tempore elapso (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere potest.

SCHOLION.

727. Hugenius *celeritatem maximam, quam grave in medio resistente acquirere potest*, celeritatem terminalem *appellat* (a).

THEOREMA 169.

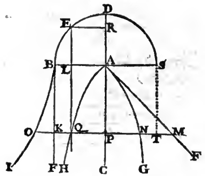
728. ***Si grave descenderet in vacuo seu medio non resistente, tempore finito eam celeritatem acquireret, quam in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente nonnisi tempore infinito acquirere potest.***

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile descendat in medio, quod in ratione celeritatum simplici resistit, sive in medio cadat, quod in illarum duplicata ratione descensum impedit; celeritas maxima, quam cadendo acquirere potest grave, est ut linea quædam data (§. 715. 724), ideoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquisitæ sint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio resistente tempore finito acquiritur in non resistente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque resistente non acquiritur nisi tempore infinito (§. 715. 724). Ergo in non resistente finito tempore acquiritur, quæ in resistente utroque infinito acquiritur. *Q. e. d.*

(a) In Discursu de causa gravitatis p. 170.

THEOREMA 170.



729. *Spatium in vacuo celeritate terminali* AB *tempore* AP *a gravi percursum est ad spatium eodem tempore percursum in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente ut rectangulum* ABKP *ad aream* AQP.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur *per hypoth.* spatium percursum erit in ratione composita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§.34), ideoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio resistente spatium tempore AP percursum est ut area curvæ celeritatum residuarum AQP (§.708). Est igitur spatium a gravi in medio resistente percursum, sive motus impediatur in ratione celeritatum, sive in ratione earundem duplicata, ad spatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum ut area curvæ celeritatum residuarum AQP ad rectangulum ABKP. *Q. e. d.*

HHEOREMA 171.

730. *Si celeritate terminali tanquam radio describatur quadrans circuli & celeritas in medio, quod in ratione duplicata celeritatum resistit, a gravi cadendo acquisita exponatur per cosinum arcus; spatium in medio isto descriptum erit ut differentia logarithmorum sinus versi & excessus diametri supra eundem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $=x$, celeritas in medio resistente acquisita $=v$; erit spatium in eodem percursum $\int vdx$ (§.708). Reperimus vero supra (§. 722) $dx = \frac{a^2dv}{a^2-v^2}$. Ergo $vdx = \frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$. Sed $\frac{vdv}{a^2-v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv+\frac{1}{2}vdv}{(a-v)(a+v)} - \frac{\frac{1}{2}adv+\frac{1}{2}vdv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2}dv}{a+v}$. Ergo $vdx = \frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$ *per demonstrata* $= \frac{\frac{1}{2}a^2dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2}a^2dv}{a+v}$. Jam $\int dv:(a-v) = -l(a-v)$ & $\int dv:(a+v) = l(a+v)$ quia quantitate constante a sumta pro unitate $a-v$ exprimit numerum unitate minorem, ideoque logarithmum habet negativum (§. 351 *Arith.*). Ergo $\int vdx = -\frac{1}{2}a^2l(a-v) - \frac{1}{2}a^2l(a+v)$. Sunt ergo spatia in medio resistente tempore x percursa ut $-\frac{1}{2}a^2l(a-v) - \frac{1}{2}a^2l(a+v)$, consequenter ob constantem $\frac{1}{2}a^2$ ut $-l(a-v) - l(a+v)$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, ut differentiæ Logarithmorum quantitatum $a-v$ & $a+v$. Quodsi jam celeritate terminali (*Vid. Fig.* §. 729) AB describatur quadrans BD ducaturque recta QE ipsi PD parallela; erit AL sinus arcus ED, seu cosinus BE $=v$, ideoque BL sinus versus arcus ejusdem BE $=a-v$, consequenter logarithmus negativus $a-v$ logarithmus sinus versi BL. Jam diame-

diameter circuli $= 2a$. Quare si inde subducas $a - v$, relinquetur $a + v$. Est igitur $a + v$ excessus diametri BS supra sinum versum BL, ideoque logarithmus positivus $a + v$ logarithmus excessus diametri BS supra sinum versum BL. Jam cum $-l(a - v) - l(a + v)$ sit differentia Logarithmi negativi ipsius BL & positivi LS; spatium a mobili in ratione celeritatum duplicata resistente descriptum est ut differentia logarithmorum sinus versi BL & excessus diametri BS supra sinum versum BL, si celeritate terminali describitur Quadrans circuli BED, & AL cosinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP, quæ celeritatem tempore AP acquisitam exponit, quo spatium istud confectum est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

731. Quoniam excessus diametri supra sinum versum est hujus complementum ad diametrum, & differentia Logarithmorum sinus versi & excessus ejus supra diametrum est Logarithmus sinus versi per complementum ejus ad diametrum divisi (§. 343 *Arith.*), consequenter logarithmus rationis sinus versi ad complementum ejus ad diametrum (§. 141 *Arith.*); si celeritate terminali sumta pro sinu toto, cosinus arcuum sint ut celeritates cadendo acquisitæ, erunt logarithmi rationis sinuum versorum ad eorum complementa ad diametrum ut spatia temporibus istis descripta, quibus celeritates fuere acquisitæ.

THEOREMA 172.

732. *Si gravis descensus impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritate (Vid. Fig. §. 729) terminali* AB *describitur quadrans circuli* BED, *sitque* ER $=$ AL *sinus arcus* ED *ut celeritas in medio resistente cadendo acquisita; erit spatium percursum ut logarithmus sinus complementi* EL.

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione præcedentis theorematis, si spatium sit s, AL $=$ ER $= v$, AB $= a$, esse $ds = \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Sit EL $= y$: erit (§. 377 *Analys. finit.*).

$$y^2 = a^2 - v^2$$

$$2ydy = -2vdv$$

$$ydy = -vdv$$

$$-a^2 ydy = a^2 vdv$$

$$\frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2} = -\frac{a^2 ydy}{y^2}$$

hoc est, $ds = -\frac{a^2 dy}{y}$

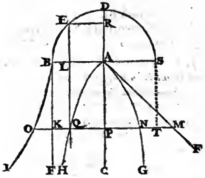
$$s = -a^2 \int \frac{dy}{y} = -a^2 ly$$

Sunt igitur spatia ut $-a^2 ly$, seu propter constantem a (§. 181 *Arith.*) ut $-ly$. Est vero $-ly$ logarithmus sinus EL, utpote negativus, quia sinus EL continuo decrescunt, crescentibus sinibus ER. Quare si velocitates residuæ sumuntur ut sinus arcuum ED, erunt spatia descripta eodem tempore, quo celeritates istæ cadendo acquisitæ, ut logarithmi cosinuum EL, seu sinuum complementorum arcuum ED. *Q. e. d.*

SCHOLION.

733. *Quod si dubites summam differentialis* $-a^2 dy : y$ *esse* $-a^2 ly$, *propterea quod quantitas constans eidem in integratione adjici possit* (§. 95 Anal. infinit.): *adjice quantitatem constantem* c *ut fit* $s = c - a^2 ly$. *Quoniam in casu* $v = 0$, *evadit* $y = a$, *erit* $c - a^2 la = 0$. *Sumatur* a *pro unitate, erit* $c - la = 0$, *ideoque* $c = la$. *Sed logarithmus unitatis* $= 0$ (§. 334 Arith.). *Ergo etiam* $c = 0$. *Patet igitur si* AB *sumatur pro unitate, non opus esse ut quantitas quædam constans in summatione elementi cosinus* EL *adjiciatur.*

THEOREMA 173.



734. *Si gravi descendenti resistitur in ratione duplicata celeritatum & cosinus arcus* EB *exponit celeritatem cadendo acquisitam, radius vero* AB *celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem istam cadendo acquisivit grave, est ut logarithmus rationis* SL *ad* LB, *seu complementi sinus versi ad diametrum ad sinum versum.*

DEMONSTRATIO.

Si sit AB $= a$, AL $=$ ER $= v$, tempus descensus $= x$; erit $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$, prouti apparet ex demonstratione theorematis 171 (§. 730). Jam vero $\frac{adv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}dv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}dv}{a+v}$ utpote (facta reductione ad denominationem eandem) $= (\frac{1}{2}adv + \frac{1}{2}vdv + \frac{1}{2}adv - \frac{1}{2}vdv) : (a-v)(a+v)$. Ergo $\frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx$. Quoniam $\int \frac{dv}{a-v} = -l(a-v)$ & $\int \frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v) - \frac{1}{2}al(a-v)$. Sunt igitur propter constantem $\frac{1}{2}a$ tempora, quibus celeritates v acquiruntur, ut $l(a+v) - l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v) = l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 343 *Arith.*), hoc est; cum sit $a + v =$ LS & $a - v =$ BL, $l(a+v) - l(a-v) = l($LS:LB$)$, qui est logarithmus rationis LS ad LB (§. 129 *Arith.*). Ergo si radius circuli AB exponit celeritatem terminalem & AL cosinus arcus BE celeritatem in medio resistente data lege acquisitam; erit tempus, quo celeritas hæc a gravi cadendo acquiritur ut logarithmus rationis complementi sinus versi ad diametrum LS ad sinum versum LB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

735. Patet ex demonstratione theorematis præsentis esse tempus x ut $l\frac{a+v}{a-v}$ si a exponat celeritatem terminalem & v celeritatem tempore x acquisitam. Est vero $a + v$ celeritas acquisita terminali aucta & $a - v$ differentia ejus a terminali seu complementum ad terminalem; consequenter $(a+v):(a-v)$ exprimit rationem celeritatis acquisitæ terminali auctæ ad ipsius complementum ad terminalem. Tempus igitur est ut logarithmus rationis celeritatis acquisitæ terminali auctæ ad ipsius complementum ad terminalem.

COROLLARIUM 2.

736. Quoniam (*Vid. Fig.* §. 734) QP $= v$, KQ $= a - v$; si fiat PT $=$ AS $=$ AB; erit QT $= a + v$, consequenter logarithmus rationis TQ ad QK ut tempus.

THEOREMA 174.

737. *Si rationes inter summam celeritatis terminalis & acquisitæ atque differentiam acquisitæ a terminali sumantur ut numeri & descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum; erunt tempora, quibus celeritates fuerunt acquisitæ, ut logarithmi.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis fuerit $= a$, acquisita $= v$; erit summa terminalis & acquisitæ $a + v$ & differentia acquisitæ a terminali $a - v$, consequenter ratio summæ illius ad hanc differentiam $= \frac{a+v}{a-v}$ (§. 129 *Arith.*). Sunt vero tempora, quibus celeritates istæ acquiruntur, ut $l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 734). Quare si ratio summæ terminalis celeritatis ac acquisitæ ad differentiam acquisitæ a terminali sumitur ut numeris; erit tempus, quo celeritas acquisita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA 175.

738. *Si descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum & spatia percursa sint ut logarithmi (Vid. Fig. §. 734) Sinuum* LE *arcus* BE *quadrantis* BD *celeritate terminali tanquam radio descripti; tempora insumta sunt ut logarithmi rationis inter sinum versum* BL *& complementum ejus ad diametrum* LS.

DEMONSTRATIO.

Si enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis & celeritate terminali AB descripto quadrante BED cosinus arcus BE, seu arcus ED sinus LA est ut celeritas acquisita; spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum EL (§. 732), tempora vero insumta ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§. 734). Quamobrem quando spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum; tempora insumta sunt ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA 176.

739. *Incrementum celeritatis gravium in medio non resistente est ad incrementum acquisitæ in medio, quod in ratione duplicata celeritatis resistit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus supra quadratum celeritatis acquisitæ excessum.*

DEMONSTRATIO.

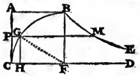
Quoniam celeritas gravium in medio non resistente crescit in ratione temporis (§. 68); si tempus dicatur x; erit incrementum celeritatis momentaneum in tempusculo scilicet dx uti dv. Jam si celeritas teminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio, quod in ratione duplicata celeritatis resistit, acquisita $= v$; erit $a^2dx - v^2dx = a^2dv$, prouti patet ex demonstratione theorematis 167 (§. 722). Est igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv sit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege resistente acquisitæ, erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio resistente ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus excessum supra quadratum acquisitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $a^2 - v^2 = (a + v)(a - v)$; erit dx ad dv in ratione composita a ad $a + v$ & a ad $a - v$, hoc est, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum est in casu dato ad incrementum in medio resistente in ratione composita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquisita auctam & ejusdem celeritatis terminalis ad ipsius supra acquisitam excessum.

THEO-

THEOREMA 177.



741. *Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis exponitur per rectam* AB = CF, *qua tanquam radio describitur quadrans* CGB, *eodem vero pro latere potentiæ hyperbolæ sumto intra asymptotos* AC & CD *describatur hyperbola* BME *fiatque* HF *celeritati in medio resistente acquisitæ æqualis; area hyperbolica* APMB *exprimit spatium eo tempore a gravi percursum, quo celeritatem* HF *acquisivit.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim $AB = AC = CF = a$, $HF = v$; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§.417 *Geom.*), $GH = CP = \sqrt{(a^2 - v^2)}$, consequenter ob $PC . PM = AB^2$ (§.488 *Anal.fin.*) $PM = a^2 : \sqrt{(a^2 - v^2)}$. Jam differentiale rectæ $AP = a - \sqrt{(a^2 - v^2)} = \frac{vdv}{\sqrt{(a^2 - v^2)}}$. Quamobrem elementum areæ $APMB = \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$, consequenter area $APMB = \int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Est vero spatium a gravi interea temporis percursum, quo celeritas v acquisita, $\int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$ (§.730). Ergo spatium hyperbolicum APMB exprimit spatium a gravi interea temporis percursum, quo celeritas HF acquisita. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquisita FH in terminalem PC degenerat, semiordinata PM cum asymptoto CD coincidit, ideoque area hyperbolica ABMP degenerat in infinitam EBACD, consequenter spatium repræsentat infinitum a gravi percursum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit nisi tempore infinito elapso (§. 724); spatium infinitum a gravi nonnisi tempore infinito percurritur.

THEOREMA 178.

743. *Si intra asymptotos* (*Vid. Fig.* §. 741) *rectangulas* DC & AC *describatur Hyperbola æquilatera* EMB, *cujus latus potentiæ est ut celeritas terminalis,* AP *vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquisitam; spatium hyperbolicum* ABMP *exponet spatium eodem tempore a gravi in medio descriptum, quod in ratione duplicata descensui resistit, quo celeritas acquisita fuit.*

DEMONSTAATIO.

Sit $AB = a$, erit etiam latus potentiæ hyperbolæ $= a$. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acquisita $= v$; erit *per hypoth.* $PA = \frac{v^2}{a}$, consequenter $CP = a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2 - v^2}{a}$. Unde ob $CP . PM = a^2$ (§. 488 *Analys. finit.*), reperitur $PM = \frac{a^3}{a^2 - v^2}$. Jam differentiale abscissæ $PA = \frac{2vdv}{a}$, consequenter elementum spatii hyperbolici $ABMP = \frac{2a^2 vdv}{a^2 - v^2}$ ideoque $ABMP = 2\int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Est igitur area hyperbolica ABMP ut $\int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$ propter constantem 2 (§. 181 *Arith.*). Ex antecedentibus constat spatium a gravi in medio data lege resistente interea temporis descriptum, dum celeritatem v acqui-

acquirit, esse ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ (§.730). Idem igitur spatium est ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMP.

SCHOLION.

744. *Patet ideo, unum idemque spatium descensus multis modis per figuras repræsentari posse.*

CAPUT XV.

De Machinis Simplicibus.

DEFINITIO 70.

745. M*Achina* vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium, vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLION.

746. *Quoniam effectus machinarum ex structura ipsarum secundum immutabiles motuum leges consequuntur; omnes operationes rerum corporearum mechanicæ dicuntur, quia agunt structura sua convenienter & juxta æternas motuum leges. Hinc manifestum est, illum demum mechanice philosophari, qui evidenter ostendit, quemodo vi legum motus effectus rerum ex structura ipsarum consequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum esse, qui mechanica philosophantur. Apparet etiam, philosophiam mechanicam liberam esse ab ea labe, quam imperiti eidem adspergere conantur. Imo nec obscurum est, sine Matheseos præsidio de rebus naturalibus temere philosophari.*

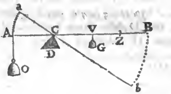
DEFINITIO 71.

747. Per *Potentiam* intelligo vim, quæ machinæ applicata ad motum tendit, sive actu eundem producat, sive non. In priore casu dicitur *Potentia movens*; in posteriore *Potentia sustentans*.

DEFINITIO 72.

748. *Pondus* appello, quod ope machinæ vel sustentatur vel movetur vel motui producendo utcunque resistit.

DEFINITIO 73.



749. *Vectis* est linea recta inflexilis & gravitatis expers AB, unico sui puncto C fulcro firmo D innixa, circa quod moveri potest.

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo instrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in usu applicatur, ad vectem revocantur, consequenter quæ de vecte demonstrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION 1.

751. *Ex natura igitur vectis ratio redditur non modo structuræ & effectuum omnium instrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non passim in vita communi obviorum; sed & motuum animalium: quod posterius primus docuit* Joannes Alphonsus Borellus *in peculiari* de motu animalium *opere.*

SCHOLION 2.

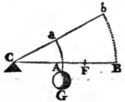
752. *In genere autem notandum est, ubi machinarum leges investigamus, non considerari materiam, ex qua constant, nec materiæ affectiones,* neque

neque varias figuras, quæ ob certos usus inducuntur; sed tantum eorum rationem haberi, quæ machinæ essentiam absolvunt, ut nempe constet, quæ machinæ qua tali conveniant. Quodsi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obstaculum impedire, quo minus lex ista accurate observari queat, ea ex suis principiis seorsim sunt determinanda.

DEFINITIO 74.

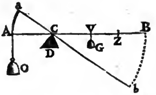
753. *Hypomoclium* est fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO 75.



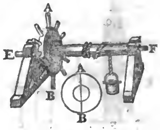
754. *Vectis homodromus* est, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentiæ B & hypomochium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C.

DEFINITIO 76.



755. *Vectis heterodromus* est, in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiæ B.

DEFINITIO 77.



756. *Axis in peritrochio* est circulus AB basi cylindri concentricus & una cum ipso circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille *Axis*, circulus *Peritrochium*, radii circuli (qui subinde soli comparent) *Scytalæ* appellantur.

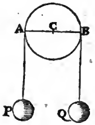
SCHOLION.

757. *Proprie per axem intelligitur virga ferrea, cui circumpositus est cylindrus ligneus scbytalis instructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi (§. 752), cur definitiones ad geometriam puram revocari consultum sit.*

COROLLARIUM.

758. Axi ideo in peritrochio locus est, quotiescunque in motu machinæ concipere licet circulum circa axem fixum descriptum & cylindri huic circumpositi plano concentricum.

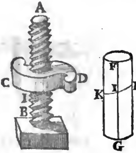
DEFINITIO 78.



759. *Trochlea* est circulus circa centrum C volubilis.

DEFI-

DEFINITIO 79.



760. *Cochlea* est cylindrus rectus AB spirali similiter sulcatus. Describitur autem illa spiralis, si recta FG motu æquabili in superficie cylindri circumferatur & interea punctum I ex F versus G motu itidem æquabili descendit. *Cochlea mas* est, si superficies convexa; *Cochlea fœmina* vero, si concava fuerit sulcata.

SCHOLION.

761. *Mas & fœmina, si motus gigni debet, semper conjunguntur. Loquor nimirum de cochlea simplicis usu. Si enim cum axe in peritrochio conjungitur; fœmina opus non est, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc in casu machina composita prodit.*

DEFINITIO 80.

762. *Cuneus* est prisma triangulare, cujus bases sunt triangula æquicrura acutangula.

AXIOMA 10.

763. *Potentia æqualis est ponderi, quod, salvo effectu, in ejus locum substitui potest.*.

SCHOLION.

764. *Patet ex ipsa æqualitatis definitione* (§. 15 Arith.).

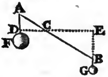
THEOREMA 179.

765. *Si potentia* (*Vid. Fig.* §. 755) B *vecti sive homodromo, sive heterodromo applicata sustentat pondus in* A *applicatum; rationem reciprocam distantiarum ab hypomochlio ad pondus habet*..

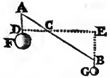
DEMONSTRATIO.

Sit primum vectis AB heterodromus. Quoniam supponitur horizonti parallelus; linea directionis utriusque ponderis erit ad ipsum perpendicularis, centrumque gravitatis unius in A, alterius in B (§. 215). Quodsi ergo pro potentia in B applicata substituatur pondus æquale (§. 763); habebimus duo pondera, quorum centra gravitatis recta AB connectuntur, eaque in æquilibrio, cum potentia pondus sustentet *per hypoth.* Est igitur C centrum gravitatis commune (§. 122), consequenter pondus in B, hoc est, potentia ad pondus in A reciproce se habet ut AC ad CB (§. 144). *Quod erat unum*.

Si vectis fuerit (*Vid. Fig.* §. 754) homodromus CB; ponderis G non aliam partem sustentat potentia in B applicata, quam quæ ferenda est a fulcro ibi supposito. Est igitur ad pondus A ut distantia ponderis ab hypomochlio AC ad distantiam potentiæ CB (§. 231). *Quod erat secundum*.



Si vectis fuerit inclinatus, hoc est, si linea directionis ponderis & potentiæ cum vecte AB angulum efficiat obli-



quum; erunt CD & CE ad lineas directionis AF & EG perpendiculares distantiæ a centro motus C (§. 229); consequenter eodem, quo ante, modo demonstratur, potentiam sustentantem, quæ in B applicatur, esse ad pondus in A suspensum ut DC ad CE (§. 272). *Quod erat tertium.*

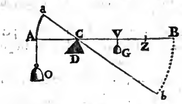
COROLLARIUM.

766. Quodsi potentia, quæ pondus sustentat, augeatur, præpollebit, ideoque dato vecte pondus movebit.

SCHOLION.

767. *Facile itaque ad vectem ea omnia transferuntur, quæ superius de æquiponderantibus* (§. 144 & seqq. itemque §. 231 & seqq. §. 272 & seqq.) *demonstrata sunt.*

PROBLEMA 122.



768. *Data gravitate vectis heterodromi* AB, *distantia centri gravitatis ab hypomochlio* CV, *distantiis ponderis atque potentiæ* AC *&* CB, *una cum pondere* O, *invenire potentiam, quæ ipsum sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiamus vectem gravitatis expertem & ejus loco in V appensum pondus eidem æquale G. Quodsi fiat ut AC ad CV ita gravitas vectis ad quartum; reperietur pondus, quod vectis sustentare valet (§. 765).
2. Subtrahatur id a pondere dato, residuum erit pondus a potentia sustentandum.
3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pondus residuum ad quartum; & reperietur potentia in B applicanda, ut dato vecte datum pondus sustentet (§. 765).

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 — 2 — 10   5 — 1 — 280
10   1
20   280
300
20   3
280   280 (56. Potentia.
55

PROBLEMA 123.

769. *Datis gravitate vectis* (*Vid. Fig.* §. 768) *heterodromi* AB, *distantia centri gravitatis ab hypomochlio* CV, *distantiis potentiæ atque ponderis* BC *&* CA *una cum potentia* B, *invenire pondus sustentandum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ut in problemate præcedente pars ponderis a vecte solo sustentanda.
2. Quæratur eadem ratione pars altera ponderis, quam potentia in B applicata sustentare valet.
3. Jungantur partes sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit pondus quæsitum.

Sit

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10, potentia 56 librarum: invenietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

pondus integrum = 300

PROBLEMA 124.

770. *Datis gravitate vectis (Vid. Fig. §. 768) heterodromi* AB, *pondere sustentando* O, *potentia in* B *applicanda, longitudine ac centro gravitatis vectis* V, *invenire centrum gravitatis commune seu centrum motus* C.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in centro gravitatis V appensum pondus G. Quæratur centrum gravitatis commune Z potentiæ in B applicatæ & ponderis G (§. 149).
2. Subtrahatur ZB ex AB, relinquetur AZ.
3. Concipiatur denique in Z appensum pondus, gravitati vectis & potentiæ junctim sumtis æquale, & inveniatur hujus ponderis & ponderis dati O centrum gravitatis commune C (§. 149), quod quærebatur.

E. gr. Sit potentia in B 56, gravitas vectis 10, pondus O 300 librarum, AB = 6, VB = 3. Fiat

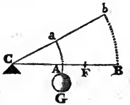
66 — 10 — 3
3
30

ZB = $\frac{30}{66}$ = $\frac{5}{11}$
AB = $\frac{66}{11}$
AZ = $\frac{61}{11}$

366 — 66 — $\frac{61}{11}$
h. e. 61 — 11 — $\frac{61}{11}$
11
61

$\frac{61x}{61x}$ (1 = AC

PROBLEMA 125.



771. *Datis gravitate & centro gravitatis* F *vectis homodromi* CB, *pondere* G, *distantia ejus ab hypomochlio* CA *una cum distantia potentiæ* CB, *invenire potentiam, quæ pondus sustentare valet*.

RESOLUTIO.

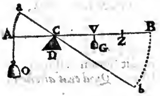
1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in F appensum pondus ei æquale, quæraturque potentia vectem solum sustentatura (§. 765).
2. Quæratur porro potentia requisita ad pondus datum G sustentandum (§. *cit.*).
3. Addantur potentiæ sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit potentia quæsita.

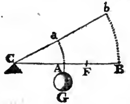
Sit e. gr. CA = 1, CF = 3, CB = 6, pondus datum 300, gravitas vectis 10 librarum. Reperietur potentia vectem sustentatura 5; pondus vero solum sustentatura 50, ideoque potentia 55 librarum.

THEOREMA 180.

772. *Si potentia vecte sive heterodromo, sive homodromo pondus attollit, spatium illius est ad spatium hujus ut hoc ad potentiam, quæ idem pondus tantum sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.





Dum pondus attollitur per arcum A*a*, potentia movetur per arcum B*b*. Sunt vero arcus A*a* & B*b* similes, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*), in homodromo, quia concentrici, consequenter A*a* : B*b* = AC : CB (§. 170 *Arith.* & §. 412 *Geom.*). Sed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod sustentare valet (§. 765). Ergo spatium potentiæ ad spatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ idem sustentare valet (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

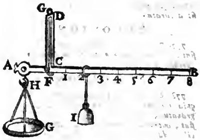
COROLLARIUM.

773. Lucrum itaque virium cum temporis dispendio conjungitur & contra.

PROBLEMA 126.

774. *Stateram construere, hoc est, instrumentum, quo unico pondere mediante diversorum corporum gravitatem explorare licet.*

RESOLUTIO.



1. In virga ferrea, aut lignea, aut ex quacunque materia alia parata AB assumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen seu lingula CD.
2. Jugum intra trutinam seu scapum GF suspendatur &
3. Brachium minus AC unco AH & & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquilibretur, aut non multum ab æquilibrio absit.
4. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duabus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, notenturque puncta, in quibus I ponderat ut una, duæ, tres, quatuor &c. libræ.

Ipsa constructio loquitur, hoc modo unici ponderis I ope pondera corporum admodum differentium explorari posse (§. 765).

SCHOLION I.

775. *Quodsi onera ingentia, quales sunt currus fæno onusti, ponderanda, non opus est, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illa sutera trutina & lingula non habens opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin sufficit, nudo oculo facile dignoscitur.*

SCHOLION 2.

776. *Empirica statera, qua utuntur artifices, diviso geometrica præferenda est, qua brachium longius*

longius BC *ejusdem ubique spissitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut constructio satis sit accurata.*

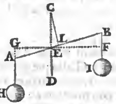
SCHOLION 3.

777. *Cum pondera non ubivis locorum æqualia sint; statera quoque empirico modo constructa universales non sunt.*

SCHOLION 4.

778. *Usus autem commodissimus sit stateræ usus, quia non multis opus est ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proscribi præstat, quoniam venditores fraudulenti fallacem facile reddunt, nec ideo in promptu sit fallaciam retegere. Ad communem itaque usum construuntur libræ æqualium brachiorum. Sed antequam constructionem tradamus, fundamenta quædam theoretica sunt præmittenda.*

THEOREMA 181.



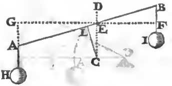
779. *Si libra, cujus centrum motus* C *fuerit supra rectam, e cujus extremis pendent pondera æqualia* H & I, *horizonti sit parallela; quiescit: sed si inclinatur; tamdiu movetur, donec iterum horizonti sit parallela.*

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum; lineæ directionis ponderum ad eam sunt perpendiculares (§. 212), ideoque brachia AL & LB coincidunt cum distantiis a centro motus (§.229). Quare cum sit AL = LB ex natura libræ, erit in L centrum gravitatis commune ponderum (§. 145). Ex hoc igitur suspensa quiescunt (§. 124). *Quod erat unum.*

Quodsi ex situ suo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt distantiæ GE & EF (§.229), quæ cum inæquales sint, pondera non æquilibrantur (§. 765), sed alterum I præponderat (§. 152): quod cum descendat, reddit libram in statum horizonti parallelum. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 182.



780. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus infra jugum* AB, *fuerit horizonti parallela; quiescit: si vero inclinatur; in situm horizontalem non revertitur, sed descendit pondus unum, donec libra pervenerit in situm priori contrarium.*

DEMONSTRATIO.

Si jugum AB fuerit horizontale; erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), ideoque distantiæ a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Est vero AL = LB, ex natura libræ, ideoque, cum pondera itidem æqualia sint *per hypoth.* centrum grvitatis commune eorundem est in C (§. 145), ac proinde situm non mutat (§. 124). *Quod erat unum.*

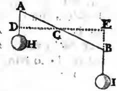
Si jugum inclinetur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & per E recta GF eidem parallela; erunt distantiæ GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori distantia EG, ideoque continuo descendit, donec A, B & L sint in eadem

recta

recta horizontali (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 183.

781. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus* C *in ipso jugo* AB, *fuerit horizonti parallela; quiescit, nec quomodocunque inclinata situm mutat.*



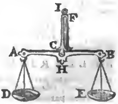
DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in theoremate præcedente. Posterius ita demonstratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE distantiæ ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad E & D atque verticales angulos ad C æquales (§. 156 *Geom.*), itemque AC $=$ CB, ex natura libræ, erit DC $=$ CE (§. 252 *Geom.*). Quare cum pondera H & I æqualia sint *per hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Libra igitur quiescit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 127.

782. *Libram construere, hoc est, instrumentum, in cujus extremitatibus appensa gravia æqualia æquiponderant in situ horizontali.*

RESOLUTIO.



1. Jugum AB bifariam dividatur in C, ita ut brachia AC & CB sint ejusdem longitudinis, sintque tum brachia cum uncis suis A & B, tum lances D & E ejusdem prorsus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appensum tam lancibus instructum, quam sine iisdem situm tueatur horizontalem.
2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen sive lingula CF.
3. Jugum denique intra trutinam HI ita suspendatur, ut centrum motus C sit paulo supra jugum seu rectam AB, quæ appensionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus sit in ipsa recta AB.

Dico, si libra ex trutina HI suspensa, examen intra eandem abscondatur, gravia lancibus imposita esse æqualia, seu gravitatem utriusque esse eandem.

DEMONSTRATIO.

Si libra ex I suspendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215). Quodsi ergo lingula intra eam absconditur, cum ea sit ad jugum AB perpendicularis *per construct.* jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C sit vel in jugo AB, vel supra jugum, *per construct.* pondera utrinque suspensa æqualia sunt (§. 779. 781). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

783. Si brachia sint inæqualia, libra dolosa est.

SCHOLION I.

784. *Præstat brachia esse longiora, quam breviora, quia idem error in divisione brachiorum admissus minorem in ponderibus producit, si brachia longiora, quam si breviora. Fac enim brachium* AC *esse justo longius uno scrupulo quarto, seu una decima linea. Si jugum* AB $= 5''$, *erit* BC : AC $= 500$

$= 500 : 501$. *Si* AB $= 5'$; *erit* BC : AC $=$ $5000 : 5001$. *In casu itaque posteriori differentia brachiorum est* $\frac{1}{5000}$; *in priore* $\frac{1}{500}$ *brevioris. Hinc & pondus majus in casu posteriore excedere debet minus* $\frac{1}{5000}$ *sui, in priore autem* $\frac{1}{500}$ *sui.*

SCHOLION 2.

785. *Vulgares libræ ita construuntur, ut centrum motus sit paulo altius jugo, quo libra ex situ horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appensis, non quiescat, nisi eidem restituta* (§. 779). *Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.*

SCHOLION 3.

786. *Ne affrictus impediat jugi e situ horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inseritur, cylindricus sit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Imo motus jugi pernicior evadit, si axis in aciem desinat, qua parte trutinam tangit. Unde & jugum leve ac tenue esse debet, quantum per materiam ponderandam fieri potest, ut minori vi e situ suo dimoveatur sicque accuratius indicet æquilibrium.*

PROBLEMA 128.

787. ***Libram propositam examinare, utrum accurata sit, nec ne.***

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera iis æquilibrata. Quodsi enim maneat æquilibrium, libra accurata est; sin minus, dolosa.

DEMONSTRATIO.

Si enim libra dolosa est, brachia inæqualia sunt (§. 783), ideoque lanx ex majori brachio suspensa levior altera (§. 765). Quare si lancem leviorem e minori, graviorem e majori brachio suspendas: præponderabit e majori brachio suspensa, ideoque æquilibrium tollitur (§. 152). *Q. e. d.*

PROBLEMA 129.

788. ***Libra dolosa verum pondus mercis explorare.***

RESOLUTIO.

1. Merce in lance (*Vid. Fig.* §. 782) E collocata, notetur pondus in altera D ipsi æquilibratum.
2. Eadem translata in D, notetur pondus in E ipsi æquilibratum.
3. Pondera ista in se invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc esse verum mercis pondus.

Sit e. gr. pondus in E $= 10$, in D $= 9$ librarum, reperietur verum mercis pondus $9\frac{42}{100}$.

DEMONSTRATIO

Est enim ut AC ad BC ita merx ad pondus in D positum & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§. 765). Ergo mercis pondus est medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 167. 156 *Arith.*), consequenter æquale radici ex facto ponderum in se invicem extractæ (§. 301 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

789. Si verum mercis pondus inventum; ratio brachiorum non amplius latet. Est enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipsi æquilibratum (§. 765), e. gr. in nostro exemplo ut 948 ad 900 seu ut 237 a 225 (§. 181 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

790. Data ratione brachiorum AC & CB facile determinatur error in æquilibrio admissus (§. 765). Æquiponderent e. gr. in lance E 100 libræ merci in altera D collocatæ. Ut habeatur quæsitum, fiat

```
237 — 225 — 100
      100
   ─────── 237 ) 22500 ( 95 fere
    22500         2133
                 ─────
                  2170
                  2185
```

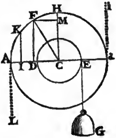
Dolus ergo comittitur 5 librarum.

COROLLARIUM 3.

791. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, iisdem datis. Sit enim jugum integrum 1000 partium. Fiat ut summa brachiorum 237 + 225 seu 462 ad majus 237 ita 1000 ad idem brachium in partibus jugi millesimis

simis 513 fere. Sed ex natura libræ esse debet 500: excedit ergo veram quantitatem particulis 13, qualium scilicet jugum est 1000.

THEOREMA 184.



792. *Si potentia ope axis in peritrochio sustentet pondus* G *sitque linea directionis* AL *ad peripheriam rotæ vel ad scytalam perpendicularis; erit ut radius axis* CE *ad radium rotæ* CA *seu longitudinem scytalæ ita potentia ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi potentia in A applicata deprimit rotam vel scytalam, perinde est ac si vecte heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G sustentaret. Si vero in *a* applicata eandem attollit, perinde est ac si vecte homodromo *a*EC pondus idem G sustentaret. Omnes enim machinæ partes reliquæ ad ponderis sustentationem nil conferunt, cum utrinque sibi mutuo æquilibrentur, ut machina tanquam gravitatis expers considerari possit. Jam cum linea directionis potentiæ in A vel *a* sit ad AC vel *a*C perpendicularis *per hypoth.* & funis EG a pondere G extensus ad EC horizontalem *per hypoth.* similiter normalis (§. 215); erit ut CE ad CA vel ut EC ad C*a* ita potentia ad pondus (§. 765). *Q. e. d.*

THEOREMA 185.

793. *Si potentia (Vid. Fig. §. 792) in* F *deprimat rotam juxta lineam directionis* FD *ad radium rotæ obliquam, sed directioni perpendiculari parallelam; ad potentiam, quæ juxta directionem perpendicularem* AL *agit, eam habet rationem, quam sinus totus ad sinum anguli directionis* DFC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FD perpendicularis ad AC *per hypoth.* erit DC potentiæ in F applicatæ distantia a centro motus C (§. 229). Est ergo ut potentia in F ad pondus G ita EC ad CD (§. 272), & ut potentia in A ad pondus G ita EC ad CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut AC ad DC (§. 199 *Arith.*). Sed si AC vel FC (§. 40 *Geom.*) sumatur pro sinu toto, erit DC sinus anguli DFC (§. 2 *Trigon.*). Potentia igitur in F est ad potentiam in A ut sinus totus ad sinum anguli directionis DFC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

794. Quare cum distantia potentiæ in A sit radius CA; dato angulo directionis DFC inveniri potest distantia DC.

Sit e. gr. FC = 4' & DFC = 48°. Calculus ita subducetur:

Log. sin. Tot.	10.0000000
Log. FC	0.6020600
Log. sin. DFC	9.8710735
Log. DC	10.4731335,

cui quam proxime respondent in tabulis 2' 9'' 7'''.

THEOREMA 186.

795. *Potentiæ in diversis (Vid. Fig. §. 792) punctis* F *&* K *rotam juxta directiones* FD *&* KI *perpendiculari* AL *parallelas deprimentes sunt inter se ut distantiæ a centro motus* CD *&* CI *reciproce.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Est enim potentia in F ad pondus G ut EC ad CD & idem pondus G ad potentiam in K ut IC ad CE (§. 765). Ergo potentia in F ad potentiam in K ut IC ad CD (§. 198 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

796. Crescente ideo distantia a centro motus potentia decrescit & contra, pondere manente eodem.

COROLLARIUM 2.

797. Quare cum radius AC sit distantia maxima & potentiæ juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quæ datum pondus G sustentare valent juxta diversas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM 3.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis; erit FD eidem parallela (§. 256 *Geom.*). Quare si ex F demittatur perpendicularis FM; erit eadem ipsi AC parallela (§. *cit.*), consequenter FM = DC (§. 257 *Geom.*). Cum ideo FM sit distantia potentiæ in F applicatæ; in praxi facile definitur absque calculo.

THEOREMA 187.

799. *Si potentia juxta perpendicularem (Vid. Fig. §. 792)* AL *deprimit rotam & pondus* G *attollit; erit spatium potentiæ ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam, quæ id sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum rota semel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per spatium peripheriæ axis æquale. Est itaque spatium potentiæ ad spatium ponderis ut peripheria rotæ ad peripheriam axis, consequenter ut radius rotæ AC ad radium axis CE (§. 412 *Geom.*). Sed ut AC ad CE ita pondus ad potentiam, quæ id sustentare valet (§. 792). Ergo spatium potentiæ est ad spatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ id sustentare valet (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 130.

800. *Dato pondere dataque potentia ipsum sustentatura axem in paritrochio construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur radius axis ponderi sustentando conveniens, ne scilicet axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus ita radius axis ad radium rotæ, seu longitudinem scytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

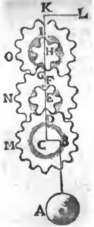
801. Quodsi potentia fuerit pars ponderis exigua, radius rotæ enormis prodit. E. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 librarum; erit radius rotæ ad radium axis ut 60 ad 1. Hinc si radius axis non excederet pedem dimidium, foret radius rotæ pedum 30.

SCHOLION.

802. *Huic malo medela affertur, rotas cum axibus multiplicando, & ut una alteram circumagere valeat, dentibus vel etiam tympanum paxillis instruendo.*

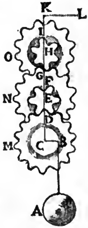
THEOREMA 188.

803. *Si pluribus rotis dentatis potentia aliqua, cujus linea directionis* KL *peripheriam ultimæ tangit, pondus* A *sustentat; erit ea ad pondus in ratione composita omnium earum, quas radii axium ad radios rotarum habent, nempe* CB : CD, EF : EG, HI : HK.



DEMONSTRATIO.

Quodsi concipiamus potentiam applicari in D: erit ea ad pondus A ut CB ad CD (§. 792), consequenter = A.CB:CD (§. 297 *Arith.*). Axis igitur DF tantopere gravatur, ac si pondus A.CB:CD appenderetur. Concipiamus itaque porro potentiam in G applicari, quæ hoc pondus ope rotæ alterius solius, consequenter pondus A ope duarum sustentet.



Cum sit ad pondus A.CB:CD ut EF ad EG (§. 792); reperietur = A.CB.EF : CD.EG (§. 297 *Arith.*). Quare axis tertius GI tantopere gravatur, ac si pondus A.CB.EF:CD.EG appenderetur. Quoniam potentia in K est ad hoc pondus ut HI ad HK (§. 792); reperietur ea = A.CB.EF.HI:CD.EG.HK (§. 297 *Arith.*), & ita porro, si plures fuerint rotæ. Est igitur potentia in K applicata ad pondus A, quod ope plurium rotarum sustentat, ut A.CB.EF.HI:CD.EG.HK ad A, hoc est, ut A.CB.EF.HI ad A.CD.EG.HK (§. 178 *Arith.*), ideoque & ut CB.EF.HI ad CD.EG.HK (§. 181 *Arith.*), consequenter in ratione composita CB:CD, EF:EG & HI:HK (§. 159 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

804. Quodsi pondus ducas in factum ex radiis axium & productum dividas per factum ex radiis rotarum; potentia ipsum sustentatura reperitur, quæ aucta idem attollet. Sit e. gr. A = 6000 librarum, BC = 6″, CD = 34″, EF = 5″, EG = 35″, HI = 4″, HK = 27″; erit BC.EF.HI = 120 & CD.EG.HK = 32130, & hinc potentia = 6000.120 : 32130 = $22\frac{1\ 1\ 3\ 4}{5\ 2\ 2\ 5}$ = $22\frac{5\ 4\ 6}{5\ 5\ 7}$ = $22\frac{2}{5}$ quam proxime.

COROLLARIUM 2.

805. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum dividas per factum ex radiis axium; prodibit pondus, quod sustentare valet. Sit e. gr. potentia $22\frac{5\ 4\ 6}{5\ 5\ 7}$ librarum, reliqua omnia sint ut ante; reperitur pondus 6000.

SCHOLION.



806. *Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur manubrium* ABCD, *ubi* AE *radio axis*, CD *radio rotæ respondent*.

PROBLEMA 131.

807. *Data potentia datoque pondere, invenire numerum rotarum & in unaquaque rationem radii axis ad radium rotæ definire, ita ut potentia peripheriæ rotæ ultimæ applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum sustentet.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus dispergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium se habere ad radios rotarum ut unitatem ad factores singulos.

Sit e. gr. pondus 30000 librarum & potentia 60, erit quotus 500, qui resolvitur in factores 4.5.5.5. Quatuor igitur construi possunt rotæ, in quarum una radius axis est ad radium rotæ ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur, unitas eſt ad quotum ut potentia ad pondus (§. 69 *Arith.*). Eſt igitur potentia ad pondus in ratione compoſita unitatis ad ſingulos quoti factores (§. 159 *Arith.*). Quare ſi radii axium fiant ad radios rotarum ut unitas ad eoſdem factores; potentia erit ad pondus in ratione compoſita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus ſuſtentare valet ope machinæ conſtructæ (§. 803). *Q. e. d.*

SCHOLION.

808. *Quoniam in exceſſu peccari nequit, conſultum eſt, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem aſſumere. Similiter unam, imo aliquot unitates quoto addere licet, ſi in factores commode diſpergi nequit.*

THEOREMA 189.

809. *Si ope duarum rotarum potentia movet pondus; revolutiones tardius motæ ſunt ad revolutiones celerius motæ ut peripheria axis celerius motæ ad peripheriam rotæ, cui occurrit.*

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*) mota M unam revolutionem abſolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, conſequenter rota N, circumvolvitur, antequam rota M unam revolutionem abſolvat, quoties peripheria axis FD in peripheria rotæ M continetur. Sunt ideo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

810. Eædem igitur revolutiones ſunt ut radius axis FE ad radium rotæ DC (§. 412 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

811. Cum numerus dentium in axe FD ſit ad numerum dentium in peripheria rotæ M ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium ſeu paxillorum in axe FD ad numerum dentium in rota M, cui ille occurrit.

THEOREMA 190.

812. *Si ope plurium rotarum* (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*) M, N, O *&c. potentia movet pondus* A; *erunt revolutiones rotæ celerrime motæ* O *ad revolutiones tardiſſime motæ* M *in ratione compoſita ex rationibus peripheriarum rotarum* M, N *&c. ad peripherias axium* DF, GI *&c. qui illis occurrunt.*

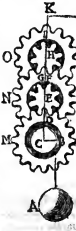
DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N m & n, peripheriæ axium DF & GI a & b; erit ut a ad m ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) $= m:a$ (§. 302 *Arith.*). Eſt vero porro ut b ad n ita $m:a$ ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) $= mn:ab$ (§. 302 *Arith.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O ſunt ad revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ut $mn:ab$ ad 1, hoc eſt ut mn ad ab (§. 178 *Arith.*), conſequenter in ratione compoſita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI, qui ipſis occurrunt (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

813. Quoniam numeri dentium ſunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones rotæ velociſſime motæ O in ratione compoſita earum, quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis M & N &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 2.



814. Quia peripheriæ ſunt ut radii (§ 412 *Geom.*), revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones rotæ velociſſime motæ O in ratione compoſita earum, quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 3.

815. Quare ſi factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardiſſime motæ M & productum dividas per factum ex radiis axium, qui ipſis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velociſſime motæ O (§. 302 *Arith.*). E. gr. ſit GE = 8, DC = 12, GH = 4, DE = 3, & revolutio rotæ M una, erit numerus revolutionum rotæ O = 96 : 12 = 8.

PROBLEMA 132.

816. *Datis revolutionibus rotæ velociſſime (Vid. Fig. §. 814) circumactæ O interea abſolutis, dum tardiſſime mota M ſemel in orbem redit; invenire dentium in axibus & rotis numerum.*

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum diſpergatur in factores.
2. Numerus dentium ſeu paxillorum in axibus pro arbitrio aſſumtus ducatur ſigillatim in ſingulos factores.

Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum, quibus totidem axes occurrunt.

E. gr. Si rota velociſſime mota 40 revolutiones abſolvat, dum tardiſſime mota ſemel circumagitur; reſolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus eſſe rotis totidemque axibus dentatis, qui iſtis occurrant. Quodſi axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis inſtruenda, figuram ſortitura pro potentiæ applicandæ conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardiſſime motæ ſunt ad revolutiones velociſſime circumactæ in ratione compoſita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 813). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velociſſime circumactæ reſolvitur, ſitque idcirco unitas ad factores hoſce ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 66 *Arith.*); revolutiones rotæ tardiſſime motæ erunt ad revolutiones velociſſime circumactæ in ratione compoſita unitatis ad factores numeri revolutionum poſteriorum dati, conſequenter ut unitas ad ipſum hunc numerum (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 191.

817. *Si ope plurium rotarum potentia movet pondus; ſpatium ponderis eſt ad ſpatium potentiæ ut potentia ſuſtentans ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ (*Vid. Fig. §. 814*) rotarum M, N, O &c. *a*, *b*, *c* &c. axium CB, DE, GH &c. *d*, *e*, *f* &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M ſemel in orbem redit, *ab : ef* (§. 812). Jam ſi rota M ſemel circumagitur, ſpatium a pondere percurſum æquatur peripheriæ axis BC, ſpatium vero potentiæ, peripheriæ rotæ O per numerum revolutio-

num

num interea absolutarum multiplicatæ. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentiæ ut d ad $abc:ef$, consequenter ut def ad abc (§. 178 *Arith.*). Sed $d:a = CB:CD$, $e\ b = DE:EG$, $f:c = GH:HK$ (§.412 *Geom.*), ideoque $def:abc = CB.DE.GH:CD.EG.HK$ (§.218 *Arith.*). Ergo spatium ponderis ad spatium potentiæ ut $CB.DE.GH$ ad $CD.EG.HK$ (§. 167 *Arith.*), & ideo ut potentia sustentans ad pondus (§.803). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA 192.

819. *Spatia ponderis atque potentiæ sunt in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ & peripheriæ axis illius ad peripheriam hujus.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardissime motæ $= m$, numerus revolutionum velocissime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$; peripheria posterioris $= b$. Cum in una revolutione spatium ponderis sit a, potentiæ b; erit spatium ponderis, durantibus revolutionibus m, $= ma$; spatium potentiæ, durantibus revolutionibus n, $= nb$. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentiæ ut ma ad nb, hoc est, in ratione composita revolutionum m & n, atque peripheriæ axis rotæ tardissime motæ a & peripheriæ rotæ velocissime motæ b (§.159 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

820. Cum spatia ponderis & potentiæ sint reciproce ut potentia sustentans ad pondus (§.817); potentia sustentans pondus erit ad pondus in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones velocissime motæ & peripheriæ axis illius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA 133.

821. *Data peripheria axis rotæ tardissime motæ cum peripheria rotæ velocissime motæ & ratione revolutionum rotæ illius ad revolutiones hujus, invenire spatium, quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur spatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardissime motæ in antecedentem & peripheria rotæ velocissime motæ in consequentem rationis.
2. Quæratur ad hæc duo facta & spatium ponderis datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): erit is spatium potentiæ quæsitum (§. 819).

Sit e. gr. ratio revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ $= 2:7$, & spatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardissime motæ sit ad peripheriam velocissime circumactæ ut 3 ad 8. Reperietur spatium potentiæ $= 7.8.30:2.3 = 7.4.10 = 280'$.

PROBLEMA 134.

822. *Data peripheria rotæ velocissime motæ una cum numero revolutionum ejusdem & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardissime motæ, quam revolutionum utriusque, invenire spatium ponderis.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velocissime motæ in numerum revolutionum ejusdem, factum erit potentiæ spatium.

2. Ducan-

2. Ducantur quoque in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
3. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium potentiæ modo inventum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): erit is ſpatium ponderis quæſitum (§. 819).

E. gr. Sit peripheria rotæ velociſſime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis, ex quo pondus ſuſpenditur, = 8 : 3, numerus revolutionum = 28, ratio revolutionum = 7 : 2. Reperitur ſpatium ponderis = 3 . 2 . 28 . 10 : 8 . 7 = 3 . 10 = 30.

PROBLEMA 135.

823. *Data ratione peripheriarum rotæ velociſſime motæ atque axis rotæ tardiſſime motæ, itemque revolutionum utriuſque, una cum pondere, invenire potentiam, quæ id ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
2. Quæratur ad factum antecedentium, factum conſequentium & pondus datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): erit is potentia quæſita (§. 820).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperitur potentia = 3 . 2 . 2000 : 8 . 7 = 12000 : 56 = $214\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

824. *Non abſimili modo pondus invenitur, ſi potentia detur & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardiſſime motæ & rotæ velociſſime circumactæ, quam revolutionum utriuſque.*

PROBLEMA 136.

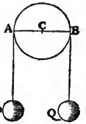
825. *Datis revolutionibus rotæ velociſſime motæ interea abſolvendis, dum tardiſſime mota ſemel in orbem redit, una cum ſpatio, per quod pondus elevari debet & peripheria axis rotæ tardiſſime motæ, invenire tempus elevationi quæſitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat ut peripheria axis rotæ tardiſſime motæ ad ſpatium ponderis datum, ita numerus revolutionum rotæ velociſſime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea abſolvendarum, dum pondus emetitur ſpatium datum.
2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ velociſſime circumactæ intra unius horæ ſpatium aut tempus datum quodcunque abſolvendarum.
3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus.

Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum.

THEOREMA 193.



826. *Si potentia* P *ope trochleæ ſimplicis pondus* Q *ſuſtentat, ita ut linea directionis utriuſque tangat peripheriam; erit huic æqualis.*

DEMON-

Demonstratio.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam trochleæ tangunt *per hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares sunt (§. 308 *Geom.*). Jam cum ad sustentationem præter rectam ACB partes reliquæ nil conferant, sitque centrum motus in C (§. 759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 765). Sed CB = CA (§. 759). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

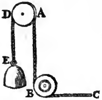
Corollarium 1.

827. Trochlea igitur simplex, si lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, sed ejus directionem tantum mutat.

Corollarium 2.

828. Utimur ergo trochlea, quoties potentiæ trahentis directio verticalis in horizontalem, aut sursum tendens in tendentem deorsum & contra mutari debet.

Scholion 1.

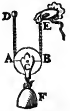


829. *Hoc ipso securitati trahentium sæpissime prospicitur. Fac enim pondus ingens esse ad insignem altitudinem attollendum ab operariis funem trahentibus. Quodsi contingat funem* DE *abrumpi & operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vitæ periculo constituuntur. Enimvero si ope trochleæ* B *directio verticalis* AB *in horizontalem* BC *mutatur rupto fune* DE *nihil metuendum periculi.*

Scholion 2.

830. *Hæc ipsa mutatio lineæ directionis ope trochlearum in horizontalem hunc etiam præstat usum, ut, si potentia aliqua secundum unam directionem plus virium impendere possit, quam secundum alteram, vi maxima utamur, nec non ut potentiis uti liceat, quæ juxta datam directionem agere non possent. E. gr. equus non trahit secundum directionem verticalem, trahit tamen secundum horizontalem. Verticalis igitur tractio si mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.*

Theorema 194.



831. *Si potentia in* E *applicata secundum lineam directionis* BE, *quæ trochleam in* B *tangit & funi* AD *parallela est, pondus* F *ex centro trochleæ* C *suspensum sustentet; ponderis subdupla est.*

Demonstratio.

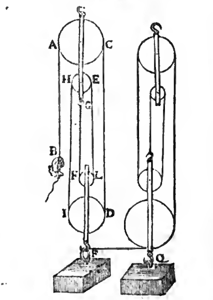
Patet enim præter rectam AB partes trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F sustentationem, cum vero trochlea sit circa centrum C mobilis (§. 759) in eo erit centrum motus. Et quia tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentiæ BE ad AB perpendicularis *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F ut AC ad AB (§. 765). Est vero AC = $\frac{1}{2}$AB (§. 759). Ergo potentia ponderis F subdupla. *Q. e. d.*

Scholion.

832. *Cum trochlea cum unco suo & loculamento, quod in usu abesse nequit, una attollatur a potentia sursum trahente secundum directionem* EB, *ejus gravitas ponderi* F *addenda est.*

THEO-

THEOREMA 195.



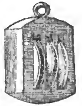
833. *Si potentia in* B *applicata ope polyspasti sustentet pondus* F, *ita ut omnes funes* AB, HI, GF, EL, CD *sint inter se paralleli; erit potentia ad pondus ut unitas ad numerum funium* HI, GF, EL, CD, *qui a pondere* F *trahuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes sunt inter se paralleli, ideoque a centris trochlearum suarum intervallo radiorum utrinque distant; nulla est ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit ideoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, si fuerint funes quatuor, perinde sit ac si tantum pars quarta ponderis ex fune CD suspenderetur. Potentia igitur in B applicata cum æqualis sit ponderi ex fune CD suspenso (§. 826); quartam non nisi ponderis partem in præsenti casu sustentat, hoc est, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium, quos pondus F extendit. *Q.e.d.*

SCHOLION 1.

834. *Ne polyspastorum altitudo in nimium excrescat, si ex pluribus trochleis componantur; trochleæ ita junguntur, ut tam omnes superiores, quam omnes inferiores circa communem axem versatiles existant. Tum vero omnes inter se æquales esse debent, ut funes sint paralleli.*



SCHOLION 2.

835. *Usus trochlearum insignis est in ponderibus elevandis, tum quod machina spatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod insigni virium compendio pondus satis ingens attolli possit.*

COROLLARIUM 1.

836. Cum numerus trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum æqualis sit numero funium inferiores sustentantium (*Vid. Fig. §. 833*); potentia pondus F ope polyspasti sustentans est ad pondus ut unitas ad numerum trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum.

COROLLARIUM 2.

837. Datis igitur trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus sustentandum; potentia nempe per numerum trochlearum multiplicatur. Sit e. gr. potentia 50 librarum, numerus trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLION 3.

838. Dechales (a) *auctor est, experientia constare, quod homo simpliciter solo insistens 150 libras elevare possit. Cum igitur 150 librarum potentia ope polyspasti ex 6 trochleis compositi 900 libras sustentare possit; evidens est, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere possit.*

SCHO-

(a) Mechanic. lib. 4 prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. 189.

SCHOLION 4.

839. *Mire multiplicantur trochlearum vires, si polyspasti plures conjunguntur, tum enim potentia in polyspasto uno ad attollendum (Vid. Fig. §. 833) pondus Q applicanda vicem subit ponderis F ex polyspasto altero appensi. Ponamus igitur pondus Q esse 1000 librarum & trochleas in unoquoque polyspasto quatuor; erit ergo pondus F ex altero polyspasto suspensum nonnisi quarta illius pars, nempe 250, consequenter potentia quarta pars hujus, hoc est, decima sexta totius, $62\frac{1}{2}$.*

PROBLEMA 137.

840. *Datis pondere atque potentia, invenire numerum trochlearum, ex quibus componendus est polyspastus.*

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quæsitus (§. 836).

Sit e. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus trochlearum 4: quarum omnium eadem diameter, si duæ in parte inferiore, duæ in superiore circa communem axem versatiles construantur (§. 834).

THEOREMA 196.

841. *Si potentia trochlearum ope movet pondus; erit spatium potentiæ ad spatium ponderis ut pondus ad potentiam sustentantem.*

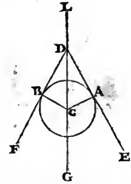
DEMONSTRATIO.

Ponamus enim (*Vid. Fig. §. 833*) pondus F per pedem unum attolli: evidens est, funium omnium, ex quibus trochleæ inferiores cum pondere sustentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui debere. Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot sunt funes trochleas inferiores sustentantes. Quare spatium ejus est ad spatium ponderis ut numerus funium trochleas inferiores sustentantium ad unitatem, consequenter ut pondus ad potentiam sustentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

842. Quo minor itaque potentia pondus ope polyspasti attollit; eo tardius id movetur: ut propterea virium compendium cum temporis dispendio conjungatur.

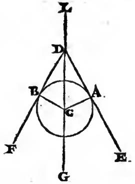
THEOREMA 197.



843. *Si potentia in* F *applicata suspendit pondus* E *secundum directionem obliquam* BD *& bujus directio sit itidem obliqua* ED, *linea vero directionis trochleæ* DG *per centrum* C *transit; erit potentia ponderi æqualis & tam illa, quam hoc ad vim, qua trochlea in* L *retinetur, ut sinus anguli* ADC *vel* BDC *ad sinum anguli dupli* ADB.

DEMONSTRATIO.

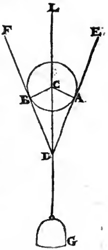
Quoniam enim funes DF & DE quomodocunque extensi trochleam in B & A tangunt, si ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 309 *Geom.*) & AD = BD (§. 325 *Geom.*). Quare cum etiam sit AC = CB (§. 40 *Geom.*); erit angulus ADC ipsi CDB æqualis (§. 179 *Geom.*). Jam perinde est ac si mobile ali-



le aliquod secundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus secundum directiones AD & DB trahentibus illique æquipollentibus propter statum æquilibri *ex hypothesi*. Est igitur vis in F applicata ad pondus E ut sinus anguli ADC ad sinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales *per demonstrata*, ideoque & sinus eorum (§. 142 *Geom.* & §. 2. *Trigon.*). Quamobrem pondus potentiæ æquale est. *Quod erat unum*.

Jam potentia est ad vim trochleam secundum directionem DC sustinentem ut sinus anguli ADC ad sinum anguli ADB & pondus E ad eandem vim ut sinus anguli BDC ad sinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales sint *per demonstrata*; ideoque dimidii anguli ADB; erit vis trochleam sustentans in statu æquilibrii ponderum E & F ad horum alterutrum ut sinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt ad sinum anguli dimidii. *Quod erat alterum*.

Theorema 198.



844. *Si ponderis G linea directionis DC per centrum trochleæ transit & trochlea trahatur secundum directiones obliquas ED & DF; erunt hæ vires inter se æquales; earum vero alterutra ad pondus ut sinus anguli* ADC *vel* BDC *ad sinum anguli dupli* ADB *a directionibus obliquis intercepti*.

Demonstratio

Eadem est, quæ theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata littera huc transcribi tota possit.

Corollarium.

845. Quoniam sinus anguli dimidii non est dimidius totius, seu, quod perinde est, simpli anguli sinus non est dimidius dupli (§. 325 *Analys. finit.*); in casu directionum obliquarum potentia pondus, cujus directio per centrum trochleæ transit, sustentans, non est ponderis dimidia.

Scholion.

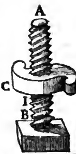
846. *Ex duobus hisce theorematis deduci possunt, quæ de trochleis in casu directionum obliquarum præterea demonstranda sunt, quemadmodum videre est apud* Varignonium, *qui hanc staticæ partem diffuse pertractat* (a).

THEO-

(a) Nouvelle Macanique, ou Statique Tom. 1. Sect. 3 p. 283. & seqq.

THEOREMA 199.

847. *Si pondus vel resistentia cochlea superanda fuerit ad potentiam ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam binarum helicum* BI, *potentia ponderi æquipollet*.



DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, sunt ut spatia eodem tempore descripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI (§. 33). Sed vires mortuæ sunt in ratione composita celeritatum & massarum (§. 278). Quare cum potentiæ pondus æquale substitui possit (§. 763), sitque ut pondus potentiæ æquale ad pondus elevandum aut deprimendum reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI *per hypoth.* celeritates sunt ut massæ reciproce. Ergo vis potentiæ est ad vim ponderis ut factum ex massa potentiæ in massam ponderis ad factum ex massa ponderis in massam potentiæ (§. 159 *Arith.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arith.*); vires æquales sunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

848. Cum peripheria a potentia percursa in una cochleæ conversione sit spatium ejus, distantiæ autem duarum helicum BI respondeat spatium ponderis; erit hic quoque spatium ponderis ad spatium potentiæ ut reciproce potentia sustentans ad pondus.

COROLLARIUM 2.

849. Virium itaque compendium cum temporis dispendio denuo conjungitur.

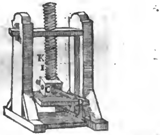
THEOREMA 200.

850. *Si distantia* (*Vid. Fig. §. 847*) *helicum* BI *minor fuerit, potentia ad eandem resistentiam superandam applicata minor est, quam si illa major fuerit*.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium potentiæ ad helicum distantiam, ita pondus ad potentiam (§. 847). Quodsi ergo helicum distantia minuitur, spatium potentiæ ad eandem (§. 205 *Arith.*), ideoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Est igitur potentia in casu posteriore minor, quam in priore (§. 206 *Arith.*). *Q. e. d.*

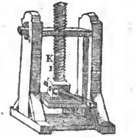
THEOREMA 201.



851. *Si cochlea mas intra fœminam quiescentem convertitur; minor potentia ad eandem resistentiam superandam requiritur, si scytala* CD *longior, quam si brevior*.

DEMONSTRATIO.

Ut peripheria scytala CD tanquam radio descripta ad helicum distantiam



IK ita resistentia superanda ad potentiam (§. 848). Sed si scytala longior, major peripheria describitur, quam si brevior (§. 412 *Geom.*). Ergo in illo casu ad distantiam helicum IK (§. 203 *Arith.*), consequenter & resistentia superanda ad potentiam, majorem rationem habet, quam in hoc casu. Quare cum resistentia eadem maneat *per hypoth.* potentia in casu posteriore major, quam in priore (§. 206 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 138.

852. *Data distantia potentiæ (Vid. Fig. ut sup.) a centro cochleæ* CD, *distantia helicum* IK *&* *potentia in* D *applicata, determinare resistentiam superandam, vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio CD describenda (§. 429 *Geom.*).
2. Quæratur porro ad distantiam helicum, peripheriam modo inventam & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, distantiam helicum IK & resistentiam datam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): erit is in priore casu resistentia superanda, in altero potentia, qua ad resistentiam datam vincendam utendum (§. 847).

E. gr. Sit distantia helicum 3″, distantia potentiæ a centro cochleæ CD 25″, potentia 30 librarum. Fiat

100 — 314 — 50″
50
157 | 00 Peripheria a potentia conficienda.

Fiat porro
3 — 157 — 30
1 10 10 (§. 316 *Arith.*)
1570 pondus, cui resistentia æqualis.

PROBLEMA 139.

853. *Data resistentia, quæ data potentia superari debet, cochleæ diametrum (Vid. Fig. ut sup.), distantiam helicum* IK *&* *longitudinem scytalæ* CD *definire.*

RESOLUTIO.

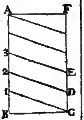
1. Distantia helicum & diameter cochleæ arbitrio assumantur, si ope scytalæ convertenda est cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad resistentiam, quam superare debet, ita helicum distantia ad quartum: qui erit peripheria a scytala CD in conversione cochleæ describenda (§. 847).
3. Quodsi ergo quæratur semidiameter hujus peripheriæ (§. 429 *Geom.*); habebitur longitudo scytalæ CD.
4. Quodsi vero cochlea fœmina circa marem convertitur sine scytala, peripheria *per n.* 2. inventa eadem fere est, quæ cochleæ, ideoque semidiameter *per n.* 3. reperta cochleæ semidiameter.

E. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, distantia helicum 1″. Reperitur peripheria a potentia percurrenda 6000 : 100 = 60, ideoque longitudo scytalæ, si qua utaris, $9''\frac{1}{2}$: si nulla utaris, erit latus cochleæ fœminæ $9''\frac{1}{2}$.

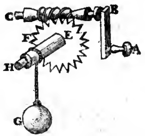
COROL-

COROLLARIUM.

854. Quodsi peripheria cochleæ in rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BA erigatur altitudini cochleæ æqualis, tandemque facta B 1, 1 2, 2 3 &c. distantiæ helicum æqualibus, ducantur rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogrammum circa cylindrum, cujus peripheria rectæ BC æqualis, circumvolutum helicem, qua cylindrus sulcandus, exhibebit.



DEFINITIO 81.



855. *Cochlea infinita* seu *perpetua* vocatur, si rotam stellatam EF circumagit.

COROLLARIUM.

856. Dum cochlea semel circumvolvitur; rota nonnisi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLION.

857. *Dicitur autem ideo infinita, quia sine fine circumagi potest.*

THEOREMA 202.

858. *Si potentia manubrio (Vid. Fig. §. 855) cochleæ infinitæ* AB *applicata fuerit ad pondus in ratione composita ex peripheria axis rotæ* EH *ad peripheriam manubrio versato a potentia descriptam & revolutionum rotæ* EF *ad revolutiones cochleæ* CB; *ponderi æquivalebit.*

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ stellatæ EF multiplices, prodibit spatium ponderis G. Sed si peripheria manubrio AB descripta multiplicetur per numerum revolutionum cochleæ CB, factum est spatium potentiæ. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut ista spatia (§. 33). Quare cum pondus ad potentiam sit in ratione reciproca eorundem spatiorum (*per hypoth.* & §. 159 *Arith.*); vires sunt ratione composita earum, quas habet spatium ponderis ad spatium potentiæ & spatium potentiæ ad spatium ponderis (§. 278), hoc est, ut factum ex spatio ponderis in spatium potentiæ ad factum ex spatio potentiæ in spatium ponderis (§. 159 *Arith.*), ideoque æquales (§. 207 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

859. Quoniam rotæ motus tardissimus (§. 856); exigua potentia ingens pondus moveri potest ope cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM 2.

860. Utimur ideo cochlea infinita, vel si ingens admodum pondus per exiguum spatium movendum, vel si motus tardissimus efficiendus.

SCHOLION.

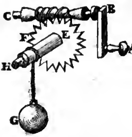
861. *Commodus igitur ejus usus est in horologiis. Unde* Hugenius *eadem utitur in automato planetario.*

PROBLEMA 140.

862. *Datis dentium numero (Vid. Fig. §. 855) rotæ* EF, *distantia potentiæ a centro cochleæ* AB, & *radio axis* HE *una cum potentia, invenire pondus.*

RESO-

RESOLUTIO.



1. Ducatur diſtantia potentiæ a centro cochleæ AB in numerum dentium rotæ EF: factum eſt ut ſpatium potentiæ interea abſolutum, dum pondus conficit ſpatium peripheriæ axis æquale (§. 412 *Geom.* & §. 856 *Mech.*)
2. Quæratur numerus quartus proportionalis ad radium axis, ſpatium potentiæ modo inventum & potentiam; erit is pondus quod potentia ſuſtentare valet (§. 858).

E. gr. Sit AB = 3, radius axis HE = 1, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ EF 48; erit pondus = 3. 48. 100 : 1 = 14400.

SCHOLION 1.

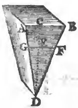
863. *Apparet hinc, cochleam infinitam amplificandis potentiarum viribus reliquas machinas omnes antecellere.*

SCHOLION 2.

864. *Solent etiam conchlea conſtrui, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque cochlea a ſingulis dentibus ſemel circumvolvatur, motus efficitur velociſſimus. Hinc ejus uſus eſt in machinis, quæ ad poliendum corpora aſpera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.*

THEOREMA 203.

865. *Si potentia cuneo ita applicata, ut linea directionis* CD *ſit ad latus* AB *perpendicularis, fuerit ad reſiſtentiam ſuperandam ut* AB *ad* CD, *reſiſtentiæ æquipollet.*



DEMONSTRATIO.

Ponamus cuneum detrudi uſque ad rectam GF ipſi AB parallelam: erit DE ſpatium potentiæ, FG ſpatium ponderis. Eſt vero DE : FG = DC : AB (§. 396 *Geom.*). Ergo celeritates potentiæ & ponderis ſunt ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiæ ac ponderis ſunt in ratione compoſita ipſorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, *per hypoth.* Ergo vires ſunt AB. DC ad DC. AB (§. 159 *Arith.*), ideoque æquales (§. 207 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

866. Potentia igitur dimidiæ reſiſtentiæ æquivalens eſt ad eam ut AC ad DC, hoc eſt, ut ad ſinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7 *Trigon.*).

COROLLARIUM 2.

867. Cum tangens anguli minoris minor ſit quam majoris (§. 7 *Trigon.*), potentia ad dimidiam reſiſtentiam majorem rationem habet, ſi angulus major, quam ſi minor (§. 203 *Arith.*). Unde in priori caſu major eſt quam in poſteriori (§. *cit.*), hoc eſt, cunei acutiores magis potentiæ vires amplificant quam minus acuti.

SCHOLION.

868. *Ex natura cunei reddenda eſt ratio omnium fere inſtrumentorum, quibus ad ſcindendum aut dividendum utimur: qualia ſunt cultri, enſes, ſecures, ſciſſella aliaque inſtrumenta cœlatoria.*

CAPUT

CAPUT XVI.

De Potentiarum ad Machinas Applicatione.

DEFINITIO 82.

869. PEr *potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: *per inanimatas* vero aerem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO 83.

870. Potentia dicitur *trudendo movere*, si linea directionis tendit in plagam moventi oppositam.

DEFINITIO 84.

871. Potentia dicitur *deprimere*, si linea directionis tendit a movente deorsum.

DEFINITIO 85.

872. Potentia dicitur *trahere*, si linea directionis tendit ad moventem, seu si mobile sequitur moventem vel ad eum accedit.

DEFINITIO 86.

873. Potentia dicitur *elevare*, si linea directionis tendit sursum, seu si mobile ascendit.

DEFINITIO 87.

874. Potentia animata dicitur *calcando movere*, si pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO 88.

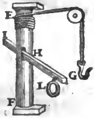
875. Potentia animata *versando movere* dicitur, si eodem loco insistentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA 141.

876. *Machinam construere, quam homo trudendo movere possit.*

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF versari possit.
2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

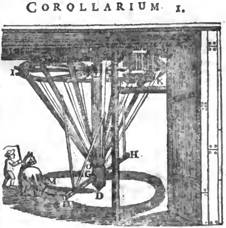


Quodsi enim homo manibus continuo protrudat vectem GH, cylindrus EF circa axem suum circumagetur (§. 870).

SCHOLION.

877. *Si machina ita simplex ad pondera attollenda adhibetur*, Ergata *appellari solet.*

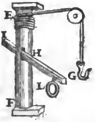
COROLLARIUM I.



878. Quodsi GH fuerit temo cum libra; equus vel taurus *trahendo* machinam movebit (§. 872).

COROL-

COROLLARIUM 2.



879. Si annulo L alligetur funis, quem manibus prehendat homo aut corpori suo circumplicet; machinam *trahendo* movebit (§. 872).

PROBLEMA 142.

880. *Machinam construere, quam homo versando movere possit.*

RESOLUTIO.



Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim homo manu circa centrum radium BD circumducit; versando machinam movet (§. 875. *Mech.* & §. 231 *Geom.*).

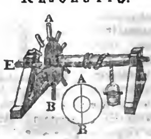
SCHOLION.

881. *Si duo manubria eidem machinæ applicantur, necesse est, ut situm habeant contrarium, quia dum unus manubrium* ABDC *deprimit, alter alterum* EFGH *attollere debet.*

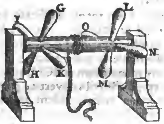
PROBLEMA 143.

882. *Machinam construere, quam homo partim trahendo, partim deprimendo movere potest.*

RESOLUTIO.



Talis est axis in peritrochio EABF. Quodsi enim scytalam A manu prehendas & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): sed ubi ulterius eandem deorsum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 871).



Loco peritrochii sufficiunt scytalæ solæ GH & KI: quæ si duobus in locis ad axem aptentur, duo homines una eundem partim trahendo, partim deprimendo movebunt.

SCHOLION.

883. *Si cylindrus horizontaliter positus & solis scytalis instructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur*, sucula *vocatur*.

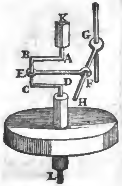
PROBLEMA 144.

884. *Machinam construere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere possit homo.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocũque modo ad eum firmetur.

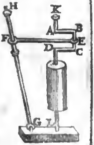


2. Per annulum E alteri extremo ejuſdem virgæ affixum tranſeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodſi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB ſemiperipheriam deſcribet, ſicque trahendo movebis machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem ſui BC tibi obvertit, in priſtinum ſitum redigis; idem radius BA alteram ſemiperipheriam deſcribet, ſicque trudendo movebis machinam (§. 870).

ALITER.

Idem præſtabis, ſi vectis HFG ſolo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere poſſit: reliqua omnia eadem ratione ſe habeant, ut ante.



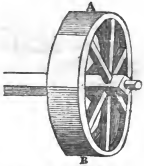
SCHOLION.

885. *Uncus interdum geminatur, ut alter ſit altero ſuperior & in contrarium poſitus: ita nimirum duo ſimul machinam agitare poſſunt motibus contrariis, uno ſcilicet trahente, dum alter trudit & contra.*

PROBLEMA 145.

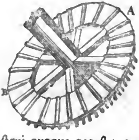
886. *Machinam conſtruere, quam homo calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.



Conſtruatur tympanum AB cum cylindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut homo unus vel plures intra ejus ambitum ſtare poſſint. Hanc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874).

ALITER.

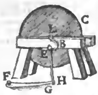


Conſtrui quoque poteſt rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior ſuperficies dentibus, ſuperior ſcalis in-

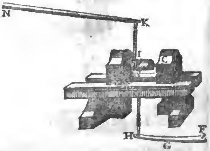
ſtruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut ideo potentia non tota vi ſua in eam agat(§.261), major tamen diſtantia a centro motus eſſe poteſt, quam in verticaliter erectis.

ALITER.

Si pondus movendum ſit exiguum & motus celer requiritur; vecte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato



& circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum manubrio BE connexus cylindrum CL circumducit, ſi pede deprimatur.



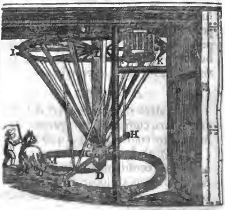
Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elaſticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, ideoque in minori diſtantia, applicatur, motus eſt celer, utut potentia major eſſe debeat reſiſtentia in H vincenda (§. 765. 772).

PROBLEMA 146.

887. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos trahendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Utendum eſt cylindro verticaliter



erecto DO cum temone HG 8 minimum pedum, ut ſupra (§.878). Præſtat autem temonem eſſe longiorem, quam breviorē, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli cōtinuo decurrens.

PROBLEMA 147.

888. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.



Conſtruendum eſt tympanum AB ſubſcu-

ſubſcudibus tranſverſis munitum & ſuper eo ſtabulo includatur equus vel bos per ſolum pertuſum pedibus poſterioribus rotæ inſiſtens ſubſcudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

ALITER.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum aſſa, tympanum eum in modum conſtrui ſolet, quo majora (§. 886) ab hominibus intra earum ambitum conſiſtentibus impellenda, & canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis ſui mole eandem circumagens.

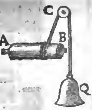
SCHOLION.

889. *Cum machina hactenus deſcripta omnes ad axem in peritrochio revocentur, niſi quod nonnulla earum ſint ex vecte & axe in peritrochio compoſitæ, ſi attendatur ad lineam directionis potentiæ & inde determinetur diſtantia a centro motus* (§. 229), *virium æſtimatio haud difficulter inſtituitur* (§. 765. 792. 793).

PROBLEMA 148.

890. *Machinam conſtruere, quæ a pondere deſcendente moveatur.*

RESOLUTIO.



1. Circa cylindrum AB horizontaliter poſitum funis circumvolvatur &
2. Idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento diſtantia.
3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum deſcendit, cylindrum AB circumagit.

COROLLARIUM 1.

891. Quo major eſt altitudo, per quam pondus Q deſcendit, eo diutius durat motus.

SCHOLION.

892. *Hinc horologia, quæ a pondere deſcendente moventur, in editis turribus collocantur, aut, ſi index circumagendus fuerit exiguus, in ſuprema conclavis parte.*

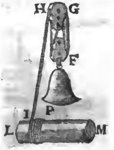
COROLLARIUM 2.

893. Ut pondus Q lento gradu deſcendat, nec motus ejus acceleretur (§. 79); cylindri AB motus eſſe debet quam tardiſſimus, conſequenter pondus ad movendam machinam adhiberi nequit, niſi in machinis compoſitis, ubi motus in principio tardus, ſed per plures machinæ partes prorogatus fit celerior (§. 812).

COROLLARIUM 3.

894. Cum ideo pondus in minori a centro diſtantia applicandum ſit, ibi potiſſimum huic potentiæ eſt locus, ubi non magna eſt reſiſtentia.

COROLLARIUM 4.



895. Quodſi pondus P ex polyſpaſto FH ſuſpendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere poteſt. Dum enim per ſpatium peripheriæ cylindri deſcendit, ſi funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur; cum ſine polyſpaſto nonniſi ſemel circumageretur. Sed quia funis HI a quarta tantum ponderis P parte trahitur (§. 833) vel etiam a minore (§. 843); perinde eſt ac ſi quarta tantum ejus pars vel etiam quarta minor ſine polyſpaſto ad machinam agitandam adhiberetur. Utendum igitur eſt polyſpaſto, ubi ſpatium non ſatis altum deſcenſui ponderis conceditur.

PROBLEMA 149.

896. *Pondere appenſo adjuvare potentiam moventem.*

Resolutio.

1. Ponderi movendo E alligetur funis EFHD & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.



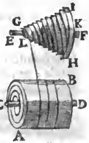
Quodsi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

Problema 150.

897. *Machinam elateris vi movere.*

Resolutio.

1. Lamella chalybea AB altero sui extremo axiculo CD afferruminata in gyros cōtorqueatur & thecæ cylindricæ, cui altero sui extremo afferruminata, includatur.



2. Huic affigatur catenula, altero sui extremo axi conformi GH alligata.

Quoniam enim laminæ vis elastica continuo minuitur, sub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus distantia GL applicanda; sub finem vero, ubi segnius trahit, in majori IK (§. 792): quo obtinetur, ut potentia hæc in se sat inæquabilis, ad motum tamen regularem, qualis est horologiorum portatilium, adhiberi possit.

Sscholion.

898. *Equidem figura fusi* GH *non conica, sed alia conoidica esse debebat & celeberrimus* de la Hire (a) *in ejus constructionem inquirit. Sed cum hypotheses assumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipsemet non diffitetur, regulam, quam invenit, praxi non satis exacte respondere. Cæterum vi elastica animantur quoque automata culinaria.*

Definitio 89.

899. *Rota directa* est, quæ ab aqua desuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. *Rota* vero *retrograda* vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

Corollarium 1.

900. Quoniam aqua rarissime ea rapiditate fertur, ut rotas molares circumagere possit; ex alto præcipitata impetum acquirat necesse est (§. 79. 289).

Corollarium. 2.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorsum tendat, quamdiu centro telluris propius fieri potest; locus, ubi rotæ collocantur, centro telluris vicinior esse debet quam is, unde aqua in eas derivatur.

Corollarium 3.

902. Et cum aquæ fluentes successive cadant, a latice seu origine earundem nonnisi exigua declivitas, nempe quam sufficere experientia loquitur, ad distantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad summum dimidii, concedenda, reliqua autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

Corollarium 4.

903. Inquirendum itaque quanto depressior sit locus, ubi rotæ molares constituuntur, quam origo aquarum.

Definitio 90.

904. *Ars libellandi* est ars determinandi declivitatem aquarum, seu generalius, quanto intervallo punctum aliquod sit terræ centro propius quam alterum.

COROL-

(a) Traitè de Mecanique prop 72. p. 233. & seqq.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta singula a centro Telluris æqualiter distant (§.207); aquæ libellantur, si linea horizontalis in datorum locorum superiore inventa usque ad inferiorem continuetur & ejus a superficie aquarum distantia utrobique investigetur. Distantiarum enim differentia declivitatem metitur.

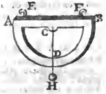
DEFINITIO 91.

906. *Libella* est instrumentum, quo invenitur linea horizontalis & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA 151.

907. *Libellam construere.*

RESOLUTIO.



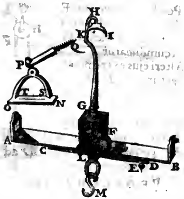
1. Ex centro semicirculi C suspendatur pondusculum H.
2. Diametro AB infigantur unci E & F.

Quodsi enim funis per uncos E & F ita extendatur, ut filum CD semicirculum appensum bifariam secet; lineam horizontalem apparentem repræsentabit.

DEMONSTRATIO.

Quia pondusculum H filum CD extendit; erit CD linea directionis ejus (§. 17). Et quia semicirculum bifariam secat *per hypoth.* ad AB perpendicularis est (§. 143. 78 *Geom.*). Ergo AB est linea horizontalis apparens (§.215). *Q. e. d.*

ALITER.



1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ & inferius in C lamina cochlea E instructa.
2. Laminæ vero huic afferruminetur prisma excavatum FG cum stylo GHIK bifurcato.
3. Inferius afferruminetur annulus cum ansula, ut, si opus fuerit, pondus appendi possit.
4. Paretur denique fulcrum semicirculare aut semiellipticum NO superius in P cochlea PQ instructum, ut instrumentum cruribus IK in cuspides acutas desinentibus in punctis S & T insistere queat.

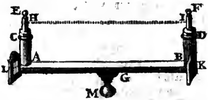
Quodsi enim fulcimentum mediante cochlea ad arborem aut baculum erectum firmetur, instrumentum eidem insistens vi gravitatis in eum situm sese disponet, ut regula cum dioptris sit horizonti parallela (§.215).

ALITER.

Ricciolus propria experientia fretus hanc libellam (a) commendat.

1. Su-

(a) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 28. § 8. f. 230.



1. Super regula AB pedum 12 aut ad summum 20 canaliculo excavato inferatur tubus CABD ex laminis ferreis ſtanno obductis, vel cupreis paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis.
2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ fœminæ, quibus aliæ mares inſerantur; ut tubus quam arctiſſime claudi poſſit.
3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.
4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus M, iſque cavus, ne gravitate moleſtus ſit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque libella moveri & in ſitu eodem, ſi neceſſe ſit, immota ſervari poſſit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere poſſit inter transferendum.

Quodſi enim inſtrumentum aqua repleas & tubum ita conſtituas, ut aqua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens, cum fluidorum quieſcentium partes omnes eandem a centro telluris diſtantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent verſus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Conſultum quoque eſt, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem, quamvis etiam ſine iiſdem per utriuſque aquæ ſuperficiem collineatio in omni ſitu tubi fieri poſſit.

ALITER.



1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem eſcreſcere poteſt, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, ſitque tubus in altero extremo L apertus, ſed obturaculo quodam ex ſubere parato & capite orichalceo inſtructo claudendus.
2. Tubus ita paratus firmetur ſuper regulam ST, ad quam etiam
3. Firmentur dioptræ M & N.
4. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.
5. Intra has regulas ſit lamina elaſtica ex orichalco aut chalybe parata, ut inſtrumentum tanto accuratius ad ſitum horizontalem diſponi poſſit.
6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix ſeu cochlea fœmina K, ut libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari poſſit.

Quodſi tubum vel aqua, vel ſpiritu vini colorato repleas, ita tamen ut pauculum aeris remaneat, bullulam in ſuperfi-

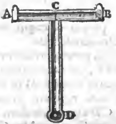
perficie fluidi formaturum; ascendet bullula in partem superiorem, si tubus fuerit inclinatus, sed datum situm e. gr. in F tuebitur, si horizontalis fuerit. Levia enim sursum ascendunt, quantum datur.

SCHOLION 1.

908. *Alia libellarum genera a viris celeberrimis* Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo *inventa describuntur a modo laudato* Picardo (a). *Adhuc alia dederunt* viri Cl. Coupletus (b) & Hartsœkerus (c). *Ego eas descripsi, quas mea instrumentorum suppellex mihi suppeditavit. Omnium fere, quæ passim prostant, descriptionem dedit* Jacobus Leupoldus (d).

SCHOLION 2.

909. *Prima libellarum, quam exhibui, non satis fida. Ricciolus enim jam observavit, facile aberrari 5 minutis, imo gradu dimidio, nisi ingens fuerit. Sed molos usum molestum reddit.*



Facile tamen medela paratur, si scilicet loco semicirculi utamur regula AB trium pedum cum altera longiore CD quatuor pedum ad angulos rectos priori insistente; quæ dioptris instruatur & libere suspendatur, fulcro conveniente adhibito, exactissimam libellam constituit. Solent quoque a nonnullis in libellationibus præsertim longioribus dioptrarum loco adhiberi telescopia: sed multa circumspectione opus est, ut rite ad instrumenta applicentur. Enimvero ea de re in Astronomia ex principiis opticis dicetur.

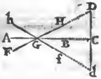
PROBLEMA 152.

910. *Rectificare libellam.*

RESOLUTIO.

Ut certus sis, libellam esse revera in situ horizontali.

1. Instrumento in G collocato collineatio fiat in C centrum tabulæ in *d*D erectæ.



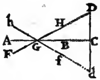
2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris instrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam eandem.
3. Quodsi idem punctum C sit in linea visuali, libella convenientem habet situm; sin in puncto altiori aut depressiori desinat, paulisper attollenda vel deprimenda est (quo spectant regulæ cum cochleis in libellis paulo ante descriptis), donec linea visualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Ponamus instrumentum esse in linea horizontali AG. & visu attingi punctum C. Si situs instrumenti mutetur, ut B in A & A in B constituatur, cum linea horizontalis non sit nisi unica, adhuc linea visualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur. *Quod erat unum.*

Quodsi instrumentum non sit horizonti parallelum, linea visiva in centro ejus G secabit horizontalem AB eritque HGB = AGF (§. 156 *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum altius D. Quodsi libella invertatur, ut H in *b* & F in *f* constituatur; erit *b*GA = BG*f* (§. 156 *Geom.*). Est vero *b*GA = HGB, quia instrumentum, situ respectu lineæ horizontalis immu-

(a) Traite du nivellement cap. 2. pag. 37. & seqq.
(b) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1699. pag. 172.
(c) In Miscellan. Berolinens. pag. 328. & in Actis Eruditorum An. 1712. pag. 34.
(d) In Theatro horizontostatico, sive libellationis, quod est pars quarta Theatri Statici universalis.

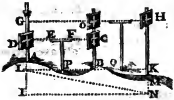


immutato, inversum. Ergo BG*f* = HGB. Quare cum porro, ob rectam D*d*, in qua sunt puncta D & *d*, ad lineam horizontalem perpendicularem anguli recti ad C æquales sint (§. 145 *Geom.*); erit CD = C*d* (§. 251 *Geom.*), hoc est, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & *d* medium. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 153.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO



1. Eo in loco, ubi origo declivitatis statuitur, ope ponderis ex fune suspensi exploretur, quanto intervallo superficies aquæ a ripa absit.
2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus statuitur.
3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus cum tabulis D & C nigro colore tinctis, sed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocunque situ ad baculos firmandis libella EF collocetur in P.
4. Tabula utraque D & C nunc attollatur, nunc deprimatur, donec per EF collimeanti punctum medium, in quo lineæ albæ sese mutuo intersecant, occurrat.
5. Investigentur exactissime altitudines punctorum D & C, nempe AD & BC atque in schedula notentur.
6. Tum instrumento in Q & baculo AG in M translato, fiat ut ante collineatio in O & H, notenturque altitudines OB & HM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attigeris.
7. Addantur in unam summam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MH &c. & priori adjiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, posteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.
8. Quodsi enim aggregatum prius a posteriori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A usque ad alterum M fluentium respectu lineæ horizontalis apparentis.
9. Quare si tractus AM fuerit longus; quod ab ea subtrahendum est, ut habeatur declivitas respectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per problema 39 (§. 216) aut sine novo calculo in tabula superius exhibita (§. 217). Sit e. gr.

altit. ripæ AL 64″	altit. ripæ MN 58″
AD 34	BC 57
BO 68	HM 102
Summa 166	Summa 217
	166
	declivitas LI 51″

Sit LK 900 pedum, erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5′0″7‴.

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK itemque OG parallelæ; erit DG = OC, HN = GI, DL =

DL = CB, OB = GL (§. 226 Geom.). Ergo DA + AL + OB = GL + BC & HM + MN + BC = GI + BC, consequenter GI + BC − GL − BC = LI. *Q. e. d.*

SCHOLION.

912. *Quoniam in hac operatione facile aberrari potest, consultum est, ut libellatio bis instituatur, nempe primum a termine* A *usque ad terminum* M, *deinde retro a termine* M *usque ad terminum* A.

DEFINITIO 92.

913. *Sectio fluminis* est planum ad angulos rectos secans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem inter se parallelæ.

COROLLARIUM 1.

914. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis est ad horizontalem perpendicularis (§. 215) & fundus alvei atque superficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter se parallelæ *per hypoth.* latera plani secantis erunt ad basin perpendicularia & inter se parallela, consequenter opposita æqualia (§. 226. 238 *Geom.*), ideoque sectio rectangulum est (§. 100 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

915. Invenitur ideo, si latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 375 *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

916. Sunt etiam sectiones diversæ in ratione composita latitudinum alveorum & profunditatum aquarum (§. 376 *Geom.*).

SCHOLION 1.

917. *Cum aquæ fluentes nunc intumescant, nunc tabescant, eo potissimum tempore sectionem fluminis dimetiri debet molendina exstructurus, quo mediocrem habet altitudinem.*

SCHOLION 2.

918. *Quodsi aquæ copia non abundamus, consultum est, ut aqua in stagno colligatur, inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam sunt fontes in vicinia siti & aqua ex iis in stagnum derivanda.*

SCHOLION 3.

919. *Cum ex superioribus constet, in conflictu corporum non modo habendam esse rationem massæ, sed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quiescens impingens movetur (§. 532); in molendinis aquarum vi agitandis consideranda est & sectio earum & declivitas in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodsi declivitas fuerit insignis, plurimorum scilicet pedum, e. gr. 10 aut 12, & sectio aquæ exigua, rota construitur directa: ast si declivitas exigua & sectio ingens, rota utendum est retrograda.*

PROBLEMA 154.

920. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari possit, aqua per alveum aut canalem ex ligno constructum deducatur ad rotam, & distantiæ 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis segniter fluat.
2. Rota ratione decente constructa sub canali ita constituatur, ut aqua deorsum ruens per planum declive in capsulam ab axe secundam irruat, ipsa vero aquæ effusæ superficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM 1.

921. Quodsi a declivitate integra subducatur pars, quæ aquæ concedenda, ut intra alveum suum fluere possit & in rotam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effusa defluat; diameter rotæ relinquitur.

COROLLARIUM 2.

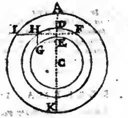
922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, est canale latiores esse præstat.

PROBLEMA 155.

923. *Rotam directam construere.*

RESOLUTIO.

Totum artificium huc redit, ut situs palmularum determinetur: id quod sequentem in modum fieri solet.



1. Semidiametro rotæ (quæ est dimidia altitudo ejus) in scala modica sumta describatur circulus AIKA, & semidiametro minore CE, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE sit $\frac{1}{3}$AE.
3. Ex centro C per D describatur circulus in tot partes æquales dividendus, quot palmulis instruenda est rota.
4. Applicata regula ad duo divisionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI, &
5. In H excitetur perpendicularis HG. Recta HI situm palmulæ unius; recta vero HG situm alterius determinat. Et eodem modo situs binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

P R O B L E M A 156.

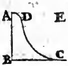
924. *Aquam ad rotam retrogradam deducere.*

R E S O L U T I O.

1. Ne aqua superflua in rotam incidat & tota ejus declivitas, parte dempta, quæ ipsi ut fluere possit concedenda, in præcipitium mutari queat; fossa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo distans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumescens ripis fossæ atque molendino facile damnum inferat.
2. Ne autem aqua intumescens agros vicinos innundet, riparum sufficiens esse debet altitudo. Consultum quoque est, ut fundus fossæ arena complanetur.
3. Quo aquæ sufficiens copia in fossam deducatur, per transversum fluminis excitandus est agger tantæ altitudinis, quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu suo retardandam.
4. In fine fossæ trabs horizontaliter sternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen, ejus superficies cum fundo fossæ sit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari possit.
5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transversa jungendæ & canaliculis evacuandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depressa aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti possit.
6. Ut igitur aqua tabula depressa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorsum fluere possit, & ne aqua intumescens ripas fossæ egrediatur; alicubi fossæ molinariæ a latere jugenda est alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ superfluæ transitum concessura.

7. Alveus

7. Alveus denique declivis in fine fossæ excitetur profunditatis AB, quanta est declivitas in præcipitium mutanda,



utque in rotam directe impingat aqua, superficies per quam delabitur sternenda est juxta arcum DC ex centro rotæ E intervallo radio ejus paulo majore descriptum.

8. Quodsi fossæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transversum fluminis prope rotam construendus, ut aqua in motu retardata in alveum derivetur.

Corollarium 1.

925. Si ea fuerit fossæ latitudo, ut duabus rotis juxta se invicem constituendis locus concedatur; duo quoque construendi sunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere posito, per quem aqua superflua a molendinis arcetur.

Corollarium 2.

926. Quodsi declivitas aquæ in præcipitium mutandæ ea fuerit, ut ejus dimidium, vel subtriplum &c. rotæ agitandæ sufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ constituantur, declivitate inter eas divisa, ita tamen ut præcipitium majus sit ante posteriores, quam anteriores rotas.

Scholion 1.

927. *Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quorum anteriores altiores, posteriores humiliores, differentia altitudinis primorum & ultimorum existente æquali altitudini, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & sabulo replentur & superius stratum paratur vel ex asseribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum distantiam complanatur, ne aqua vim ipsi inferre possit.*

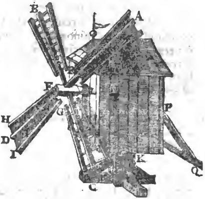
Scholion 2.

928. *Rotarum retrogradarum constructio nihil habet difficultatis: palmularum enim situs determinatur per radios ex centro rotæ eductos, sive intra orbes collocentur, sive in fronte constituantur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aquæ sectio. Minoris altitudo (quam Germani* ein Staber-Rad *appellant) est 12 pedum; majoris vero (quæ nobis* ein Panster-Rad *nuncupatur) ordinarie 16 pedum. In illa distantia palmularum digitorum 12 & 13; in hac 16 vel ad summum 19. Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratorum; in hac pedum quinque. Quodsi palmulæ ad peripheriam rotæ sint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas* Etraub-Rader *dicimus); altitudo rotæ & distantia palmarum variat pro diversa fundi declivitate & sectionis magnitudine.*

Problema 157.

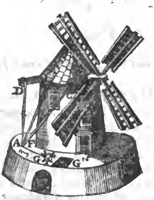
929. *Vi venti machinam movere.*

Resolutio.



1. Axi infigantur virgæ AD & BC se mutuo ad angulos rectos in E secantes, quarum longitudo 32 pedum fieri solet.
2. Ad has virgas ex scandulis construantur alæ figuram trapezii parallelarum basium habentes, quarum latitudo, HI sit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad I & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ sunt, ut FG cum axe EL efficiat angulum 54°.
4. Denique ut alæ vento semper obverti possint; tota machina circa axem NK versatilis esse debet, ut ope vectis PQ huc illucque versari atque in omnes plagas dirigi queat.

ALITER.



Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus construunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato versatile existat. Eum scilicet in finem

1. Turricula annulo ligneo cingitur & in eo canaliculus effoditur, in cujus fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum segmentum ultra eum promineat.
2. Intra canaliculum alius annulus reponitur, cui tectum superstructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G, &
4. Cum annulo mobili connectuntur trabes AD & FC, quarum altera priorem tecto firmius affigit.
5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero sui extremo axi in peritrochio aut suculæ alligandus.

Quodsi enim funis per uncum G ducatur & sucula convertatur, trabs AD ad illum adducitur, consequenter alæ in plagam ipsi oppositam diriguntur.

SCHOLION 1.

930. *Prior modus nostris in oris usitatus, posteriore in Batavia utuntur. Et posterior quidem priori præstat, quia alæ construi possunt majores, consequenter machina a vento agitari, ubi major resistentia superanda. Quodsi vero ad hanc vincendam minores sufficiunt, prior ideo antefertur, quia sumtibus longe minoribus exstruitur.*

SCHOLION 2.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarant* Thomas Savery (a) Amontons (b), Dionysius Papinus (c) & deinceps alii (d): *sed valde vereor, ne inventa ipsorum praxi parum respondeant. Hactenus cum successu eadem non usi sunt, nisi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis casibus vis motrix nimis sumtuosa.*

SCHOLION GENERALE.

932. *Quæ hactenus de potentiarum ad machinas applicatione diximus, eum unice in finem proposuimus, ut in machinis inveniendis usui essent, quoniam earum structura externa ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica harum omnium tractatio & plus temporis requirit, quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in desideratis habeantur, nec ad scopum nostrum apprime facere videtur. Neque operas manuarias hic exponere visum est, cum eadem ad Mathesin non spectent, sed ab eadem supponantur. Mathesis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ sub mensuram cadunt; manuarias vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a theoria ad praxin progressurus earum non sit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in theoria pro veris habeantur, quæ non succedere in praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc scopulum impingas, nihil assumendum est tanquam arte parabile, quod arte parari posse non jam ante experientia cognoveris, aut ex iis, quæ experientia constant, legitima consequentia deduxeris.*

(a) In Transact. Anglican. n. 252, pag. 228.
(b) Memoires de l'Academie Royale des Sciences An. 1699. edit. Bat. pag. 154.
(c) In Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam.
(d) Stephani Switzer Introduction to a general systeme of HydrostaticKs and HydraulicKs c. 28. 29. p. 325. & seqq.

CAPUT XVII.

De Resistentia in Machinis seu Frictione.

DEFINITIO 93.

933. F*Rictio* est resistentia superficiei, per quam inceditur.

SCHOLION.

934. *Ita perspicacissimus* Leibnitius (a) *frictionem definit, qui primus hanc materiam distincte evolvit.*

DEFINITIO 94.

935. *Corpus* dicitur *asperum*, in cujus superficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO 95.

936. *Superincessus radens* est, si punctum idem superincedentis lineam in superficie describit, per quam inceditur.

E. gr. Talis est superincessus parallelepipedi super plano protrusi.

DEFINITIO 96.

937. *Superincessus volvens* est, si punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis est rotæ in curru tam respectu axis, quam respectu soli.

DEFINITIO 97.

938. *Motus mixtus* est, si volutioni admiscetur motus radens elementaris seu instantaneus.

SCHOLION.

939. *Hunc motum distinctius explicat* Leibnitius (b); *sed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA 204.

940. *Si superficies, per quam inceditur, & superficies corporis, quod per illam incedit, fuerint asperæ; frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in superficie corporis asperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 935); si tam superficies corporis incedentis, quam ea, per quam inceditur, asperæ fuerint, eminentiæ vel sunt intra civitates deprimendæ, vel prorsus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri potest sine motu, nec motus produci sine vi impressa. Vis igitur, qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte his effectibus impendenda, ideoque motui corporis resistitur (§. 20), consequenter frictio oritur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

941. Quo asperiores itaque sunt superficies, eo resistentia major.

SCHOLION 1.

942. *Asperitas æstimanda est non modo ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque potest, ut eminentia alia minori vi abradantur, vel deprimantur, alia autem nonnisi majori vincantur.*

COROLLARIUM 2.

943. Si corpora frictione continuata politiora fiunt; frictio minuitur.

SCHOLION 2.

944. *Id ipsum experientia clarissime loquitur.*

COROLLARIUM 3.

945. Superficies ideo partium in machinis, quæ

(a) In Miscellaneis Berolinensibus pag. 307.
(b) In Miscellan. Berolinens. pag. 312. 313

quæ se mutuo tangunt, quantum fieri potest, poliri debent.

COROLLARIUM 4.

946. Quoniam tamen corpus nullum ideo poliri potest, ut omnis asperitas tollatur, microscopiis testibus; consultum est (quod jam dudum in praxi receptum) ut partes se mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA 205.

947. *Dum pondus corporis incedentis superficiem ejus ad superficiem, per quam inceditur, apprimit; frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis superficiem ejus apprimit ad superficiem, per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius descendunt, ideoque majori vi inde rursus attolluntur (§. 265.), vel etiam deprimuntur aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obstacula vincenda, quam si non ideo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod pressio ex pondere superincedentis augeat resistentiam superficiei, per quam inceditur (§.20), hoc est frictio augetur (§.933). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

948. Crescente ideo pondere corporis incedentis aut insistentis, frictio crescit.

SCHOLION.

949. *Hinc libra exiguis ponderibus onusta exigua vi ab æquilibrio dimovetur; pluribus autem onusta, majori vix dimovetur.*

THEOREMA 206.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad superficiem, per quam incedit, fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, obliqua; vis, qua movetur versus superficiem, per quam inceditur, nititur, ideoque perinde est, ac si superficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed pressio ex pondere incedentis frictionem intendit (§.947). Ergo eadem intenditur, si linea directionis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

951. Quoniam ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 552.), sinus autem anguli majoris major est, minoris contra minor (§. 2 *Trigon.*); nisus corporis superincedentis in superficiem, per quam inceditur, consequenter frictio major est, quo propius ad perpendiculum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLION.

952. *Hæc denuo experientiæ valde consona sunt & præcipue in dentibus rotarum observantur, ut sæpissime hac de causa prorsus frangantur.*

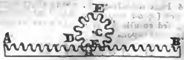
COROLLARIUM 2.

953. Tollitur ideo hæc frictio, si linea directionis corporis incedentis fuerit parallela superficiei, per quam inceditur: tum enim nisus superincedentis in eam nullus est.

THEOREMA 207.

954. *Si superincessus volvens, longe minor est frictio, quam si radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.



Sit regula dentata AB & super ea incedat rota DEF, cujus dentes sint ad peripheriam normales. Quod si superincessus fuerit radens, dens F, qui regulam tangit, lineam rectam in superficie

ficie regulæ describere debet (§. 936). Cum igitur ipsi resistat dens regulæ H, progredi omnino nequit, nisi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorsus abradatur. Idem ergo cum contingat, si corporis cujuscunque alterius asperi super superficie aspera incedentis superincessus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab asperitate superficiei oriri potest. Enimvero si rota EDF super regula provolvatur, tum dens regulæ H incessui ejus non amplius resistit, nisi quatenus ex cavitate dens F supra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, si corpus quodcunque asperum super aspera superficie volvitur; frictio minor est; si superincessus volvens, quam si radens extiterit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

955. Ne igitur in machinis frictio magnam vis motricis partem absumat, cum cura dispiciendum est, ut, quantum fieri potest, nulla pars machinæ alteram radat, quin potius una super altera volvatur.

COROLLARIUM 2.



956. Hinc consultum est, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri solet) matrici concavæ, sed rotulis A, B, C, D circa axiculos versatilibus imponantur.

SCHOLION 1.

957. *Suasit hoc dudum* Paulus Casatus (a) & *experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodsi metuas, ne axiculus cylindri satis tuto duobus rotulis* A & B *incumbat, tertiam addere licet.*

(a) Mechanicorum lib. 2. cap. 1. pag. 230.

SCHOLION 2.

958. *Hinc etiam, si trochlea circa centrum mobilis, tractioni minus resistitur, quam si eadem fixa foret. Eadem est ratio, cur rota curruum circa axem versatiles fiat.*

SCHOLION 3.

959. *Patet quoque ratio ... stratis; facillime trahantur in plateis ... antur, ut planitiem probe autem, finite vi ... politam exhibe...*

SCHOLION 4.

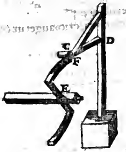
960. *Ex eodem fonte* Olaus Roemerus, *cum Parisiis commoraretur, quamvis non sine subsidio Geometriæ sublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem esse debere: id quod post eum quoque ostendit* Philippus de la Hire (b); *sed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non est.*

COROLLARIUM 3.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum versatiles volvuntur, dum in superficie corporis alterius incedunt; earum ope superincessus radens in volventem transmutari potest, quotiescunque datur.

SCHOLION 5.

962. *Ita in machinis, quæ serrarum reciprocatione ligna secant, rectanguli lignei, cui serra inferuntur, latera ejusmodi rotulis instrui deberent. Minuta enim frictione, plures serra una secare possent.*

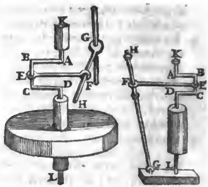


Similiter brachia pistillorum attollendorum CD *rotulis instruere juvat, ut super pinnulis curvis* EF *axis* E *sine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam assignat* Cl. de la Hire (c).

(b) Memoires de Mathemat. & de Physique p. 51. & seqq.
(c) Loc. cit. pag. 92. & seqq.

COROLLARIUM 4.

963. Et quia axes curvati superincessum plane tollunt (§. 884); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.



SCHOLION 6.

964. *Enia vere ea, nec hic cessat frictio in* E & G. *ctione, quæ ex supe... est, si comparetur cum fri... ... rotarum oriri solet.*

SCHOLION 7.

965. *Equidem* Amonton *regulam dedit computandi vim ad frictionem in dato salem ... casu superandam requisitam* (a); *sed cum ... nem frictionem a sola pressione ex pondere superincumbentis derivet, ex antecedentibus satis apparet, quod proposito satisfacere nequeant.*

CAPUT XVIII.

De Machinis Compositis.

DEFINITIO 98.

966. Machina composita est, quæ ex pluribus simplicibus tanquam partibus constat.

SCHOLION.

967. *Machinarum compositarum nullus est numerus. Construuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in usum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a machinis perfici possunt, ad quæ idem semper motus vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua saxi molaris opus est: unde hæc opera machinis demandatur. Similiter ad contusionem granorum, ex quibus oleum exprimitur, pistillorum elevatione continuo iteranda opus est: hinc a machinis contusio ista perficitur. Ut arbor prostrata in asseres dissecetur, continua serrarum reciprocatione opus est. Quare denuo machinarum vires ad hunc usum transferantur. Nostrum equidem non est, theatrum quoddam machinarum in præsenti aperire; sed ut compositionis earundem quandam ideam animo comprehendant tyrones, unum saltem alterumque exemplum in medium afferemus, additis regulis quibusdam generalibus, quibus de machinis inveniendis solliciti juvantur.*

PROBLEMA 158.

968. *Dato opere perficiendo machinam componere.*

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus est, ut operis perficiendi notionem distinctam &, quantum licet, adæquatam habeamus; ad quam quomodo perveniatur, ex commentatione de methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi distinctius explicavi (b). Scilicet singula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione distingui possunt, tum sigillatim expendenda, tum inter se conferenda.
2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus sit ad id præ-

(a) Memoires de l'Academie Royales des Sciences An. 1799. Pag. 260. & seqq. edit. Bat.

(b) In Philos. ration. seu Logica §. 678

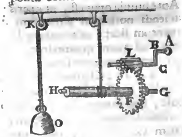
id præstandum, quod requiritur: qui est effectus a machina producendus.

3. Ex eadem quoque constabit quantitas virium ad resistentiam in motu superandam requisitarum: ubi

4. In primis consideranda est frictio ex superincessu mobilis oriunda, & de remediis mechanicis capite superiori expositis deliberandum.

5. Antequam vero consilium ineatur, quibusnam machinis simplicibus combinatis motus desideratus produci queat; de potentia machinam agitatura cogitandum est, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque machinæ structura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad machinam applicanda: externa ejus structura statim constabit ex capite decimo sexto.

6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expensa, vi capitis decimi quinti non difficulter determinantur machinæ simplices in composita combinandæ.

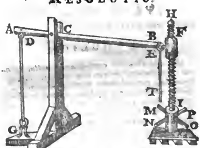


E. gr. Sit construenda machina, qua onus ingens O in altum attolli possit & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum sit corpus grave, statim apparet, lineam directionis esse ad horizontem perpendicularem. Talis ergo construenda est machina, quæ pondus sursum trahat secundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, sed saltem ingens supponitur; machinam construere sufficit, qua homo pondus aliquod viribus suis longe superius elevare possit, tempore tamen non nimis longo. Et quia machina compendiosa esse debet, ut commode huc illucque transferri possit; moveri optime poterit versando, ideoque axe incurvato ABC instruenda (§. 880). Enimvero ut pondus ingens moveri possit, axis curvatus solus non sufficit, sed cum rota dentata F axi horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus sursum trahens circa cylindrum inferiore loco constitutum circumvolvi queat, supra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Constat ergo machina ex axe GH cum rota stellata F & axe dentato LC atque incurvato CBA duabusque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, sed sola rota F & axis incurvatus CBA. Est nimirum seposita frictione potentia sustentans ad pondus in ratione composita radii axis dentati LC ad BC & radii axis GH ad semidiametrum rotæ F (§. 801).

PROBLEMA 159.

969. *Machinam construere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli potest.*

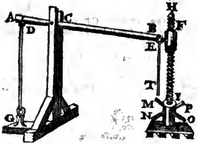
RESOLUTIO.



1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D infigatur uncus, cui onus attollendum G alligari possit.

2. Alteri vectis extremo B affigatur annulus E, qui cochleæ fœminæ F seu matrici afferruminetur.

3. Matrici inseratur cochlea HI, quæ ergatæ IL circa axem suum in L mobili firmiter insistat.



Quodsi enim mediantibus scytalis M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF descendit & vectem AB deprimit, consequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli possit, patet ex theor. 179 (§. 765) & theor. 199 (§. 847). Est nimirum potentia ad pondus in ratione composita AC ad CB, si AB fuerit horizontalis, & distantiæ duarum helicum in cochlea ad peripheriam scytala descriptam. Sit e. gr. distantia helicum 3‴, longitudo scytalæ 3′, erit peripheria, quæ eadem describitur 942‴, ideoque potentia in M est ad resistentiam in E ut 3 ad 942, hoc est, ut 1 ad 314. Sit jam AC : CB = 1 : 3; erit ergo resistentia in E $\frac{1}{3}$ ponderis G, consequenter potentia ad scytalam M applicata $\frac{1}{942}$ ponderis. Quodsi singulis scytalis singulæ potentiæ applicentur; erit una earundem $\frac{1}{3768}$ ponderis.

Corollarium.

970. Si cochlea cum ergata remota, funis ET alligetur in B, pondus G similiter cum virium compendio, attolletur, quamvis multo minore (§. 765).

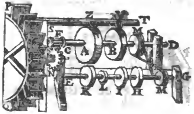
Scholion.

971. *Machina posteriore utuntur ad onera ex navi una in alteram contiguam transponenda.*

Problema 160.

972. *Molam acuminariam construere, hoc est, machinam, qua instrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.*

Resolutio.



1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F instructo infigantur ad acuendum.
2. Axi alteri EG infigantur duo orbes lignei H & I, super quorum primo H arena politura inchoatur, super altero vero I smyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio superinducti, super quibus smyridis pulvere subtiliori politura perficitur.
3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena instructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere possit.
4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota stellata N, quæ communem cum rota molari PQ, e. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverso aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus instruitur, ut motus cotium sit satis celer.
5. Denique cum cotes continuo madidæ esse debeant; ad rotam molarem appli-

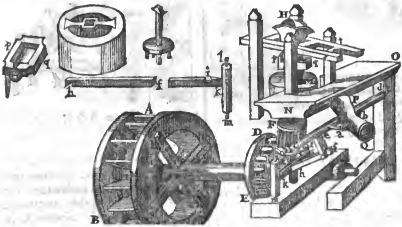
applicanda ſunt duo hauſtra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in cotes delabentem.

SCHOLION.

973. *Solent quoque molæ unicæ ad poliendum conſtrui, tumque orbes axi* GE *infixi aptantur ad primarium* DC, *ipſi vero* GE *alii minores inſeruntur.*

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas ſufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris inſigere licet.

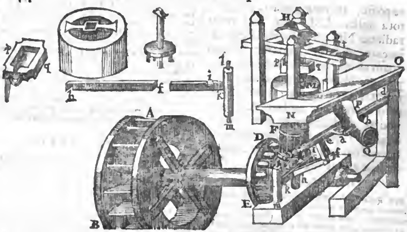


PROBLEMA 161.

975. *Molam frumentariam ab aqua agitandam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur rota molaris ſive directa, ſive retrograda prout caſus tulerit, nunc major, nunc minor, prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit e. gr. rota retrograda AB 18 pedum eaque 33 palmulis inſtructa.
2. Ejuſdem axi infigatur rota DE, cujus diameter illius ſubdupla, vel etiam major, pro diverſa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in noſtro caſu numero 48, in plano gerat.
3. Per curriculum FI 6, 7, 8 imo 9 bacillis inſtruendum, pro diverſa celeritate, qua rota molaris movetur, virga tranſeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura ſua referenti incumbat *meta* (ſeu lapis molaris ſuperior) *catinum* (ſeu lapidem inferiorem) fixum 4 fere digitis circumcirca ſuperans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli poſſit.
4. Ex ſcala ſuſpendatur infundibulum *pq* mediante axe in peritrochio *rt* pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde
5. Bacillus propendeat in foramen me-



ræ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere insistat capsa H pyramidem truncatam referens & tam superius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.

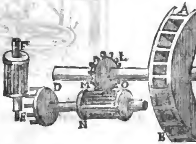
7. Lapides cingantur cista cylindrica, spatio inter eam & metam nonnisi duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in sacculum tremulum ex peculiari linteo (nostrates *Beuteltuk* appellant) confectum devolvatur & farina furfure separetur.

9. Sacci, cujus latera loris assuta, extremis vero P & Q annuli ferrei insuti sunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ assuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui infigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *bf* alteri *ik* cylindrulo *lm* circa axem suum versatili infixæ in *i* incumbens.

11. Curriculo FI sub angulo obliquo infigantur tres bacilli æqualiter a se invicem distantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *bf* protrudunt & sic saccum attollunt, mox iterum relapsurum, regula *ik* in situm pristinum recedente.



12. Quodsi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere

re possit; axi rotæ molaris infigitur rota stellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit, quarum saltem unam ab uno latere in schemate exprimere libuit: reliqua omnia sunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB sit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem stricte inhærendum non sit, si aliæ circumstantiæ aliam suadeant.

SCHOLION 1.

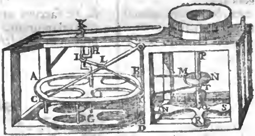
976. *Rotarum dimensiones dentiumque numeri variant pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, quæ partim ab ejus sectione, partim a declivitate, per quam ad illam delabitur, pendet. Constat vero ex superioribus* (§. 792), *rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis; minores vero, ubi hæc major.* Bœklerus (a) *diametrum rotæ vel solo impetu fluminis sine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declive delapsa agitandæ fieri præcipit 48 pedum, numerum palmularum 86; diametrum rotæ stellatæ* (*Vid. Fig. 2 pag. præc.*) LM *18 pedum, numerum dentium 180, numerum bacillorum in rota* DE *60.* Casatus (b) *annotat, in Pado communiter longitudinem* (*Vid. Fig. 1 pag. præc.*) *rotæ molaris* AB *esse cubitorum 10, diametrum rotam cubitorum 6, inferiorem rotam* DE *diametrum habere cubitorum* $5\frac{1}{2}$, *dentes 108 plane infixos & curriculum* FI *in fusos 9 distingui; lapidem molarem in crassitudine numerare uncias 6 aut 7, in diametro cubitos* $2\frac{1}{2}$. Franciscus Philippus Florinus (c) *rotæ retrogradæ ab aqua rivuli 4 vel 5 pedum declivitatis agitandæ diametrum constituit 18 pedum, numerum palmularum 30 vel 36, latitudinem palmularum 10 vel 14 digitorum, altitudinem unius pedis. Rotæ dentatæ* DE *dentes assignat 72, curriculo bacillos 6, 8 vel 9, prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum alluente rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit 16 pedes.*

COROLLARIUM.

977. Quodsi situs (*Vid. Fig. 2 pag. præc.*) rotæ verticalis LM mutetur in horizontalem & dentes in plano infigantur; rotæ vero molari substituatur vectis veluti in ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante: molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco superiore deambulantibus commode agitandum. Est vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in posteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLION 2.

978. *Multis adhuc modis aliis molæ manuariæ construi possunt. Eminet vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri potest, superincessu rotarum penitus sublato. Id igitur ut describatur, e re nostra judicamus.*



PROBLEMA 162.

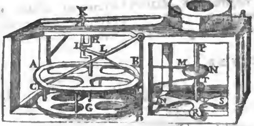
979. *Molam manuariam construere.*

RESOLUTIO.

1. Construantur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6 pedum, & inferior ad conservandum impetum plumbo infuso oneretur.

(a) In der Hauss-und Feld-Schule part. 3. Class. 6. pag. 500. & 501.
(b) Mechan. lib. 5. cap. 7. pag. 560
(c) Im Klugen Hauss-Vater lib. 2. c. 42. f. 308. & seqq.

2. Per



2. Per centrum utriusque defigatur axis incurvatus HG per vectes IK & IL convertendus, ut supra docuimus (§. 884).
3. In rotæ superioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis ceratus commode circumduci queat: qui idem
4. Circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixæ virgæ ferreæ PQ, cui eidem
5. Infigatur crux ex brachiis ferreis constans RSTN, quibus singulis affixum est pondus plumbeum, ad impetum servandum.
6. Reliqua fiant ut in problemate præcedente (§. 975).

SCHOLION.

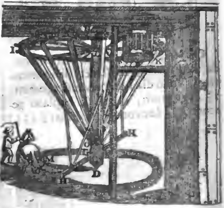
980. *Axiculi rotarum ferrei sustentaculo orichalceo incumbere debent, quod & affrictum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem molarum genere sustentaculum virgæ ferreæ, cui lapis molaris incumbit, ita construendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi possit, prout usus postulaverit. Major enim lapidum distantia requiritur, si grana integra conterenda, quam si jam contrita in farinam convertenda.*

PROBLEMA 163.

981. *Molam jumentariam construere.*

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus (*Vid. Fig. seq.*) verticalis DN, cujus diameter 14 digitorum cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando. Imo temo geminari potest.



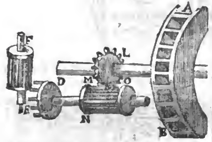
2. Circa eundem cylindrum construatur rota stellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transversis (quale IL) quorum latitudo 7, crassities 2 digitorum, connectenda, & adhuc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & crassities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.
3. Dentes ex ligno quercino probe sicco parati ita infigendi, ut axes eorundem distent $4\frac{1}{2}$ digitis.
4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fusorum seu bacillorum

11,

11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.

5. Reliqua fiant ut in probl. 161 (§. 975).

A L I T E R.



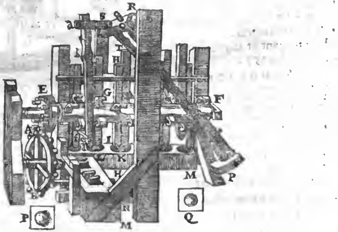
Quodsi rota ideo ingens non commoda visa fuerit, construere licet minorem, cujus diameter nonnisi 7 pedum, $1\frac{1}{2}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut superius (§. 975) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{2}$ digitorum, numerus bacillorum 16. Cum eadem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens & curriculum FE 6 fusis instructum circumagens. In rota priore crassities dentis 2, in posteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

P R O B L E M A 164.

982. *Molam alatam construere*.

R E S O L U T I O.

Structuram externam docuimus supra (§. 929). Interna constat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis, quæ ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota dentata est 72, vel 80: numerus fusorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala est pedum 30 vel 32.

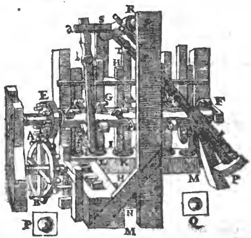


P R O B L E M A 165.

983. *Molam oleariam construere*.

R E S O L U T I O.

Mola olearia ita construenda, ut tum



tum materiam contundere, tum ex contusa atque tosta oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præstetur,

1. Axi rotæ molaris infigatur rota stellata AB, quæ circumagat
2. Rotam radiatam AE axi EF insertam, cui hinc inde pinnulæ G infiguntur pistilla HI attollentes.
3. Pistillorum bases itemque fundi vasorum K in trunco LM excavatorum lamina ferrea obducantur, ut semina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, pistillis proprio pondere relabentibus.
4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum basis inferior sit perforata, ut oleum expressum inde in vasa subjecta destillare possit. Intra ea reponitur materia contusa & in aheno super igne tosta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemisphærium cavum, in altera convexum, comprehensa. A parte postica intruditur cuneus acie sua prominens in H & ab antica infigitur alius N.
5. Ut cuneus alter N vi adigi sicque oleum exprimi possit, malleus P cum vecte PQ cylindro RS circa axem suum mobili affigatur, mediante ligno transverso TV ad cuneum dirigendus.
6. Ad eundem cylindrum RS in opposito latere aptetur forceps *ab*, intra quem continetur contus *bd* cum pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum P attollit proprio pondere cum impetu in cuneum N mox relabentem.

COROLLARIUM I.

984. Quoniam rota radiata AE cum stellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; si aquæ sufficiens copia atque declivitas, vel numerus pistillorum exiguus fuerit;

rit; ipsi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi potest. Et tales sunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum pistillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

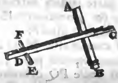
COROLLARIUM 2.

985. Si vis aquæ sufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis suis pistilla elevantes a rota stellata circumagi solent.

COROLLARIUM 3.

986. Et quia perinde est, quæcunque materia contundatur; eadem manet structura, si mola construatur ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint e. gr. pistilla 16 in duas series distributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius, 48; diameter rotæ AB 7′ 3″, numerus dentium 60; longitudo cylindri EF 15′ 10″, diameter 14″; diameter rotæ radiatæ 3′ 2″, numerus fusorum 24; integra pistilli altitudo 9′ 2″, crassities & latitudo 4″. Sed si rota externa calcando movetur (§. 886), diameter ejus esse potest 16 pedum, rotæ stellatæ AB $5\frac{1}{2}$, numerus dentium 60, numerus fusorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus pistillorum 9.

SCHOLION 1.



987. *Structura molarum chartariarum eadem est, quam in corollario primo (§. 984) exposuimus, nisi quod tudicula* AB *ferro obducta in* B *vecti isomodromo* DC *circa baculum* EF *mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rota molaris infixis in* C *impellendo, & per canalem vel ope antliæ, vel ope haustrorum ad rotam molarem applicatorum aqua continuo in linamenta contundenda deduci debeat.*

SCHOLION 2.

988. *Cum structura molæ oleariæ prorsus convenit structura trituratoria, quæ anno 1700 Erzæ in ditione Electorali Brunswicensi inventa & cum insigni fructu ad frumenta straminibus ejicienda adhibetur, nisi quod peculiari artificio opus sit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Describitur in Miscellaneis Berolinensibus* (a).

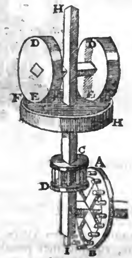
Wolfii Oper. Math. T. II.

(a) Pag. 325.

PROBLEMA 166.

989. *Machinam construere, quæ materiam pulveris pyrii sine pistillis conterat.*

RESOLUTIO.



1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem
2. Aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti aut (quod melius judicatur) marmorei DE, quorum diameter 6, 7 vel 8 pedum, crassities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacto, vel in vase cylindrico orichalceo, si plumbei fuerint; vel super saxo marmoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, si marmorei fuerint, incedant.

SCHOLION I.

990. *Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina construitur, quia ex hac materia per frictionem nullæ scintillulæ eliciuntur, unde non sine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere solet.*

SCHOLION 2.

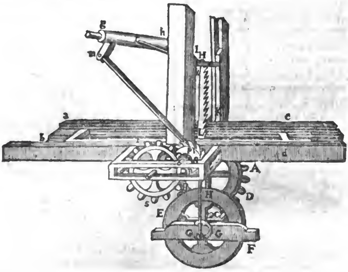
991. *Ceterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.*

PROBLEMA 167.

992. *Molam ferrariam construere.*

RESOLUTIO.

In molis ferrariis duplex motus considerandus, quorum altero ferra reciprocatur, altero vero lignum ad ferram continuo promovetur. Ad motum ferrarum producendum

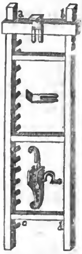


1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota stellata AB, cujus diameter sine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc

2. Incedat super rota radiata CD 12 vel 8 (pro diversa vi aquarum) bacillis instructa & communem axem habente cum rota verticulari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.

3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum ferra HL, intra duas pilas ita constricta, ut nonnisi sursum protrudi ac deorsum trahi possit.

4. Ad



4. Ad motum ligni efficiendum construendus est currus *abcd*, cujus longitudo longitudini ligni secandi proportionata, e. gr. 18 pedibus major, latus vero alterum dentibus instructum.

5. Ut ergo lignum uncis ferreis ad currum firmatum ad serram cõtinuo promoveatur, axi *gb* infigatur baculus *ik*, cujus alterum extremum *k* inditum est annulo ad tendiculam IK firmato: & prope alterum extremum forceps *m* contineat furcam *ml* usque ad dentes rotæ serratæ *ln* extensam, cujus diameter duorum pedum.

6. Porro axi rotæ serratæ ferreæ infigenda est alia radiata *pq* 6 bacillis instructa, qua circumagitur rota stellata *rs* dentes 36 & axem communem cum alia radiata *tv* habens, quæ 6 bacillis instructa currum propellit.



SCHOLION.

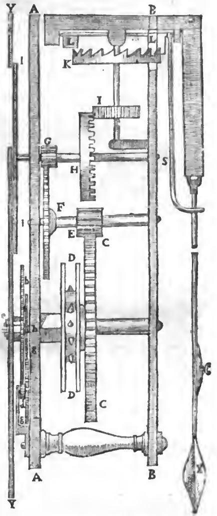
993. *Dantur & adhuc alii modi currum propellendi, quos repræsentat* Bœcklerus (a). *Nos eum descripsimus, quo ordinarie utuntur. Ceterum idem* Bœcklerus (b) *molam serrariam manuariam accurate delineat.*

PROBLEMA 168.

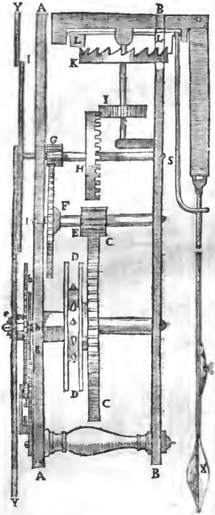
994. *Horologium oscillatorium Hugenianum construere.*

(a) In Theatro Machinarum fol. 60. & seq.
(b) *In der Hauß-und Feld Schule* Tom. 2. class. 6. p. 512. & 513

RESOLUTIO.



1. Fiant laminæ AA & BB semipedali longitudine, pollices duos & se-



mis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inserantur.

2. Rota infima CC 80 dentibus incidatur in convexo & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD, ex quo pondera suspendantur.

3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo & una rotam stellatam F dentium 48.

4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8 & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.

5. Hæc agitet tympanum I dentium 24 & rotam serratam K dentium 15.

6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo penduli intra duas laminas cycloidicas (quæ in fig. seq. clare conspiciuntur) duplici filo suspensi virgam ferream cum appenso pondere plumbeo X complexa.

7. A lamina AA quarta digiti parte distet alia YY, in qua describantur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas; exterior in 60 scrupula prima dividatur.

8. Axi rotæ CC aptetur rota *bb* tubulo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, sine eodem tamen converti possit, ubi e re fuerit.

9. In tubuli prædicti extremo *e* applicetur index horæ spatio circuitum absoluturus atque ita minuta horaria indicaturus.

10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum sex dentium *d*: quod tandem

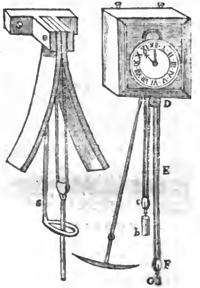
11. Convertat rotam dentium 72 indicem horarium minutario breviorem circumferentem.

12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll* & in eo

eo circulus in 60 partes æquales divisus describatur, qui per incisum in lamina YY foramen minuta secunda monstret.

13. Longitudinem penduli, ut jam supra notatum est, *Hugenius* (*a*) inventor experimentis factis deprehendit esse partium trium, quarum una est ad pedem Parisinum ut 881 ad 864 (§. 470).

14. Pondus perpendiculi X trilibre esse debet & ne occursu aeris motus impediatur, optima ejus forma est



lenticularis. Ponderis *b*, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri nequit, sed per experientiam determinanda. *Hugenius* pondere 6 librarum usus est, diametro orbiculi D unius digiti existente, longitudine autem penduli ea, quam diximus.

15. Ceterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus sursum trahitur; peculiari hoc artificio suspendendum, quod a laudato *Hugenio* repertum. Funis scilicet in se rediens orbiculum D amplectatur & inde descendens altera sui parte trochleam *c* subeat, cui pondus *b* appensum. Hinc super orbiculum D extrinsecus horologio affixum ascendit iterumque ad trochleam alteram F descendit, cui pondus G appensum majus *b* retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto descendat. Hic autem serratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat.

SCHOLION 1.

995. *Horologia hæc oscillatoria Hugeniana adeo accurate construi possunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus solis diurnus inæqualis, seu in chronologicis ostendetur. Unde in Astronomia, ubi accurata temporis mensura requiritur, ingens eorum est usus. Sane Vir* Cl. Philippus de la Hire (a) *testatur, se sæpius expertum esse, quod intra octiduum a medio solis motu vel minuto secundo non aberrent.*

SCHOLION 2.

996. *Cum pleraque machina ex ligno construi soleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum constructionem edocere.*

PROBLEMA 169.

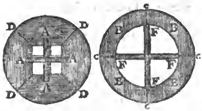
997. *Rotas dentatas & radiatas ligneas construere.*

RESOLUTIO.

1. Orbes rotarum, quibus dentes infiguntur, ex diversis partibus componuntur. Si dentes in plano infiguntur,

(a) In Horologio oscillatorio f. 7.

(a) In epistola dedicatoria Tabulis Astronomicis præmissa.



tur, aliæ partes sunt segmenta circuli A, aliæ segmenta annulorum circularium B. Posteriores ita superimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B & contra juncturæ C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transversis FF firmantur. Quodsi dentes in convexo infigendi; partes in utroque plano sunt segmenta annularia B.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum existunt, in tot partes æquales divisa, quot dentes rota habere debet, intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, qualium 7 tribuuntur denti, 9 vero interstitio inter binos relinquuntur, quarum 8 cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes æquales, quarum 3 spissitudini dentis IK, $3\frac{1}{7}$ spissitudini seu diametro bacilli tribuuntur.

3. Idem intervallum dividitur in 3 partes æquales & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{4}{7}$ faciunt.



4. Anguli dentium secundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati resecantur, ut superincessus super bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes infiguntur, esse debent quadrata & axiculi ferrei in centris rotarum exacte constituendi, eo meliores, quo minores, quia minorum minor est frictio, eadem de causa imponendi concavo orichalceo aut saltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, nisi bacilli exiguæ fuerint longitudinis, & si numerus bacillorum exiguus & resistentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri consuevit.

Scholion 1.

998. *Distantia dentium in rotis, quarum usus in molendinis est, intra spatium 4 & 5 digitorum fere continetur.*

Scholion 2.

999. *Rotæ horologiorum metallicæ accuratam inprimis exigunt divisionem, ad quam absolvendam peculiaribus instrumentis opus est* a Leupoldo (a) descriptis.

(a) In Theatro Machinarum generali cap. 5. §. 93. 94.

Finis Elementorum Mechanicæ.

ELE-

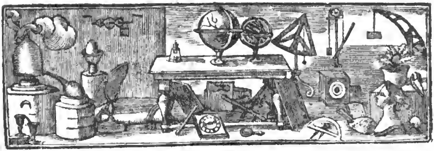
ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

PRÆFATIO.

NOn dubito fore multos, quibus leges hydroſtaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim gravitatem ſibi imaginentur tanquam vim in materia perſiſtentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato: fluida vero, quamdiu intra eoſdem terminos concluſa quieſcunt, omnis actionis in corpora alia prorſus expertia judicent; rationem ſane non capiunt cur partem gravitatis corpori demerſo veluti adimant, vel etiam totum ingenti ſæpius impetu ſurſum propellant. Enimvero quemadmodum leges hydroſtaticæ admodum evidenter demonſtrantur; ita non minus experientia ſingulæ confirmantur. Hinc diſcant velim, qui in rebus naturalibus cognoſcendis ſenſui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane eſſe in intellectu, quam in ſenſu: cujus veri-

veritatis plenior convictio ab Optica speranda. Quodsi hunc solum sui usum hydrostatica præberet, digna profecto foret, quam meditarentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipsa quoque clavem continet, qua multa abdita reserantur. Non exiguus est phænomenorum numerus, quorum ratio in Hydrostatica continetur, & quæ nec sine ea intelligi, nedum comprehendi possunt. Hydrostaticæ usum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum solidorum, inprimis autem fluidorum, in *Medicina hydrostatica* ostendit celeberrimus *Boylius*. Varios eosque præclaros in vita humana usus in ipsa pertractatione passim indicavi. Sine ea nec Aerometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi potest. Sat ergo rationis apparet, cur Hydrostaticæ elementa inter elementa Matheseos præcipuum quendam locum sibi vindicent, & cur digna sint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana usus applicentur. Agite itaque, quotquot natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando solum cogitent, evolvite hæc Hydrostaticæ elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Physicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.

ELE-



ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT I.

De Corporum Specifica Gravitate & Levitate.

DEFINITIO 1.

1. *Hydrostatica* est scientia gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2. *Docetur nempe in Hydrostatica non modo ratio gravitatis fluidorum, sed & imprimis actio eorum in solida demersa.*

DEFINITIO 2.

3. *Corpus fluidum* est, cujus massulæ quantælibet sunt inconnexæ, mutua cohæsione a causa quacunque impedita.

DEFINITIO 3.

4. *Corpus solidum* est, cujus massulæ quantælibet sunt connexæ.

DEFINITIO 4.

5. *Corpus specifice levius* est, quod sub eodem volumine minus pondus continet, quam alterum.

DEFINITIO 5.

6. *Corpus specifice gravius* est, quod sub eodem volumine majus pondus continet, quam alterum.

SCHOLION.

7. *Sint duo globi æquales, quorum scilicet diameter unius pedis, alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo, dicetur specifice gravior, ligneus autem specifice levior.*

DEFINITIO 6.

8. *Corpus densius* est, quod plus massæ sub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mech.*); corpus specifice gravius densius est specifice leviori, & corpus densius specifice gravius est rariori (§. 5 6).

DEFINITIO 7.

10. *Corpus rarius* est, quod minus massæ sub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mech.*); corpus rarius est specifice levius densiori, & specifice levius rarius specifice graviori (§. 5. 6).

AXIOMA I.

12. *Corpora ejusdem densitatis sub eodem volumine æqualem massam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare si volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt seu gravitatem eandem habebunt (§. 112 *Mechan.*).

AXIOMA 2.

14. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, densitates sunt ut massæ.*

SCHOLION.

15. *Nempe vi defin.* (§. 8) *corpus dicendum est duplo densius, si duplum massæ sub eodem volumine continet; triplo densius, si triplum, & ita porro.*

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur densitates corporum æqualium ut pondera seu ut gravitates (§. 112 *Mechan.*).

THEOREMA I.

17. *Si duo corpora eandem densitatem habuerint, massæ sunt ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem massam continent (§. 12), ideoque in volumine duplo continetur massa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla & ita porro. Sunt igitur massæ ut volumina. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

18. Quoniam etiam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); corporum ejusdem densitatis gravitates sunt in ratione voluminum (§. 167 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

19. Ergo corpora ejusdem densitatis sunt etiam ejusdem gravitatis specificæ, & contra (§. 6).

COROLLARIUM 3.

20. Quare corpora diversæ densitatis sunt diversæ gravitatis specificæ, & contra.

THEOREMA 2.

21. *Massæ duorum corporum sunt in ratione composita densitatum atque voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum massæ a, b, c, volumina primi & secundi d, tertii e, densitas primi f, secundi & tertii g: sint nempe primum & secundum ejusdem voluminis, secundum & tertium ejusdem densitatis. Quoniam

$$a : b = f : g \ (\S.\ 14)$$
$$b : c = d : e \ (\S.\ 17)$$

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 213 *Arith.*) consequenter $a : c = fd : ge$ (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

22. Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); eædem etiam sunt in ratione composita densitatum & voluminum (§. 167 *Arith.*).

THEOREMA 3.

23. *Si duorum corporum massæ vel gravitates fuerint æquales; densitates sunt reciproce ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in theorematis præcedentis demonstratione, erit $a : c = fd : ge$ (§. 21). Jam $a = c$ *per hypoth.* ideoque $fd = ge$. Est igitur $f : g = e : d$ (§. 299 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); si massæ æquales sunt, etiam gravitates æquales sunt. Sed si massæ æquales sunt, densitates sunt reciproce ut volumina *per demonstrata.*

ſtrata. Ergo etiam, ſi gravitates æquales ſunt, denſitates reciproce ſunt ut volumina. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

24. *Duorum corporum quorumcunque denſitates ſunt in ratione compoſita ex directa maſſarum & voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione theorematis ſecundi, erit

$a:c = fd:ge$ (§. 21).

Ergo $age = cfd$ (§. 297 *Arith.*) conſequenter $f:g = ae:cd$ (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum ſunt ut maſſæ eorundem (§. 112 *Mechan.*); denſitates corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum & reciproca voluminum (§. 218 *Arith.*).

AXIOMA 3.

26. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, gravitates ſpecificæ ſunt ut gravitates abſolutæ.*

SCHOLION.

27. *Corpus enim duplo gravius ſpecifice dicitur altero, ſi duplam gravitatem ſub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, ſi triplam &c.* (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates abſolutæ ſunt ut maſſæ (§. 112 *Mechan.*); corporum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut maſſæ (§. 167 *Arith.*).

THEOREMA 5.

29. *Corporum ejuſdem ponderis gravitates ſpecificæ ſunt in ratione voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis $A = a$, volumen alterius $B = b$. Quoniam B ſupponitur eſſe homogeneum; gravitates voluminibus proportionales ſunt (§. 130 *Mechan.*) ideoque gravitas ipſius B ſub volumine a, reperitur $ag:b$ (§. 302 *Arith.*). Sunt igitur gravitates ſpecificæ corporum A & B ut g ad $ag:b$ (§. 26), hoc eſt, ut bg ad ag (§. 178 *Arith.*), conſequenter ut b ad a (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

30. Quodſi ergo volumina fuerint æqualia, etiam gravitates ſpecificæ æquales erunt, hoc eſt, corpora ejuſdem ponderis & voluminis eandem gravitatem ſpecificam habent.

THEOREMA 6.

31. *Gravitates abſolutæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita voluminum & gravitatum ſpecificarum (hoc eſt, gravitatum ſub eodem volumine.)*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejuſdem voluminis c gravitates abſolutæ a & b, ſpecificæ f & g; corporum ejuſdem ponderis a volumina c & d, gravitates ſpecificæ f & e; erit

$a:b = f:g$ (§. 26)
$f:e = d:c$ (§. 29).

Ergo $af:be = fd:gc$ (§. 213 *Arith.*)
Unde $a:b = d:\frac{gc}{e}$ (§. 185 *Arith.*)
& $a:b = ed:gc$ (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

32. *Gravitates ſpecificæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum abſolutarum & reciproca voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione theorematis præcedentis; erit

$a : b = ed : gc$ (§. 31).

Ergo $\frac{a}{d} : \frac{b}{c} = e : g$ (§. 185 *Arith.*) consequenter $ac : bd = e : g$ (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

33. Quoniam densitates sunt in ratione composita ex directa gravitatum absolutarum & reciproca voluminum (§. 25); gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 167 *Arith.*).

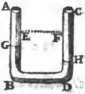
CAPUT II.

De Æquilibrio & Pressione Fluidorum.

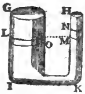
THEOREMA 8.

34. *Si in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit, fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.*

DEMONSTRATIO.



I. Si tuborum AB & CD diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem basin & altitudinem habent, ideoque æquales sunt (§. 535 *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales sint (§. 131 *Mechan.*), fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, qua idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quiescunt & neutrum alterum movet (§. 75 *Mechan.*). *Quod erat unum.*

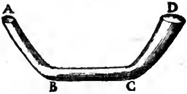


II. Quodsi basis tubi GI fuerit quadrupla basis alterius HK & aqua descenderet ex L usque ad O, e. gr. per intervallum unius digiti, in tubo altero NK ascenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 580 *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK est ad celeritatem, qua idem moveretur in GI, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 53 *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo ipsumque fluidum homogeneum *per hypoth.* massa fluidi in tubo GI est ad massam fluidi in altero HK, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 573 *Geom.*). Est ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK ut factum ex basi tubi GI in basin alterius HK ad factum ex basi tubi HK in basin alterius GI (§. 278 *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arith.*), vires etiam æquales sunt, ideoque neutrum fluidorum alterum movet (§. 75 *Mech.*). *Quod erat secundum.*



III. Si tubus unus RS fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas absoluta fluidi in tubo inclinato SR est ad gravitatem respectivam ejusdem, qua nititur juxta directio-

rectionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261 *Mech.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam qua quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem baſin & altitudinem habente cum inclinato TR; conſequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per caſ.* 1. *Quod erat tertium*.



IV. Eodem modo oſtenditur fluida æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, ſi ad eandem altitudinem conſtituantur. *Quod erat quartum*.

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major eſt altitudo.

THEOREMA 9.

36. *In tubis communicantibus quibuſcunque fluida diverſæ gravitatis ſpecificæ æquiponderant, ſi altitudines habuerint rationem gravitatum ſpecificarum reciprocam.*

DEMONSTRATIO.

E. gr. Sint tuborum (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*) AB & DC diametri æquales & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas ſpecifica aquæ eſt ad gravitatem ſpecificam argenti vivi ut 1 ad 14; ſit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero Mercurii in tubo DC digiti unius.

Quoniam baſes cylindrorum aquei & mercurialis æquales ſunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 573 *Geom.*), conſequenter cum tam aqua, quam mercurius ſit fluidum homogeneum, licet inter ſe heterogenea, gravitates abſolutæ eorundem erunt in ratione compoſita ex directa tam gravitatum ſpecificarum 1 : 14, quam altitudinum EB & DH, 14 : 1 (§. 31), hoc eſt æquales ſunt (§. 159 *Arith.*). Pro mercuriali itaque cylindro ſubſtituere licet aqueum, cujus altitudo altitudinem ipſius quaterdecies continet (§. 15 *Arith.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquiponderat (§. 34). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non abſimili modo oſtenditur, ſi tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM 1.

37. Inveniri igitur fluidorum duorum quorumcunque gravitas ſpecifica (*Vid. Fig.* 1 *pag. præc.*), ſi in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum, & altitudines EB & FD, ad quas ſubſiſtunt æquilibrata, ex eadem menſura accurate æſtimentur. Eſt enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLION.

38. *Quodſi fluida facile commiſceantur, tubum horizontalem* BD *Mercurio replere debemus, commixtionem impedituri. Etſi autem fluida non facile commiſceri ſoleant, ſpecifice tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.*

COROLLARIUM. 2.

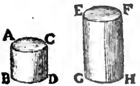
39. Quoniam denſitates fluidorum ſunt ut gravitates ſpecificæ (§. 33); eædem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM 3.

40. Eadem ergo methodo, quam *in Cor.* 1 (§. 37) expoſuimus, ratio denſitatum fluidorum determinatur.

THEO-

THEOREMA 10.



41. *In vasis perpendicularibus* ABDC *&* EGHF *æquales bases* BD *&* GH *habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum* AB *&* EG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vasa sunt perpendicularia, hoc est, bases eorundem in plano horizontali collocatæ *per hypoth.* fluida adversus fundos nituntur secundum lineas perpendiculares (§. 215 *Mech.*), ideoque tota gravitate sua, cum nihil resistat. Premuntur ideo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina sunt ut altitudines (§. 573 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

42. Quodsi ergo etiam altitudines æquales sunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM 2.

43. In vasa igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam consistente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales sunt super parte qualibet fundi (§. 36).

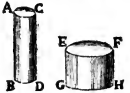
COROLLARIUM 3.

44. In uno eodemque vase fluidum ad diversas altitudines successive constitutum, fundum premit in ratione altitudinum, ad quas consistit.

COROLLARIUM 4.

45. Decrescente ideo altitudine, decrescit pressio, suntque hujus decrementa in ratione decrementorum altitudinis.

THEOREMA 11.



46. *In vasis perpendicularibus* ABDC *&* EGHF, *bases* BD *&* GH *utcunque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*), volumina sunt in ratione composita basium & altitudinum (§. 572 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione composita basium & altitudinum (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.



47. *Si in vas inclinatum* ACDB *eandem altitudinem & basin habuerit cum perpendiculari* BEFG; *fundus utriusque æqualiter premitur.*

DE-

DEMONSTRATIO.

In vase inclinato ACDB fundus CD premitur secundum directionem BD. Est autem vis gravitatis secundum BD ad gravitatem absolutam ut BE ad BD (§. 261 *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac si a fluido ad altitudinem BE consistente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vasis perpendicularis BEFG & inclinati ACDB æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

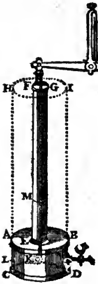
THEOREMA 13.



48. *Si bases vasis* ACDB *inæquales fuerint; fundus eodem modo premitur, ac si superior inferiori æqualis existeret.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit basis inferior CD minor superiore AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem in plano horizontali supponimus, secundum lineas perpendiculares EC premit (§. 215 *Mechan.*), nonnisi fluidum intra cylindrum ECDF comprehensum adversus eum nititur, reliqua massa contra latera vasis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac si basis superior inferiori æqualis esset. *Quod erat unum.*



II. Sit vasis inferior basis CD multo major superiore FG. Nempe ut demonstratio facilior evadat, cylindro ACDB infixus intelligatur tubus FE. Quodsi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per intervallum CL: in tubo FE per altitudinem EM ascendet, quæ est ad CL ut basis CD ad basin GF (§. 580 *Geom*). Est vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vase AD ut EM ad CL (§. 33 *Mech.*), consequenter ut basis CD ad basin FG (§. 167 *Arith.*). Vis ergo, qua aqua in tubo deorsum nititur, prodit si basis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*), summando scilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95 *Analys. infin.*), consequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a cylindro HCDI pre-

premeretur (§. 541 *Geom.*). *Quod erat alterum*.

Corollarium.

50. Vasorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem consistente, quæcunque sit figura vasis.

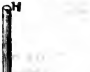


Scholion 1.

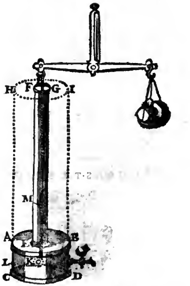
51. *Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus superior dolii* AD *attollatur ab aqua in tubo* CD *plurium pedum contenta. Ipsemet experimentum aliquoties iteravi in vase ligneo* AB *intus pice probe obducto & tubo* CD *ex lamina ferrea stamno obducta parato altitudinis 14 fere pedum, nec 800 libræ basi superiori imposita impedire potuerunt, quo minus attolleretur.*

Scholion 2.

52. *Ab hoc principio derivavi siphonem meum* anatomicum, *ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri scilicet curavi ex lamina ferrea stamno obducta vas cylindricum* DEGF *& eidem afferruminari jussi tubum* FIH. *Quodsi jam vesica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut alia quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inversa basi superiori superinducantur, eæ non modo ingenti vi in hemisphæricam figuram expandit, sed & poros subintrans omnes membranas & vasa ita dividit, ut, levi incisura facta, solis digitis multo accuratius separentur, quam cultro anatomico. Jucundum sane est spectaculum, dum non modo substantia membranacea mire intumescit, sed & vasorum per eam dispersarum ramificationes & insertiones minimas distincte spectare, tunicasque, quæ vulgo tres, ut Galenus, in plures discerpere licet. Probe autem notandum est, quod si interior vesica aut reliquarum partium corporis animalis super vase* DG *expansarum superficies aquam lambat, aqua per substantiam earum penetrare nequeat. Ceterum si vesicæ ingens pondus imponat, ab aqua in tubo* HI *vix duarum librarum attollitur.*



Scholion 3.



53. *Veritatem hujus doctrinæ de pressione fluidorum in ratione basis ac altitudinis exploraturus vas metallicum* ACDB *ita construi cures, ut fundus* CD *sit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & basi superiori* AB *successive tubi æqualti sed diversarum diametrorum applicari possint. Quodsi enim funiculi per tubum* FE *trajecti alterius extremum annulo* K *basi mobili afferruminato, alterum vero brachio alicujus libræ alliges, & in lance alteri appensa pondus collocas, idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus* CD *attollatur, non modo hinc disces, eodem semper pondere opus esse ad fundum attollendum, quæcunque sit tubi* FE *amplitudo, modo aqua constanter, ad eandem altitudinem consistat, sed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vase basin* CD, *sed altitudinem* FK *habentis.*

Scholion 4.

54. *Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonstrata sunt, non consentire videtur, quod in*

in tubis capillaribus, seu fistulis gracilieribus utrinque patulis, unaque sua extremitate sub aquam demersis, aqua ultra libellam assurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, phænomenon hoc alteri cuidam caussæ adscribendum esse, licet sine principiis aeremetricis definiri nequeat.

CAPUT III.

De Gravitatione Corporum Specifice Graviorum in Fluidis Levioribus.

THEOREMA 14.

55. *Corpus specifice gravius in fluido leviori tantam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.*

DEMONSTRATIO.



Ponamus e. gr. cubum pollicarem plumbeum F sub aqua demergi. Expelletur igitur ex eo, quem occupat, loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a resistentia ambientis sustentabatur. Ergo a resistentia aquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plumbei pars sustentari debet, quantum est pondus aquæ expulsæ. Hac igitur parte gravitas corporis demersi deprehenditur imminuta. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

56. Cum fluidum specifice gravius sub eodem volumine majus pondus possideat, quam levius (§. 0); idem corpus in fluido specifice graviori majorem ponderis sui partem amittit, quam in leviori, ideoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHOLION.

57. *Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in spiritu vini.*

COROLLARIUM 2.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aere æquiponderantium æquilibrium tollitur, si unum fluido graviori alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM 3.

59. Cum gravitates specificæ sint ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi solido immerso mole æqualis sit ad gravitatem solidi ut pars ponderis in fluido amissa ad pondus ipsius integrum (§. 55); erit gravitas fluidi specifica ad gravitatem solidi demersi ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 167 *Arith.*).

COROLLARIUM 4.

60. Duo solida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed specifice gravioris pondus majus est, quam specifice levioris (§. 6). Ergo majorem sui ponderis partem amittit specifice levius, quam gravius (§. 205 *Arith.*).

COROLLARIUM 5.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina sunt reciproce ut gravitates specificæ (§. 29); specifice levius ejusdem cum graviori ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare si in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, sed specifice gravius præponderabit eo magis, quo fluidum densius.

PROBLEMA I.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, e.gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur volumen fluidi per regulas stereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino suspensus fluido immergatur, & ope bilancis exactæ notetur pondus amissum: quod erit pondus fluidi sub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus sit volumini proportionale (§. 130 *Mechan.*); pondus fluidi quæsitum per regulam trium (§. 302 *Arith.*) invenietur.

E. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88 . 68 : 1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari potest pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque & in usus futuros annotari.

SCHOLION.

64. *Pondus pedis cubici aquæ investigarunt multi; sed cum in diversis fluviis ac fontibus non eadem sit gravitas specifica aquæ, imo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio: mirum non est, observationes diversorum Autorum inter se admodum discrepare.* Morlandus (a) *experimentis sæpius iteratis didicit, aquæ pedem cubicum juxta mensuram Parisinam esse 70 librarum cum duabus unciis.*

THEOREMA 15.

65. *Gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in utroque amissa.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ sunt ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem solido in diversis fluidis amissa sunt ut gravitates absolutæ fluidorum sub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in iis amissa. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

66. *Invenire gravitatem specificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ suspendatur globus plumbeus, & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipso in aere æquilibrium servet.
2. Globus successive immittatur diversis fluidis, quorum specifica gravitas determinanda, noteturque pondus, quod in singulis fluidis demerso æquiponderat.
3. Singula hæc pondera subducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amissæ, & una ratio gravitatis specificæ fluidorum constabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum densitates sint ut gravitates specificæ (§. 32); eodem modo invenitur ratio densitatis fluidorum.

SCHOLION 1.

68. *Maximi usus est hoc problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum investigantur: quod scire non solum in scientia naturali excolenda, sed & in vita civili ac praxi Medica proficuum existit.*

SCHOLION 2.

69. *Quodsi diverso tempore gravitatem specificam fluidorum investiges; hieme majorem, quam æstate deprehendes.* Joan. Casp. Eisenschmidius (b) *experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc tabulam referre libet.*

Tabula

(a) Elevation des E aux pag. 7.

(b) In Disquisitione Nova de ponderibus & mensuris pag. 174. & 175.

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Parisino.						
Pollex cubicus Paris.	Æstate			Hieme		
	Unc.	Grosf.	Gran.	Unc.	Grosf.	Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus salis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti destillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cerevisiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cerevisiæ fuscæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur.		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ destillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHOLION 3.

70. *Ut accuratissime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum constituti subtrahenda est ponderi solidi in aere; vis vero, quæ requiritur ad filum sub fluido demergendum, si specifice levius, addenda est ponderi amisso. Quodsi vero filum, ex quo pendet solidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aere subtrahendum est a pondere solidi in aere, & pondus, quod filum amittit, a pondere in fluido amisso. Enimvero quoniam filum cum solido immerso idem totum constituit, hac cautione opus non est, si in omnibus fluidis, quorum gravitates specificas inter se conferre volueris, eandem fili portionem una cum solido immergas. Quia crinis equinus eandem fere cum aqua gravitatem specificam habet; experimenta hydrostatica in aqua instituturi ex eodem solida suspendunt.*

PROBLEMA 3.

71. *Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a superioribus, nec ne.*

RESOLUTIO.

Exploretur *per probl.* 2 (§. 66), quamnam ponderis sui partem amittat idem solidum in diversis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodsi enim pondus a solido solo in diversis profunditatibus amissum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi specifica in partibus inferioribus, quæ in superioribus (§. 55), consequenter eadem densitas (§. 33). Quodsi vero in profunditate majore pondus majus amittitur, quam in minore; in priore casu gravitas specifica (§. 6), consequenter & densitas (§. 33), major erit quam in altero. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

72. *Tentavit hoc in aqua* Franciscus Tertius de Lanis (a). *Accepto autem vase duorum pedum altitudine, cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio 18 granorum perfectissimum facere*

(a) In Magisterio Naturæ & Artis Tom. 3. lib. 25. cap. 1 exper. 7. f. 492.

cere æquilibrium expertus est. Cum eundem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem descendere permitteret, ponderi ejus dimidium insuper granum decedere observavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immersum conjici debet, quippe extra aquam grani semissi æquiponderantem, aqua partes inferiores a superioribus nullam pati compressionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus instituere.

PROBLEMA 4.

73. *Determinare rationem, quam habet gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi, quod fluido specifice gravius existit.*

RESOLUTIO.

Ponderetur massa quantalibet solidi in fluido, & notetur accurate pondus in eodem amissum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi in ipso demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 59). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Si fluidum specifice gravius solido, propositio satisfiet per ea, quæ in capite subsequente traduntur.*

THEOREMA 16.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amissæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ corporum pondere æqualium sunt reciproce ut volumina (§. 29). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amissæ voluminum rationem habeant (§. 55); gravitates corporum specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amissæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur ideo ratio, quam habent gravitates specificæ solidorum, si massæ in aere æquiponderantes in eodem fluido ponderentur, & pondera a singulis amissa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem specificam plurimorum corporum solidorum investigarunt multi. Imprimis prolixa sunt tabulæ, quæ in hanc rem exhibentur in Transactionibus Anglicanis* (a). *Variorum quoque corporum, præsertim metallorum, gravitatem specificam, jam ante dedit* Marinus Ghetaldus (b) *&* *ex eo* Guilielmus Oughtredus (c): *dederunt postea alii. Nobis suffecerit annotasse metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem specificam a* Petito *multa solertia investigatam, prout eam exhibuit* Mersennus (d) *& ex ipso postea alii. Nempe, si fuerit gravitas*

Auri librarum 100

erit sub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. $71\frac{1}{2}$	Stamni puri	$38\frac{1}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Arganti	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{7}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stamni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{7}$

PROBLEMA 5.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem solidi mole ipsi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur ratio gravitatis specificæ fluidi ac solidi (§. 73).
2. Hac data per regulam trium invenietur gravitas solidi sub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi sub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas specifica aquæ ad gravitatem plumbi ut $5\frac{1}{7}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 32 ad 353 (§. 178 *Arith.*); reperitur gravitas plumbi 353. 200 : 32 = $2268\frac{1}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur data gravitate solidi unius gravitas alterius, si ratio gravitatis specifi-

(a) N. 169. p. 926. & seq. it. n. 199. p. 994. conf. Epitome Transact. Angl. Cl. Lowthorpii vol. 1. cap 6. p. 610. & seqq.
(b) In Archimede promoto.
(c) In Opusculis Mathematicis pag. 61.
(d) In Phænomenis Hydraulicis cor. prop. 47. Cogitatorum Physico-Mathem. pag. 192.

ſpecificæ inveſtigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas ſtamni cum plumbo 30 librarum ſub eodem volumine. Quia gravitas ſtamni ad gravitatem plumbi ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc eſt, ut 78 ad 121 (§. 178 *Arith.*); reperietur gravitas ſtamni quæſita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA 6.

80. *Dato corporis ſolidi volumine, invenire volumen ſolidi alterius pondere æqualis.*

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium ſint reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); problema præſens eodem modo reſolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum ut 21 ad 42 (§. 77), hoc eſt, ut 1 ad 2; volumen ferri erit quinque pedum cubicorum.

PROBLEMA 7.

81. *Dato pondere corporis ex duobus miſcibilibus compoſiti una cum pondere, quod in fluido aliquo amittit, invenire pondera miſcibilium ſigillatim.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido maſſa quædam determinata utriuſque miſcibilis amittat.
2. Hinc per regulam trium porro eruatur, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriuſque maſſa, ſi pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus ſubtrahatur e majori, ut conſtet exceſſus, quo pondus a ſpecifice leviori amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
4. Porro pondus a ſpecifice graviori amiſſum ſubtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut conſtet exceſſus, quo pondus a mixto amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
5. Quodſi ad exceſſum primum, exceſſum alterum & pondus mixti quæratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miſcibilis ſpecifice levioris: quod
6. A pondere mixti ſubductum relinquit pondus miſcibilis ſpecifice gravioris.

E. gr. Maſſa 120 librarum ex ſtamno & plumbo commixtis compoſita in aqua 14 libras amittit: quæruntur pondera ſtamni & plumbi ſigillatim. Quoniam experimentando reperitur, ſtamnum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

37 — 5 — 120
$\frac{5}{}$
$\frac{600}{37}$ lib.

23 — 2 — 120
$\frac{2}{}$
$\frac{240}{23}$ lib.

$$\frac{600}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

4920 — 3034 — 120
41 1 (120

(74 lib. Pondus ſpecif. lev.
120 Pondus mixti.

46 Pondus ſpecifice gravioris.

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum $= p$, quod in fluido amittit $= a$, pondus amiſſum a ſpecifice graviori ejuſdem cum mixto ponderis $= b$, amiſſum a ſpecifice leviori ejuſdem itidem cum mixto ponderis $= c$, pondus ſpecifice levioris, quod mixtum ingreditur, $= x$; erit pondus ſpecifice gravioris, quod mixtum ingreditur, $= p - x$, pondus a miſcibili x in fluido amiſſum $= cx$

$= cx : p$, amissum a miscibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$
$$cx - bx = (a - b)p$$
$$x = (a - b)p : (c - b) \text{. Q. e. d.}$$

SCHOLION.

82. *Eodem modo solvi potest problema ab* Hierone *Rege Syracusarum olim* Archimedi *propositum, quantum scilicet argenti corona aurea admiscuerit delosus artifex* (a).

PROBLEMA 8.

83. *Determinare bonitatem massarum, massasque adulteratas distinguere a genuinis.*

RESOLUTIO.

Præsupponendum hic est, bonitatem massæ æstimari ex ratione ipsius ad volumen, e. gr. frumentum eo melius, quo gravitas specifica major. Quare non alia re opus est, quam ut investigetur decrementum ponderis in aqua.

Quod si eodem mediante gravitatis specificæ massarum ratio ad fluidum aliquod determinetur (§. 73); massæ adulteratæ facile dignoscuntur, si facta ponderatione in eodem fluido, diversa ab hac gravitatis specificæ ratio reperitur (§. *cit.*).

SCHOLION 1.

84. *Cum aqua non semper ejusdem sit gravitatis specificæ, diversitas prius per ponderationem ejusdem solidi in eadem detegenda.*

SCHOLION 2.

85. *Notandum præterea, fieri nonnunquam posse, ut hydrostaticum examen solum adulterationem factam non prodat. E. gr. Cum stannum argento sit specifice levius, plumbum specifice gravius, duo hæc metalla (quod inferius expressius docetur) ita misceri possunt, ut eandem cum argento gravitatem specificam nanciscantur: quæ massa postmodum cum argento permixta examen hydrostaticum non veretur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miscibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur* (§. 81).

SCHOLION 3.

86. *Notandum denique, per varia experimenta addiscendam esse diversitatem, quæ in gravitate specifica corporum ejusdem speciei ad idem fluidum occurrere potest, antequam de adulteratione facta judicium feratur.*

PROBLEMA 9.

87. *Fluidum specifice gravius ponderare in specifice leviori.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Mercurius in aqua ponderandus.

1. Assumatur vas vitreum v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amissum 36: quod erit pondus aquæ ejusdem cum vitri massa voluminis (§. 55).
2. Idem vas argento vivo repletum in aere ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amissum 43: quod erit æquale ponderi aquæ ejusdem cum vitro & Mercurio simul sumto voluminis.
4. Quare si pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde subtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc est, pondus ab argento vivo in aqua amissum 7.

THEOREMA 17.

88. *Corpus specifice gravius in fluido specifice leviori ea vi descendit, quæ est excessui ponderis ejusdem supra pondus fluidi sub eodem volumine æqualis.*

DEMON-

(a) Vid. Vitruvius lib. 9. cap. 3. f. 273.

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonnisi ea vi descendit, quæ ipsi relinquitur, demta parte in resistentiam fluidi vincendam impensa. Quamobrem cum hæc æqualis sit ponderi fluidi sub eodem volumine (§. 55); nonnisi excessu ponderis sui supra pondus fluidi sub eodem volumine descendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

89. Quoniam vis ad sustentandum corpus in fluido requisita æqualis est vi, qua nititur deorsum in eodem; vis, quæ corpus specifice gravius in fluido susteutat, æqualis est excessui gravitatis absolutæ supra gravitatem fluidi sub eodem volumine. E. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{7}$ in aqua amittit de pondere suo $5\frac{1}{7}$ libras: vis ergo 42 librarum id sustentare valet.

COROLLARIUM 2.

90. Quare cum excessus ponderis solidi supra pondus fluidi speeifice gravioris minor sit, quam supra pondus specifice levioris sub eodem volumine; in specifice graviore vi minore descendit, quam in leviore, consequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius desceudit.

COROLLARIUM 3.

91. Quamobrem in specifice graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod sustentaudum, ne fundum petat, quam in specificæ leviori (§. 89).

PROBLEMA 10.

92. ***Data solidi submersi gravitate absoluta datoque volumine, determinare vim, qua in fluido attolli potest.***

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63): unde,
2. Ob datum solidi submersi volumen, per regulam trium inveniri potest pondus aquæ idem cum ipso volumen habentis.
3. Hoc ergo si subducatur a gravitate corporis submersi data, relinquetur vis, quæ ipsum in aqua sustentare valet (§. 89), ideoque tantillum aucta attollet.

Sit pondus corporis submersi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ sit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum submerso volumen habentis 2800: quod ex 3000 subductum relinquit vim sustentantem 200 librarum.

SCHOLION.

93. *Hinc patet ratio, cur corpora quædam, quæ scilicet ad gravitatem specificam fluidi propius accedunt (§. 90), in fluido isto exigua vi sustententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aere superant.*

CAPUT IV.

De Gravitatione Corporum specifice Leviorum in Fluido Graviori.

THEOREMA 18.

94. *Corpus specifice levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi sub volumine partis immersæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur divisum, æquiponderent (§. 34); si corpus solidum eidem imponitur, perinde est, ac si columnæ

lumnæ uni tantum ponderis accessisset, quantum est fluidi sub eodem volumine, consequenter columna ista præponderat (§.35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§. 75 *Mechan.*) corpusque solidum immergitur. Quam primum vero corpus ea sui parte immersum, ut fluidum ejectum ex spatio, quod occupat, pondere æquale sit gravitati totius corporis; columna ista non amplius præponderat. Corpus itaque ita immersum ab aqua sustentatur. *Q.e.d.*

Corollarium 1.

95. Quia gravitates specificæ corporum ejusdem ponderis sunt reciproce ut volumina (§ 20), volumina vero fluidorum pondere æqualium sunt ut partes immersæ ejusdem solidi (§.94); gravitates specificæ fluidorum reciproce sunt ut partes immersæ ejusdem corporis.

Corollarium 2.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviori.

Corollarium 3.

97. Quo majorem rationem solidi gravitas specifica ad fluidi specifice levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur (§. 203 *Arith.*).

Corollarium 4.

98. Si solidum fuerit ejusdem gravitatis specificæ cum fluido; corpus totum submergitur & datum intra fluidum locum servat.

Corollarium 5.

99. Si corpus specifice levius in fluido graviori totum submergitur, a columnis collateralibus ea vi ad ascensum urgetur, quæ æqualis est excessui fluidi, volumine solido æqualis, supra pondus solidi (§. 75 *Mechan.*).

Corollarium 6.

100. Corpus igitur specifice levius fundo vasis incumbens non attollitur, nisi fluidum gravius affusum ultra partem assurgat, quæ volumine æqualis est fluido ejusdem cum solido toto ponderis.

Theorema 19.

101. *Gravitas specifica solidi est ad gravitatem specificam fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum.*

Demonstratio.

Volumen enim fluidi solido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immersæ (§. 94). Cum igitur gravitates specificæ æquiponderantium sint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum. *Q.e.d.*

Theorema 20.

102. *Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immersæ sunt æquales.*

Demonstratio.

Etenim pars immersa solidi A æqualis est volumini fluidi, quod ejusdem cum toto corpore A ponderis, & pars immersa solidi B æqualis est volumini fluidi, quod ejusdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Est vero gravitas solidi A æqualis gravitati solidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* consequenter gravitas fluidi expulsi eadem. Ergo pars immersa ipsius A est æqualis parti immersæ ipsius B. *Q.e.d.*

Theorema 21.

103. *Solidorum æqualium gravitates specificæ sunt ut partes eorundem in eodem fluido demersæ.*

Demonstratio.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demersæ sunt ut gravitates fluidi expulsi

expulsi (§. 130 *Mechan.*), ideoque ut gravitates absolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates specificæ sunt ut absolutæ (§. 26), consequenter gravitates specificæ solidorum æqualium A & B sunt ut partes immersæ (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

104. *Data gravitate pedis cubici fluidi, e. gr. aquæ, una cum volumine partis immersæ solidi, invenire pondus totius corporis.*

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis solidi æquale est ponderi fluidi, quod idem cum parte immersa volumen habet (§. 94); ad pedem cubicum volumen partis immersæ & gravitatem unius pedis cubici fluidi quærendus est numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

E. gr. Pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64). Si itaque fuerit volumen partis immersæ 40 pedum cubicorum; reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA 12.

105. *Data gravitate e. gr. unius pedis cubici aquæ & gravitate solidi, invenire volumen partis immergendæ.*

RESOLUTIO.

Cum sit ut gravitas unius pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis ita pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per regulam trium invenitur.

E. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ est librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA 13.

106. *Datis gravitate & volumine solidi specifice levioris una cum gravitate fluidi specifice gravioris, invenire vim, qua illud sub hoc demersum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis ista æqualis est excessui ponderis fluidi sub eodem volumine, quod habet solidum submersum, supra pondus hujus (§. 99).

1. Ex datis volumine solidi & gravitate unius pedis cubici aquæ quæratur per regulam trium gravitas fluidi sub æquali volumine.
2. Inde subtrahatur pondus solidi, ita nimirum vis quæsita relinquetur.

E. gr. Quæritur, qua vi opus sit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, sub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64); pondus aquæ sub volumine 8 pedum est 560. Unde si subducatur pondus solidi 100, relinquitur vis ad detinendum solidum sub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus specifice levius eadem vi ascendit in fluido graviori, qua ad ascensum ejus impediendum opus est (§. 75 *Mechan.*); per præsens problema invenitur quoque vis, qua solidum specifice levius in fluido graviori ascendit.

PROBLEMA 14.

108. *Instrumentum construere, quo explorare licet, quantum salis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.



1. Ex tenui lamina cuprea construatur globus AB cum tubo BC ejus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.
2. Granula plumbea globo AB inducatur, donec instrumentum in D usque immergatur.
3. Pondus totius aquæ, in qua

qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum salis sit in ea dissolvendum, ut partem ponderis centesimam absolvat.



4. Postquam igitur tantum salis in aqua fuerit dissolutum, instrumentum denuo in ea mergatur noteturque punctum E, quod hæret in superficie aquæ salsæ. Ita nimirum constabit terminus immersionis in aqua, quæ sub volumine 100 librarum salis libram unam comprehendit.

5. Quodsi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immersionis in aqua, sub volumine 100 librarum duas, tres, quatuor &c. libras salis contineante; instrumento hoc explorare poteris quantum salis in aqua data contineatur.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim instrumentum in aqua salsa mergatur, statim apparebit, quot libræ salis in aqua salsa centum librarum contineantur. Quamobrem si pondus aquæ salsæ exploretur per regulam trium invenitur quantitas salis in ea dissoluti. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

109. *Ut problema præsens rectius intelligatur, exemplo sequente id illustrare libet. Sit gravitas aquæ puræ* 2000 *scrupulorum.* Divide 2000 *per* 99, *quotus* $20\frac{20}{99}$ *indicabit, quot scrupula salis in aqua dissolvenda, ut ponderis centesimam partem constituat.* Divide *ulterius* 2000 *per* 98, *quoti* $20\frac{40}{98}$ *duplum* $40\frac{80}{98}$ *indicat, quantum salis in aqua sit dissolvendum, ut sit* $\frac{2}{100}$ *totius ponderis.* Divide *similiter* 2000 *per* 97, *quoti* $20\frac{60}{97}$ *triplum* $61\frac{83}{97}$ *indicat, quantum salis in aqua dissolvi debeat, ut sit* $\frac{3}{100}$ *totius ponderis &c. Enimvero cum non sine tædio ad singula divisionum puncta invenienda aqua pura uti liceat; numerum sequentem continuo subduc a proximo præcedente, residuum enim indicabit, quantum adhuc salis sit addendum ad inveniendum punctum proxime sequens. E. gr. ubi in aqua dissolveris salis* $20\frac{20}{99}$ *pro inveniendo puncto E: ut alterum F reperiatur, addenda sunt insuper scrupula* $20\frac{3}{5}$ *fere, quæ est differentia inter* $20\frac{20}{99}$ *&* $40\frac{80}{98}$.

SCHOLION 2.



110. *Similia instrumenta ex vitro construi solent, tubo* BC *in partes æquales diviso & hermetice in* C *sigillato, globo vero geminato, ad examinandam fluidorum gravitatem specificam* (§. 95).

PROBLEMA 15.

111. *Data gravitate vasis ex materia specifice graviori parandi & gravitate fluidi specifice levioris, determinare cavitatem, quam habere debet, ut fluido supernatet.*

RESOLUTIO.

Cum detur pondus fluidi sub volumine unius pedis cubici *per hypoth.* volumen fluidi vasi pondere æqualis per regulam trium inveniri potest. Quodsi ergo cavitas paulo major fiat, vas sub eodem volumine minus ponderis continebit, quam fluidum, ideoque eodem specifice levius erit (§. 5), consequenter ipsi supernatabit (§. 94).

E. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ supernatans, cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici est 70 librarum, reperietur volumen aquæ 30 librarum 428″ 571‴, ideoque cubus diametri sphæræ 818925 (§. 552 *Geom.*): unde radix cubica extracta 9″ 3‴ est diameter sphæræ aqueæ 30 librarum. Quodsi ergo diameter cavitatis fiat paulo major e. gr. unius pedis, eo minor ipsius pars mergetur, quo major fuerit diameter.

PRO-

PROBLEMA 16.

112. *Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam ſpecifice leviori volumen habentis, cujus pondus datur.*

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque ſolidum ſpecifice gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi ſub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero ſpecifice leviori, quam fluidum, & maſſa utriuſque ſimul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque maſſa volumen habentis (*§. cit.*).
3. Quodſi itaque ab hoc pondere ſubducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore ſpecifice leviori volumen habentis.

E. gr. Si in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{5}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{5}$: reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis, 16 librarum.

THEOREMA 22.

113. *Vis, quæ requiritur ad vas vacuum* DFEG *ad lineam* AC *in aquam immergendum, ad quam aqua plenum immergitur, æquatur vi tantundem aquæ in aere ſuſtentanti.*



DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aere ſuſtentans gravitati ejus æqualis eſt. Sed vis, vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergens, æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eandem ad lineam AC vas immergit *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vaſe contentam in aere ſuſtentare valet.

THEOREMA 23.

114. *Vis, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, itemque pondus a ſolido graviori in fluido leviori amiſſum, gravitati fluidi accreſcit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, premit fluidum ſubjectum, ideoque perinde eſt, ac ſi maſſa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc maſſa utpote unum grave cum fluido conſtituens una cum eodem ponderat. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a ſolido ſpecifice graviori in fluido leviori amiſſa a fluido ſuſtentatur, ceu patet ex demonſtratione theorem. 14 (§. 55). Sed pondus, quod fluido incumbit, unum cum eodem totum conſtituit, ideoque perinde cum eo gravitare debet, ac ſi maſſa fluidi tantundem ponderans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

115. Hinc problema 13 (§. 106) etiam experimentando reſolvere licet.

COROLLARIUM 2.

116. Liquet etiam, vim nullam perdi, ſed tantum alio rſum impendi in corporum gravitatione.

SCHOLION.

117. *Præſens theorema, ſi volupe fuerit, non minus ac præcedentia omnia, experimentis facile comprobantur. Reſpondent experimenta in iſtiuſmodi materiis Examinibus arithmeticis, ut jam innuimus in Arithmetica Elementis* (§. 125).

THEOREMA 24.

118. *Si corpus ſpecifice levius quodam flui-*

fluido, cum corpore, quod eodem fluido ſpecifice gravius eſt, quomodocunque conjungatur, ut unum abſque altero moveri non poſſit, fueritque exceſſus ponderis fluidi iſtius ſupra pondus ſpecifice levioris ſub pari volumine, æqualis exceſſui ponderis ſpecifice gravioris ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine; corpora iſta ſimul ſumta eandem cum fluido gravitatem ſpecificam habent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim gravitas corporis ſpecifice gravioris tantum excedit gravitatem fluidi ſub eodem volumine, quantum gravitas fluidi excedit gravitatem corporis ſpecifice levioris ſub eodem volumine *per hypoth.* in volumine fluidi, quod voluminibus utriuſque corporis ſimul ſumtis æquale eſt, tantundem præciſe gravitatis ineſt, quanta eſt gravitas utriuſque corporis ſimul. Quamobrem cum corpora iſta ita conjuncta, ut unum abſque altero moveri non poſſit *per hypoth.* ideoque vi gravitatis ſuæ ſimul deorſum nitantur (§.4 *Mechan.*), conſequenter quoad gravitationem pro uno eodemque corpore haberi debeant; ſimul ſumta eandem cum fluido iſto gravitatem ſpecificam habent (§.5.6). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

119. Quia ſolidum ejuſdem gravitatis ſpecificæ cum fluido, in eodem totum ſubmergitur & datum intra fluidum locum ſervat (§. 98); corpora diverſæ gravitatis ſpecificæ inter ſe & cum fluido in hypotheſi theorematis tota ſimul in fluido demerguntur datumque intra ipſum locum ſervant, conſequenter nec aſcendunt, nec deſcendunt.

THEOREMA 25.

120. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice graviori demerſum detinens eſt ad gravitatem corporis ut exceſſus voluminis ſupra partem, qua in fluido iſto mergitur, ad hanc partem.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi in volumine corporis tantundem gravitatis contineretur, quantum in æquali volumine fluidi ineſt; totum in eodem ſubmergeretur & datum in eodem locum ſervaret vi nulla extrinſecus accedente (§. 98). Quare cum ſub volumine fluidi, quod parti immerſæ ſolidi æquale eſt, tantum gravitatis inſit, quantum per totum corpus diffunditur (§. 94); vis, quæ extrinſecus ſuperaccedere debet, ut ſolidum in dato loco intra fluidum detineatur, æqualis eſt gravitati fluidi per volumen diffuſæ, quod æquale eſt exceſſui corporis ſolidi integri ſupra partem, qua in fluido mergitur vi gravitatis propriæ. Enimvero in fluido tanquam gravi homogeneo gravitas eſt volumini proportionalis (§. 131 *Mech.*). Ergo vis ad corpus ſolidum in fluido ſpecifice graviori detinendum requiſita eſt ad gravitatem totius ſolidi uti exceſſus voluminis ſupra partem in eodem vi gravitatis propriæ immerſam ad hanc partem immerſam. *Q. e. d.*

THEOREMA 26.

121. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice graviori demerſum detinens eſt ad gravitatem corporis ut differentia gravitatum ſpecificarum fluidi atque ſolidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi ut volumen

men totius ſolidi ad partem ejus, qua in fluido vi gravitatis propriæ demergitur (§. 101). Ergo differentia gravitatum ſpecificarum fluidi & ſolidi eſt ad gravitatem ſpecificam ſolidi ut exceſſus voluminis ſolidi ſupra partem immerſam ad hanc ipſam partem (§. 193 *Arith.*). Quoniam itaque vis in fluido corpus ſpecifice levius demerſum detinens eſt ad gravitatem ejus ut exceſſus voluminis ſupra partem, qua vi gravitatis ſuæ in eodem demergitur, ad hanc ipſam partem (§. 120); erit etiam eadem vis ad gravitatem corporis ut differentia gravitatum ſpecificarum fluidi atque ſolidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 7.

122. *Dato pondere corporis fluido ſpecifice gravioris, una cum parte ejuſdem in fluido amiſſa, dataque ratione gravitatis ſpecificæ fluidi ac corporis alicujus ſpecifice levioris, invenire pondus ejuſdem, quod requiritur ut ſpecifice graviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Subtrahatur pars ponderis, quam corpus ſolidum ſpecifice gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato, ut relinquatur vis, quæ ſolidum intra fluidum in dato loco detinere poteſt (§. 75 *Mech.*).
2. Ex data gravitate ſpecifica fluidi & corporis ſpecifice levioris atque vi ad ſuſtentandum ſpecifice gravius intra fluidum modo reperta, ſeu, quod perinde eſt, ad detinendum ſpecifice levius a graviori requiſita inveſtigetur gravitas totius corporis ſpecifice levioris: quod vi theorematis præcedentis (§. 121) per regulam trium (§. 302 *Arith.*) reperiri poteſt. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM 1.

123. Quoniam ſolidum ejuſdem gravitatis ſpecificæ eſt cum fluido, quod datum intra fluidum locum ſervat (§. 98), cum ſpecifice gravius in eodem deſcendat (§. 88), ſpecifice levius aliqua tantum ſui parte mergatur (§. 94); per præſens problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido ſpecifice levius, alterum ſpecifice gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem ſpecificam habens.

COROLLARIUM 2.

124. Si pondus corporis ſpecifice levioris tantiſper augeatur; ſpecifice gravius ad ſuperficiem fluidi attollet.

SCHOLION.

125. *Theorema præſens cum ejus corollario etiam per theorema 24 (§. 118) demonſtrari poterat.*

THEOREMA 27.

126. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice leviori ſuſtentans eſt ad pondus ejuſdem ut differentia gravitatum ſpecificarum illius ac fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi ut pondus integrum ſolidi ad partem ejus in fluido amiſſam (§. 59). Quamobrem convertendo erit ut differentia gravitatum ſpecificarum ad ſpecificam gravitatem ſolidi, ita exceſſus ſolidi ſupra fluidum ad pondus ſolidi integrum (§. 193 *Arith.*). Eſt vero exceſſus ſolidi ſupra fluidum æqualis vi ad ſolidum intra fluidum ſuſtentan-

stentandum requisitæ (§. 89). Ergo hæc vis est ad pondus integrum solidi sustentandi ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem specificam solidi. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

127. *Datis gravitate & volumine solidi specifice levioris una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specifice gravioris, nec non gravitate specifica ejusdem fluidi & corporis solidi eodem specifice gravioris, invenire quantum hujus pondus esse debeat ut specifice leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in data quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex datis gravitate & volumine solidi specifice levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specifice gravioris inveniatur vis ad solidum in fluido demersum detinendum requisita (§. 106): quæ erit excessus ponderis solidi specifice gravioris supra pondus fluidi mole æqualis (§. 89). Unde

2. Ex data ratione gravitatum specificarum solidi specifice gravioris & fluidi atque vi ista seu excessu prædicto invenitur pondus solidi specifice gravioris cum leviori conjungendum, ut idem in fluido sustentet (§. 118). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quod si solidi specifice gravioris pondus tantisper augeatur; cum specifice leviori una descendet, seu specifice levius ad fundum secum abripiet.

SCHOLION.

129. *Non absimili modo plura alia problemata solvi possunt, quæ in philosophia experimentali & vita communi ac arte usum suum habere possunt.*

Finis Elementorum Hydrostaticæ.

ELE-

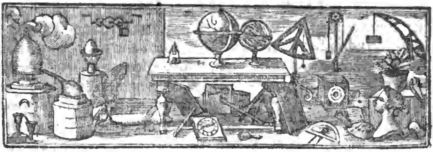
ELEMENTA AEROMETRIÆ.

PRÆFATIO.

A Multo jam tempore in more positum, ut Physicæ quædam capita in numerum disciplinarum Mathematicarum relata fuerint, postquam, facta ad experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ & Analyseos, hoc est, Matheseos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia sane de causa Hydrostatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Astronomia in numero isto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus aeris more Geometrarum & ex principiis Matheseos puræ demonstrari, demonstrata ad varios usus dextre applicari possint; anno 1709 numerum disciplinarum Mathematicarum augere animum induxi, editis Aerometriæ Elementis, quæ anno sequente 1710 in Tomo secundo Elementorum Matheseos Germanicorum Hydrosta-

droſtaticæ ſubjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto majori jure locum ſemel adeptum tuetur, quod Hydraulica jam dudum in Matheſin recepta in multis opem ejus imploret. Quemadmodum enim Aerometriæ facem præfert Hydroſtatica; ita Aerometria Hydraulicam illuſtrat. Antequam igitur ad Aerometriam animum appellas, Hydroſtaticæ dogmatibus eundem imbuas opus eſt. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aerometriam Tibi ſociam jungas e re tua omnino eſſe deprehendes. Jucundum vero eſt Aerometriæ ſtudium, idemque utiliſſimum, tum quod inde ratio plurimorum Naturæ phænomenorum deſumitur, tum quod variarum machinarum ac inſtrumentorum ſtructura in ea continetur. Ut brevitati conſulatur & ſequentia antecedentibus reſpondeant; non integra exhibeo Aerometriæ elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita eſſe modo memini, ſed quæ digniora reliquis viſa ſunt, in compendio exhibere & nonnullis augere conſtitui. Cæterum Aerometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris conſentientibus, iis potiſſimum commendo, quibus curæ cordique fuerit, ad experimenta applicare Matheſin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem conſequantur ex animo precor.

ELE-



ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT I.

De Principiis Aerometriæ.

DEFINITIO 1.

1. A*Erometria* est scientia metiendi aerem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem sit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam investigare (§. 23 *Geom.*); in Aerometria tradendæ sunt leges, juxta quas omnia de aere conceptibilia & extensionis terminos vel intensitatis gradus habentia accurate determinari possunt.

DEFINITIO 2.

3. *Aer* est corpus fluidum Telluri circumfusum & spatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, nisi impediatur.

SCHOLION.

4. *Definitionem aeris nonnisi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuisse notam, aere præsente semper obviam, ex qua ejus præsentia certo colligi potest.*

DEFINITIO 3.

5. *Compressio* est coarctatio massæ in minus volumen per impulsum aut pressuram alterius corporis facta.

DEFINITIO 4.

6. *Condensatio* est coarctatio massæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO 5.

7. *Dilatatio* est expansio massæ in majus volumen, quam, facta compressione, habuerat.

DEFINITIO 6.

8. *Rarefactio* est expansio massæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO 7.

9. *Elater aeris* est vis, qua vi comprimente sublata, dilatatur.

AXIOMA 1.

10. *Quo corpus est gravius, eo magis premit alia sibi subjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione gravitatis* (§. 4 Mech.). *Corpus scilicet vi gravitatis nititur deorsum, ideoque premit alterum descensui resistens. Quo majore itaque vi deorsum nititur, eo magis quoque premit alterum sibi subjectum.*

AXIOMA 2.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem est, elater quoque immutatus sit necesse est: quodsi vero elater majorem dilatationem produxerit, crevisse; sin minorem, decrevisse censendus est.*

EXPERIENTIA 1.

13. *Promove celeriter manum per spatia, quæ vacua esse videntur, faciem versus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipsam non contingat.*

COROLLARIUM.

14. Necesse est ideo, ut interstitia inter corpora terrestria, quæ vacua esse videntur, materia quadam repleantur, cujus partes sint admodum subtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod subtilissimum occupat (§. 3 *Hydrostat.*), hoc est, aer datur (§. 3).

EXPERIENTIA 2.

15. *Globo cupreo aut orichalceo satis capaci afferruminetur epistomium cum cochlea fœmina, ita ut syrinx mediante cochlea mari ad arbitrium ei adaptari rursusque removeri possit. Quodsi ope syringis plus aeris in globum intrudas, eumque clauso epistomio bilanci imponas, pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epistomium rursus aperies, aerem erumpere animadvertes, & globus metallicus recuperabit pondus, quod ante intrusionem aeris habuerat.*

SCHOLION.

16. *Experimentum hoc cogitavit* Galilæus Galilæi, *lagena vitrea usus* (a); *sed cum vasa vitrea ab aere compresso facile, nec sine periculo adstantium frangantur, ego metallico uti soleo, in gratiam curiosorum idem repetens.*

COROLLARIUM 1.

17. Quoniam in globum metallicum plus aeris intrudi potest, quam ordinarie capit; evidens est, aerem in minus volumen coarctari posse, quam ordinarie occupat. Comprimi ergo potest (§. 5).

COROLLARIUM 2.

18. Cum, epistomio aperto, aer rursus egrediatur, ipsoque egresso pondus pristinum recuperet globus, quod ante compressionem aeris in ipso factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præcise aeris rursus egressum, quantum intrusum fuerat. Aer itaque compressus ad pristinam expansionem redit, si vis comprimens aut expansioni resistens removeatur, ideoque elatere gaudet (§. 9).

COROLLARIUM 3.

19. Certum itaque compressionis indicium est, quod aer intra vas quoddam magis compressus sit, quam externus, si orificio ejus aperto, cæteris paribus, aeris quædam portio egredi observetur.

COROLLARIUM 4.

20. Denique, quia pondus vasis augetur, si aer intra ipsum comprimitur; massa aerea nisum exerceat opus est deorsum juxta lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 *Mechan.*). Gravis ergo existit (§. 4 *Mechan.*).

COROLLARIUM 5.

21. Premit ergo corpora subjecta secundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 *Mechan.*).

EXPERIENTIA 3.

22. *Quodsi vesicam aere mediocriter repletam firmiterque constrictam ad ignem admoveas; ea non solum distenditur, sed & ingenti prorsus fragore tandem disrumpitur. Quodsi vero eam ab igne removeas antequam disrumpatur, statim flaccida evadit.*

COROLLARIUM 1.

23. Cum intra vesicam nil nisi pauculum aeris contentum fuerit; expansio vesicæ expansionem aeris inclusi arguit. Aer itaque rarefit (§. 8).

COROLLARIUM 2.

24. Quia calore expirato vesica distensa rursus flaccida fit; frigore in volumen minus rursus coarctatur, ideoque condensatur (§. 6).

(a) Mechan. Dialog. 1. p. m. 78.

EXPE-

EXPERIENTIA 4.

25. *Si aer in vase comprimatur; ejus quandam portionem aperto orificio ex ipso iterum exspirare notabis in quacunque orificii directione.*

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aeris nititur quaquaversus secundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA 5.

27. *Si tubum oblongum* AB, *cujus altitudo* 32 *pedibus Rhenanis major, in* C *epistomio instructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius* A *in aquam immergas & aperto orificio* B *epistomium aperias; aqua tota cum impetu effluit: si vero obturato orificio* B *epistomium* C *recludas; aqua usque ad* D *descendit, ac in altitudine* 31 *circiter pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vase* GH *contentæ pendula hæret.*



COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendula aquam in vasculo sibi subjectam premit, nec tamen descendit; necesse est, ut, si aqua in vasculo contenta in istiusmodi columnas divisa concipiatur, qualis est, quæ tubo AB subjacet, singulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum superficiei aquæ incumbit aer (§. 3) eamque premit (§. 21). Columna igitur aerea a superficie aquæ in vasculo contentæ usque ad extremitatem atmosphæræ extensa eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo super eadem basi, sed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. 36 *Hydrost.*).

SCHOLION.

29. *Hoc æquilibrium aeris cum aqua primus observavit hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra* 18 *cubitos attolli non posse miratus, atque cum* Galilæo *phænomenon insperatum communicavit ipse causam ejus ignorans* (a). *Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter* Mariottus (b) *altitudinem aquæ in tubo pendula reperit* 32 *pedum Parisiensium.* Evangelista Torricellus, *discipulus* Galilæi, *aquæ substituit Mercurium, cujus altitudo, utpote quatuordecies gravioris aqua, reperitur* 28 *circiter digitorum Rhenanorum* (§. 36 Hydrost.).

CAPUT II.

De Elatere & Gravitate Aeris.

THEOREMA 1.

30. *Elater aeris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis.*

DEMONSTRATIO.

Aer enim superior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo elater aeris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

31. Quoniam pondus aeris superioris inferiori incum-

(a) Mechan. Dial. 1. p. m. 15. 16.
(b) Trait. du mouvement des Eaux part. 2. disc. 1. p. 9.

incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aeris basis sed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ Mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aeris inferioris eidem columnæ aqueæ vel mercuriali æquatur.

SCHOLION.

32. *Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus imposterum brevitatis gratia* pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM 2.

33. Elater aeris inclusi, si cætera cum ambiente externo paria sint, æquatur similiter ponderi totius superioris incumbentis.

COROLLARIUM 3.

34. Inclusus igitur aer eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM 4.

35. Ergo etiam hic Mercurium ad altitudinem 28 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo suspendit (§. 28. 29).

THEOREMA 2.

36. *Si vas aliquod ab aere vacuum prope Tellurem aperiatur; aer ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet eamque replebit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim aer in statu compressionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expansionem nititur (§. 9) & quidem quaquaversus (§. 26). Quare cum intra vas vacuum nisui huic nihil resistat, expansio per cavitatem vasis actu sequetur (§. 75 *Mechan.*). Et quia si aliquod spatium vacuum intra cavitatem vasis ab aere irruente non occupatum supponamus, illud instar vasis vacui intra aerem aperti considerari potest, aer in vas irruens etiam hoc spatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aere vacuum prope tellurem aperiatur; aer ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo syrinx orificio alicujus vasis firmiter infigatur & embolus postea extrahatur; aer in vase contentus per siphonia cavitatem expandetur.

DEFINITIO 8.

38. *Antlia pneumatica* est machina, qua mediante aer ex vasis educi potest.

SCHOLION.

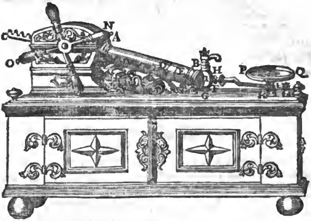
39. *Primus antliæ pneumaticæ inventor est* Otto de Guericke, *Consul Magdeburgicus, qui experimenta sua jam sub finem comitiorum imperialium anno 1654 Ratisbonæ celebratorum in præsentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit* (a). *Unde vero inter exteros non desint, qui laudem inventionis* Roberto Boylio, *experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis* Robertus Hookius, *recensente* Cl. Wallero (b), *& ex Gallis*, Johannes Baptista du Hamel *variis scriptis celebris* (c); *ipse tamen* Boylius *pro eo, qui decet virum doctum, candore* (d) *agnoscit, quod* Otto de Guericke *ipsum prævenerit, quodque ipse ab iis, quæ* Casparus Schottus *in Mechanica Hydraulico-pneumatica Anno 1657 edita de vasis vitreis a* Guerickio *ab aere evacuatis publicaverat, ad sua experimenta & antliæ pneumaticæ constructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipse* Guerickius (e): *aliud artificium embolum extrahendi applicuit* Boylius, *quo nunc ordinarie utuntur. Recentius structuram antliæ pneumaticæ immutavit* Haucksbejus, *Mechanicus Anglus, cujus formam describit* Cel. Gravesandius (f), *ipseque inventor delineat* (g).

PROBLEMA 1.

40. *Antliam pneumaticam construere.*

RESO-

(a) Vid. Præfatio ad Experimenta nova Magdeburgica.
(b) In vita Hookii operibus ejus posthumis præmissa f. 5.
(c) In Philos. Vet. & Nov. Tom. 4. Phys. gener. Tract. 2. dissert. 3. cap. 10. p. m. 234.
(d) In præf. ad Nova Experim. Phys. Mech. de vi aeris elastica p. m. 3.
(e) L. c. f.
(f) In Element. Physicæ Mathematicis Tom. 1. lib. 2. cap. 6 pag. 109 edit. sec.
(g) Physica Mechanical. Experiments p. 1. & seqq.



RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus AB ex orichalco, intus cavus & satis capax, cujus interior superficies optime polita, ut embolus DE arctissime ipsam undique contingat, ne ulli moleculæ aereæ inter eam & embolum locus relinquatur.
2. Embolus constare debet ex orbibus coriaceis firmiter sibi mutuo appressis mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum est bubulum, ex quo succingula militum parari solent. Probe autem notandum est, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis suillæ excoctæ permixtum, ne successu temporis indurescat.
3. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ manubrio NO versatò commode extrahi ac intrudi possit.
4. In B afferruminetur basi cylindri tubulus BFKL cum epistomio GHI ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico solido I composito.
5. Denique tubulus KL in L instruatur cochlea, ut vasa, quorum orificia cochleis fœminis seu matricibus instructa, ad eundem firmari possint. Eodem modo adaptandus est, quoties usus postulat, catinus orichalceus PQ, cui vitra campaniformia commode imponere liceat.

Dico ex vasis ad hanc machinam firmatis aerem educi posse.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur epistomio versus antliam AB & tubulum KL aperto, aer in vase contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavitatem expanditur (§.36). Quodsi jam epistomium claudatur versus tubulum KL, sit tamen apertum versus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rursus intrudatur; aer per epistomium FH extruditur, consequenter

aeris

aeris aliqua portio ex vase educta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aeris ex vase educitur. Ope ideo machinæ constructæ aer ex vasis educi potest. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

41. *In usu antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini & fundo catini orbem corinceum bubulum (quali ad constructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum esse, ut embolus facile extrahatur & antliam undique arctissime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.*

SCHOLION 2.

42. *In evacuandis vasis rationem habendam esse tantum vis elasticæ, ad quam solam in demonstratione respeximus, experimenta probant. Aerem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri, docet expansio vesicæ sub campana suspensæ, firmiter constricto collo & nonnisi pauculo aeris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Actis Lipsiensibus* (a) *ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochlea afferruminatum, ut ad antliam firmari posset, atque fornicem vasis evacuandi fere attingentem. Quantum per hunc tubum aeris facta qualibet emboli agitatione ex vase educeretur, maxima cum circumspectione notavi: embolo enim intruso, donec aer in antlia contentus eandem cum externo densitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conspiciendos. Mox tubo isto remoto, evacuationem ejusdem vasis denuo tentavi: quam eadem prorsus ratione ut antea contingere didici. Usus autem sum vasis & majoribus, & minoribus eodem semper successu, estque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Romanorum. Quoniam vero doctissimis Diarii Trevoltiensis collectoribus* (b), *quorum erga me humanitatem ut gratus prædicem fas est, hoc experimentum non sufficere visum est ad vim gravitatis ab evacuatione vasorum excludendam; ideo* (§. 47) *mox ex natura elateris id demonstrabimus, ut in Aerometria Anno* 1709 *edita. Caterum hæc ratio est, cur antlia situ ad horizontem inclinatus esse possit, nec opus sit, ut, quod post* Guerickium *etiam* Boylius *& nuper* Hauksbejus *fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.*

SCHOLION 3.

43. *Aliud antliæ genus ex duplici cylindro construxit experimentator industrius* Franciscus Hauksbee, *cujus descriptionem exhibent Actorum Eruditorum collectores* (c). *Eam pro more suo in multis immutavit* Leupoldus *variis inventionibus mechanicis celebris* (d). *Sed cum in comprimendo aere usus ejus sit nullus, qui tamen in experimentis frequens esse solet, nec vasa tam exacte evacuari posse videantur, quam antlia ordinaria utendo: ideo antiquum antliæ genus huic recentiori præferendum esse judico, nisi accedat medela.*

THEOREMA 3.

44. *Aer Telluri circumfunditur, nec uno in loco altior esse potest quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aer enim, qui jam in Tellure adest (§. 14), aut Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus posterius. Dabitur ergo super aliqua Telluris parte spatium ab aere vacuum. Jam cum aer vacuo huic contiguus existat, per spatium illud expandetur (§. 36). Impossibile igitur, ut intra aerem sit spatium aliquod ab aere vacuum. Tale vero cum necessarium foret ob rotunditatem Telluris, nisi aer eam undique ambiret; necesse est aerem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quodsi ponamus aerem uno in loco esse altiorem, quam in altero; aer vacuo contiguus statim expandetur (§. 36), ideoque non quiescet nisi undique eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

45. Quare si cætera sint paria, duobus corporibus eandem basin habentibus in æqualibus a centro Terræ distantiis æqualia atmosphæræ pondera incumbunt, ideoque ab aere incumbente æqualiter premuntur (§. 42 *Hydrost.*).

COROLLARIUM 2.

46. In æqualibus itaque a centro terræ distantiis, si cætera fuerint paria, aer eandem densitatem

(a) Anno 1710. mens. Jun. pag. 14.
(b) Memoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts. Aout. 1711. art. 120. pag. 1404.

(c) Supplem. Tom. V. Sect. 9. pag. 4°3. Confer Auctores [illegible] not. f & g pag. 284.
(d) Acta Erudit. Anno 1713. pag. 95.

tatem habet, ideoque sub æqualibus voluminibus massas æquales continet (§. 8 *Hydrost.*), consequenter æqualia volumina ejusdem gravitatis existunt.

THEOREMA 4.

47. ***In eodem vase vel etiam in vasis communicantibus aer ubique eandem densitatem habet, si cætera paria fuerint.***

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet densitatem, aut non. Ponamus aerem in vase uno esse rariorem, in altero densiorem. Illius ergo densitas per pressuram minoris ponderis producetur, hujus per pressuram majoris. Ast elater aeris æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo in aere rariore minor vis elastica, quam in densiore. Quare cum aer uterque vi elateris quaquaversus sese expandere nitatur (§. 26); majore vi aer densior nititur versus rariorem, quam rarior versus densiorem. Ergo rarior cedet densiori (§. 75 *Mechan.*). Comprimetur ergo ab elatere densioris (§. 5) & densior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aeri in utroque vase quies, nisi nisus aeris utrinque fuerint idem (§. 75 *Mechan.*), hoc est, nisi eandem densitatem habuerit, *per demonstrata*. Si igitur aer in utroque vase eandem densitatem non habuerit, cæteraque paria fuerint, ad eandem statim reducetur. In vasis igitur communicantibus, ideoque multo magis in eodem, ceteris paribus, aer ubique eandem densitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

48. Quare si embolo ex antlia extracto aer ex vase ad ipsam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem antliæ replet cum eo, qui in vase evacuando residuus, densitatem eandem habet.

COROLLARIUM 2.

49. Est ergo massa aeris intra cavitatem antliæ contenti ad massam aeris in vase evacuando residui ut capacitas antliæ ad capacitatem vasis (§. 17 *Hydrost.*).

THEOREMA 5.

50. ***In vase, quod per antliam evacuatur, semper est aer primitivus ad aerem residuum, ut aggregatum ex capacitate vasis & antliæ ad eam dignitatem elevatum, cujus exponens æquatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam.***

DEMONSTRATIO.

Dicatur aer a prima agitatione emboli residuus *aer residuus primus*; qui a secunda emboli agitatione restat, *aer residuus secundus* & ita porro.

Quoniam aer in vase contentus est ad aerem in antlia contentum ut capacitas vasis ad capacitatem antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aere in vase & ex aere in antlia contento, hoc est, aer primitivus, ad aerem in solo vase contentum, hoc est, residuum primum, ut aggregatum ex capacitate vasis & antliæ ad capacitatem vasis solius (§. 190 *Arith.*). Similiter demonstratur, esse quantitatem aeris residui primi ad quantitatem residui secundi ut aggregatum ex capacitate vasis & antliæ ad capacitatem vasis solius; & in eadem ratione esse quantitatem aeris residui tertii &c. Ergo factum ex aere primitivo in residuum primum, secundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aere residuo primo in secundum,

dum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vasis & antliæ junctim toties in se ducta emergens, quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vasis solius æquemultoties itidem in se ducta enascens (§. 213 *Arith.*), hoc est, ut dignitas aggregati ex capacitate vasis & antliæ junctim, cujus exponens est numerus agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam (§. 250 *Arith.*), consequenter aer primitivus ad residuum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

51. *Dato numero agitationum emboli in antlia factarum una cum capacitate vasis & capacitate antliæ, invenire rationem aeris primitivi ad residuum.*

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vasis & capacitate antliæ una cum logarithmo capacitatis vasis solius.
2. Logarithmus posterior e priori auferatur &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus, cui in tabulis respondet numerus indicans, quoties aer primitivus contineat residuum quæsitum.

E. gr. Sit capacitas antliæ 580″, capacitas vasis 460″; erit aggregatum ex utraque 1040″. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aer primitivus ad residuum 6 (3.0170333 — 2.6627578) = 2.1256530, cui in tabulis prope respondet numerus 134. Est igitur aer primitivus ad residuum ut 134 ad 1.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas vasis $= v$, capacitas antliæ & vasis simul $= a$, numerus agitationum emboli $= n$, aer residuus $= 1$. Quoniam aer primitivus ad residuum ut a^n ad v^n (§ 50); erit etiam primitivus ad residuum ut $\frac{a^n}{v^n}$ ad 1 (§. 181 *Arith.*), consequenter si residuus 1, logarithmus primitivi est $n(la - lv)$ (§. 341. 343 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

52. *Data capacitate vasis evacuandi & capacitate antliæ, invenire numerum agitationum emboli ad aerem in data ratione dilatandum requisitum.*

RESOLUTIO.

1. Excerpantur ex Canone logarithmorum logarithmi aeris primitivi, aeris residui, capacitatis vasis & aggregati ex capacitate vasis & capacitate antliæ.
2. Logarithmus aeris residui subducatur ex logarithmo aeris primitivi, similiter logarithmus capacitatis vasis auferatur ex logarithmo aggregati ex capacitate vasis & capacitate antliæ.
3. Differentia prior dividatur per alteram. Dico, quotum esse numerum agitationum emboli quæsitum.

E. gr. Sit capacitas antliæ 580″, capacitas vasis 460″, aer primitivus ad residuum ut 134 ad 1: reperietur numerus agitationum emboli (2.1271048 — 0.0000000) : (3.0170333 — 2.6627578) = 21271048 : 3542755 = 6 fere.

DE-

Demonstratio.

Sit aer primitivus p, residuus r, reliqua sint ut in demonstratione problematis præcedentis: erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nla - nlv \quad (\text{§. } 341.\ 343\ \textit{Arith.})$$
$$(lp - lr) : (la - lv) = n. \quad \textit{Q.e.d.}$$

Problema 4.

53. *Data ratione aeris primitivi ad residuum una cum capacitate vasis & numero agitationum emboli, invenire capacitatem antliæ.*

Resolutio.

Sit aer primitivus ad residuum $= p : r$, capacitas vasis $= v$, capacitas antliæ $= x$, numerus agitationum emboli $= n$; erit

$$p : r = (v + x)^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nl(v + x) - nlv \quad (\text{§. } 341.\ 343\ \textit{Arith.})$$
$$lv + (lp - lr) : n = l(v + x)$$

Inveniri igitur potest logarithmus aggregati ex capacitate vasis & antliæ, consequenter ipsum hoc aggregatum. Quare si hinc auferatur capacitas vasis, relinquetur capacitas antliæ.

E. gr. Sit $p : r = 134 : 1$, $v = 460''$, $n = 6$; erit $l(v + x) = 2.6627578 + (2.1271048 - 0.0000000) : 6 = 2.6627578 + 3545174 = 3.0172752$. Ergo vi Canonis $v + x = 1040''$, consequenter $x = 580''$.

Theorema 6.

54. *Numeri agitationum emboli, quibus ope duarum antliarum in eodem vase vel æqualibus vasis aer ad eandem rationem cum aere primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum Logarithmi vasis a Logarithmis aggregatorum ex capacitate vasis & capacitate antliarum.*

Demonstratio.

Sit ratio aeris primitivi ad residuum $= p : r$, capacitas vasis $= v$, antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aeris primitivi ad residuum in evacuatione per utramque antliam facta eadem *per hypoth.* si numeri agitationum emboli fuerint m & n; erit $(v + A)^m : v^m = p : r$ & $(v + a)^n : v^n = p : r$ (§. 50), consequenter $(v + A)^m : v^m = (v + a)^n : v^n$ (§. 167 *Arith.*). Habemus itaque $ml(v + A) - mlv = nl(v + a) - nlv$ (§. 341. 343 *Arith.*), consequenter $m : n = l(v + a) - lv : l(v + A) - lv$, hoc est, numeri agitationum emboli, quibus aer in eodem vase ope diversarum antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vasis & aggregati ex vase & antlia. *Q.e.d.*

Corollarium.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vase quodam dato ope antliæ datæ aer residuus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorsus educitur, inveniri potest numerus agitationum emboli, quibus ope alterius antliæ datæ in eodem vase aer residuus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorsus educitur.

Problema 5.

56. *Invenire pondus unius pedis cubici aerei.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.



1. Vasis vitrei aut metallici BC satis capacis, figura sphærica, collo oblongo AB & epistomio D præditi pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aere ejusdem cum ambiente externo densitatis repletur. Quo facto
2. educatur aer (§. 40) &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. A pondere priore subductum relinquit pondus aeris educti.
5. Investigetur capacitas vasis (§. 556 *Geom.*) & ratio aeris residui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aeris residui per regulam trium innotescet, a capacitate vasis subducendum, ut relinquatur volumen aeris educti. Quodsi antlia accurate fuerit constructa & tamdiu exerceatur, quamdiu aer evacuatur; volumen aeris residui tantillum reperietur, ut tuto negligi, ipsaque capacitas vasis pro volumine aeris educti assumi possit.
6. Datis ideo pondere atque volumine aeris educti per regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aeris (§. 130 *Mechan.*).

SCHOLION.

57. *Methodo hac primum usus* Otto de Guericke (a) & *post eum* Burcherus de Volder, *qui sequentia annotavit* (b). *Pondus vasis sphærici vitrei aere admisso erat 7 lib. 1 Unc. 2 dr. 48 gr. aere educto 7 libr. 1 Unc. 1 dr. 31 gr. aqua admissa 16. libr. 12 Unc. 7 dr. 14 gr. Erat igitur pondus aeris 1. dr. 17 gr. seu 77 gr. pondus aquæ 9 lib. 11 Unc. 5. dr. 43 gr. seu 74743 gr. consequenter ratio gravitatis specificæ inter aquam & aerem* 74743 : 77 = 970 $\frac{53}{77}$: 1. *Jam cum* Volderus *pedem cubicum aquæ deprehendisset 64 librarum, inferendo ut 970 ad 1 ita 64 libræ seu 1024 unc. ad numerum quartum proportionalem, per regulam trium pondus unius pedis cubici aerei* 506 $\frac{70}{97}$ *seu 507 gr. fere, hoc est 1 Unc. 0 dr. 27 gr. reperit. Testatur autem, se usum esse bilance, quæ, etiamsi vel 25 aut 30 libræ utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtove, in hanc illamve partem manifeste propenderet.*

PROBLEMA 6.

58. *Dato corporis cujuscunque volumine una cum pondere ejusdem in aere, invenire pondus ejusdem in vacuo.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aeris (§. 56).
2. Per regulam trium ex eodem & volumine corporis dati investigetur pondus aeris mole huic æqualis (§. 130 *Mechan.*).
3. Pondus hoc aeris addatur ponderi corporis dato; summa erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55 *Hydrost.*). *Q. e. i. & d.*

E. gr. Pondus unius pedis cubici aerei est 507 gr. (§. 57), pondus trium pedum cubicorum aquæ 210 librarum (§. 64 *Hydrost.*). Pondus trium pedum cubicorum aeris reperitur 1521 gr. seu 3 unc. 1 dr. 21 gr. Pondus igitur trium pedum cubicorum aquæ in vacuo 210 lib. 3 unc. 1 dr. 21 gr.

PRO-

(a) Experiment. de Vacuo lib. 3. cap. 21. f. 101.
(b) In Quæstionibus Academicis de aeris gravitate thes. 30. pag. 35. & seqq.

PROBLEMA 7.

59. *Data basi columnæ atmosphæricæ invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Basis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipsi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ (§. 539. 541 *Geom.*).
2. Quæratur ad volumina unius pedis cubici & columnæ illius atque pondus unius pedis cubici aquæ numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmosphæricæ æquiponderantis (§. 130 *Mechan.*), hoc est, pondus ipsius columnæ atmosphæricæ quæsitum.

E. gr. Sit diameter circuli 100‴, erit area 7850‴ (§. 429 *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100‴ (§. 27); erit volumen ejus 24335‴, consequenter, cum 1000″ sint 70 fere librarum (§. 64 *Hydrost.*), pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ seu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque, cujus diameter unius pedis, ab aere eadem vi premitur, ac si pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

60. Quodsi diameter sphæræ fuerit unius pedis; basis columnæ atmosphæricæ incumbentis est circulus, cujus diameter unius pedis. Quare cum hemisphærium inferius ab elatere aeris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemisphæria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA 7.

61. *Diversa plana premuntur ab aere in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Pressio enim eadem, quæ foret, si aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana subjecta gravitaret (§. 28), consequenter pressiones diversorum planorum ab aere factæ sunt in ratione planorum istorum (§. 573 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

62. Quare si plana, quæ ab aere premuntur, fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

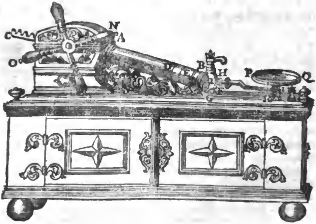
63. Quoniam aer premit secundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), superficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quomodocunque composita eadem premitur vi, qua premitur planum horizontale eidem subjectum, consequenter pressiones superficierum quarumcunque sunt ut plana horizontalia iisdem subjecta.

SCHOLION.

64. *In hypothesi propositionis tacite supponitur situm planorum esse horizontalem: ex demonstratione autem apparet theorema cum suis corollariis ad omnem pressionem a fluido gravi factam extendi posse.*

CAPUT III.

De Compressione Aeris.



PROBLEMA 8.

65. **A***Erem intra vas comprimere.*

RESOLUTIO.

1. Epistomio IHG respectu vasis clauso, respectu antliæ vero aperto, embolus ex antlia pneumatica extrahatur: quo facto aer externus in cavitatem antliæ ruet (§. 36).
2. Converso epistomio, ita ut communicatio inter vas & cylindrum detur, superius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur: aer ex antlia in vas expelletur, quod cum jam aere alio sit plenum, novum intrusum recipere nequit, nisi facta utriusque compressione (§. 5). Excipiet vero hospitio suo adventantem hunc hospitem, cum comprimi possit (§. 17).
3. Repetita igitur hac operatione, aer continuo magis magisque comprimitur. *Q. e. f.*

THEOREMA 8.

66. *Aer primitivus est ad aerem in vase ope antliæ pneumaticæ dato agitationum emboli numero compressum, ut capacitas vasis ad aggregatum ex capacitate vasis & facto capacitatis antliæ in numerum agitationum emboli.*

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliæ $= a$, capacitas vasis $= v$, numerus agitationum emboli $= n$. Erit aer primitivus in antlia ad aerem in vase ut a ad v (§. 17 *Hydrost.*). Incrementum igitur massæ in vase, dato numero agitationum emboli n est ut na, consequenter aer compressus ut $na + v$. Unde primitivus ad compressum ut v ad $na + v$. *Q. e. d.*

67. Data

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate antliæ 580 & capacitate vasis 290, seu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aeris compressi ad primitivum ut 6 + 1 ad 1 seu ut 7 ad 1.

PROBLEMA 9.

68. *Data ratione aeris primitivi ad compressum una cum ratione capacitatis antliæ ad capacitatem vasis, invenire numerum agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.*

RESOLUTIO.

Sit ratio aeris primitivi ad compressum $= p:c$, ratio antliæ ad vas $= a:v$, numerus agitationum emboli $= x$, erit (§. 66)

$$p:c = v:ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv):pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis dividatur per factum ex aere primitivo in capacitatem antliæ; quotus est numerus agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.

Sit e. gr. $p = 1$, $c = 7$, $v = 1$, $a = 2$; erit $x = 6:2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodsi fiat $p = v$, erit $x = (c - p)v:av = (c - p):a$, hoc est, numerus agitationum emboli invenitur, si differentia aeris primitivi a compresso per capacitatem antliæ dividatur. Ita in nostro exemplo $x = (7 - 1):2 = 3$.

PROBLEMA 10.

70. *Data capacitate vasis, in quo aer comprimendus, una cum ratione, quam aer primitivus ad compressum habere debet, & numero agitationum emboli, quibus ista compressio effici jubetur, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit capacitas vasis $= v$, aer primitivus $= p$, compressus $= c$, numerus agitationum emboli $= n$, capacitas antliæ $= x$, erit (§. 66)

$$p:c = v:nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv):pn = x$$

Quodsi fiat $p = v$; erit $x = (c - p):n$.

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis dividatur per factum ex aere primitivo in numerum agitationum emboli compressionem efficientium, quotus erit capacitas antliæ quæsita. Quodsi aer primitivus fuerit ut capacitas vasis; ejus a compresso differentia tantum dividenda est per numerum agitationum emboli.

Sit e. gr. $v = 290$, $p:c = 1:7$, $n = 3$; erit $x = 6 \cdot 290 : 3 = 2 \cdot 290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Est ergo $pn : c - p = v : x$, hoc est, capacitas vasis ad capacitatem antliæ est in ratione composita aeris primitivi ad ejus a compresso differentiam, & numeri agitationum emboli, quibus ista compressio efficitur, ad unitatem (§. 159 *Arith.*).

PROBLEMA 11.

72. *Invenire, utrum aer comprimatur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.



1. Assumatur tubus recurvus ABEC cujus brachium minus EC sit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.
2. Brachium minus EC hermetico sigilletur in C, majus in A sit apertum: utrumque in particulas æquales dividatur.
3. Pars tubi BE Mercurio repleatur, ita ut CE sit aere primitivo plenus.
4. Hinc ulterius per orificium A successive plus Mercurii infundatur, notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio

Mer-

Mercurius successive infusus pertingit.

Dico, si successive fuerint spatia in brachio minore super Mercurio reciproce ut differentiæ altitudinum, ad quas in brachio majore Mercurius successive subsistit, 28 digitis auctarum, & altitudinum, ad quas in minore Mercurius ascendit, aerem comprimi in ratione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aer in brachio minore CE a pondere atmosphærico comprimitur (§. 21), quod æquatur cylindro Mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium basium sint ut altitudines (§. 573 *Geom.*); tum volumina aeris reducti sunt ut altitudines spatiorum a Mercurio vacuorum in brachio minore EC, tum volumina Mercurii in brachio majore sunt ut altitudines, ad quas Mercurius ascendit. In aerem vero minori brachio inclusum præter pondus atmosphæricum volumina Mercurii gravitant, quorum altitudo est differentia inter altitudines, ad quas in brachio minore, & altitudines, ad quas in majore successive pertingit (§. 34 *Hydrost.*). Quare pondera aerem inclusum comprimentia sunt ut differentiæ altitudinum, ad quas successive in brachio minore Mercurius ascendit, ab altitudinibus, ad quas in majore successive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18 *Hydrost.*). Quod ideo volumina aeris successive compressi in eadem ratione reciproca deprehendantur; aer omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*



COROLLARIUM.

73. *Mariottus* (a) notavit, Mercurium in brachio majore AB 8 pedum ad altitudinem 18 digitorum ascendentem in minore 12 digitorum ad 4 digitorum altitudinem substitisse. Aeris itaque volumen cum a solo pondere atmosphærico premeretur, erat 12 digitorum; ast cum aer premeretur a pondere atmosphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc est, a pondere mercuriali 42 digitorum, erat volumen compressi 8 digitorum. Est vero 8 ad 12 ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, si in brachio minore Mercurius ad altitudinem 6 digitorum assurgat, altitudinem in majore esse 34. Volumen ergo aeris compressi est 6 digitorum, hoc est, subduplum ejus, quod habebat aer a solo pondere atmosphærico pressus. Ast pondus premens est 28 + 28, hoc est, duplum ponderis atmosphærici. Porro advertit, si altitudo Mercurii in brachio minore sit 9 digitorum, altitudinem in majore esse 93. Est itaque volumen aeris compressi 3 digitorum, hoc est, subquadruplum ejus, quod habebat a solo pondere atmosphærico compressus. Sed pondus premens tum est 84 + 28, hoc est, quadruplum ponderis atmosphærici. Evidens ergo per experimentum *Mariotti*, volumina aeris compressi esse reciproce ut pondera comprimentia.

SCHOLION I.

74. *Idem experimentum succedit, si diameter brachii minoris* CE *multo major fuerit diametro majoris* AB (§. 34 Hydrost.): *curandum tamen, ut amplitudo illius sit uniformis, cum in demonstratione supponamus, partes quantaslibet tubi* CE *esse cylindros æqualium basium.*

SCHOLION 2.

75. *Probe autem notandum est, præter pondera comprimentia in voluminibus aeris, quæ inter se comparantur, cætera omnia paria esse debere, cavendumque, ne eandem compressionis legem ad diversa aeris volumina applicemus, in quibus præter pondera comprimentia aliarum quoque aerem alterantium datur disparitas: quoniam hoc in casu fieri potest, ut elateris in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem densitatis vires sint inæquales, ideoque*

(a) Essay de la Nature de l'Air p. 17. & seqq. f. Operum in Batavia recusorum t. 1. p. 153.

que & pondera compreſſionem aeris in utroque efficientia ſint inæqualia (§. 553 Mech.), *conſequenter & iſta volumina aeris æqualia ab iiſdem ponderibus inæqualiter comprimantur. E. gr. Ponemus duo volumina aeris, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens eſt, quod paria pondera ſuſtentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rareſiet igitur* (§. 23), *ideoque ponderis premens prepellet. Ut itaque aer ad priſtinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aeris inter ſe æqualia, cumque ab initio eandem denſitatem habuerint,* per hypoth. *ejuſdem denſitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia ſuſtinent.*

SCHOLION 3.

76. *Vana vero eſt objectio, quod admiſſa hac compreſſionis lege ſequatur, aerem eousque comprimi poſſe, ut ſpatium occupet infinite parvum ejus reſpectu, quod ante compreſſionem obtinuerat, pondere ſcilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad ſummum compreſſionis gradum pertingit, ponderi quantocunque prementi reſiſtit, conſequenter vi reſiſtendi infinitæ æquipollet. Nec ideo vis elaſtica aeris in ſtatu ſummæ compreſſionis viribus infinite variis æquatur* (§. 553 Mechan.); *ſed minimæ earum, a quibus maxima compreſſio proficiſci valet. Eſt enim vis minor pars majoris* (§. 20 Arith.). *Quamobrem ſi vis elaſtica aeris in ſtatu ſummæ compreſſionis & vi minori, & majori æqualis eſſet; pars toti æqualis foret: id quod abſurdum* (§. 84 Arith.). *Cum igitur vis elaſtica in ſtatu ſummæ compreſſionis infinita non ſit, explicandum eſt, quomodo vi reſiſtendi infinitæ æquipolleat. Scilicet ſi majus pondus aeri incumbere ſupponamus, quam ad ſummam compreſſionem efficiendam ſufficit; exceſſus ponderis non amplius ad comprimendum aerem, ſed ad compreſſum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellatur corpora aerem compreſſum ambientia vi reſiſtendi prædita eſſe debent, quæ toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim, qua premit, ad aerem compreſſum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impedientia & vi elaſtica aeris impreſſi & vi eidem impreſſa urgentur, quæ ſimul ſumta vim ponderis prementis adæquant.*

SCHOLION 4.

77. *Idem experimentum cum ſucceſſu repetierunt* Robertus Boyle (a) & Amonton (b), *hicque in voluminibus aeris majoribus.*

THEOREMA 9.

78. ***Elater aeris compreſſi eſt ad elaterem dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compreſſi.***

DEMONSTRATIO.

Elater aeris magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi ut pondus illi incumbens ad pondus huic impoſitum (§. 553 *Mechan.*). Enimvero in ratione horum ponderum eſt quoque reciproce volumen aeris minus compreſſi ad volumen aeris magis compreſſi (§. 72). Ergo & elater magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi ſeu dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compreſſi (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aeris magis compreſſi fortior eſt, quam elater minus compreſſi.

THEOREMA 10.

80. ***Elater aeris magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi, cæteris paribus, ut maſſa aeris magis compreſſi ad maſſam aeris minus compreſſi ſub eodem volumine contenti.***

DEMONSTRATIO.

Si aer comprimitur in ſpatium ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum &c. erit aeris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in ſpatio ſimplici. Aſt in ſpatium ſubduplum a duplo; in ſubtriplum a triplo; in ſubquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 72). Ergo in æqualibus voluminibus maſſæ aeris diverſimode compreſſi in ratione ponderum comprimentium exiſtunt, conſequenter cum in eadem ratione ſit elater aeris magis & minus compreſſi (§. 553 *Mechan.*); elater aeris magis compreſſi ad elaterem

(a) In defenſione doctrinæ de elatere & gravitate aeris contra Linum part. 2. cap. 5. p. m. 42. & ſeqq.

(b) Memoires de l'Academie Royale des Sciences An. 1705 p. m. 155. & ſeqq.

rem minus compressi est ut massa illius ad massam hujus sub æquali volumine (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

81. *Data ratione voluminis, quod replet aer a solo pondere atmosphærico pressus, ad spatium, in quod redigitur ulterius compressus, determinare vim elasticam compressi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris a solo pondere atmosphærico pressi æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aeris basin, sed altitudinem 28 digitorum habentis (§. 29); si ad volumen compressi, volumen nondum compressi & pondus istius columnæ mercurialis quæratur numerus quartus proportionalis, designabit is quantitatem vis elasticæ in aere compresso (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodsi pondus columnæ mercurialis istius a quantitate vis elasticæ inventa subducatur; relinquitur vis elateris, qua resistentiam ponderis atmosphærici superat.

PROBLEMA 13.

83. *Dato effectu, quem producit aer a solo pondere atmosphærico pressus, aut in certo compressionis gradu, invenire effectum, quem producturus est in alio quocunque compressionis gradu.*

RESOLUTIO.

Cum effectus sint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mech.*), vires vero productrices in nostro casu sint reciproce ut volumina in diversis compressionis gradibus (§. 78); si effectus, quem elater aeris in certo compressionis gradu producit, detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur inferendo: ut volumen aeris magis compressi ad volumen minus compressi ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

84. *Idem problema quoque solvitur per analogiam theor. 10 (§. 80).*

THEOREMA 14.

85. *Dato effectu, quem producit aer a solo pondere atmosphærico pressus, determinare alium compressionis gradum, in quo idem producat intra atmosphæram effectum quemcunque majorem datum.*

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aeris minus compressi $= c$, volumen magis compressi $= x$. Cum alter effectus intra atmosphæram resistentem sit producendus & integer tamen desideretur; quærenda erit compressio, quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu desiderato & effectu, quem aer a solo pondere atmosphærico pressus in vacuo produceret. Erit ideo effectus ab aere compresso producendus $= a + b$, consequenter $a + b : a = c : x$, hoc est, ut aggregatum ex effectu aeris a solo pondere atmosphærico pressi & effectu ab aere in quæsito compressionis gradu intra atmosphæram producendo ad effectum aeris a solo pondere atmosphærico pressi, ita volumen aeris a solo pondere atmosphærico pressi ad volumen aeris in quæsito compressionis gradu (§. 78): quod ideo per regulam trium invenitur.

SCHOLION.

86. *Eodem modo problema resolvitur ope theorematis 10 (§. 80).*

CAPUT

CAPUT IV.

De Æquilibrio Aeris cum aliis Fluidis Specifice Gravioribus.

DEFINITIO 9.

87. PEr *Tubum Torricellianum* intelligo tubum vitreum AB Mercurio repletum, cujus orificium superius A hermetice sigillatum, inferius B stagnanti in vasculo CD Mercurio immersum.



SCHOLION.

88. *Vocatur istiusmodi tubus* Torricellianus *ab inventore* Torricello (§. 29).

DEFINITIO 10.

89. *Barometrum* est instrumentum, quo gravitatem aeris metiri licet. *Baroscopium* vero est instrumentum, quod variationes gravitatis aeris confuse indicat.

SCHOLION.

90. *Vulgo pro synonymis habent has voces: sed mihi necesse esse videtur eas distinguere, cum aliud utique sit tantummodo cognoscere, aerem hoc tempore esse graviorem, quam altero; aliud vero scire, quoties gravitas atmosphæræ hac die superet gravitatem illius anteriorem: posterius vero constare debet, si gravitatem aeris metiaris* (§. 23 Geom.).

THEOREMA 11.

91. *In tubo Torricelliano major columna Mercurii suspenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.*

DEMONSTRATIO.

Columna Mercurii suspensa æquatur columnæ aereæ, cujus eadem cum illa basis, sed altitudo a superficie Mercurii in vasculo stagnantis usque ad extremitatem atmosphæræ exporrigitur (§. 36 *Hydrost.*). In locis vero altioribus columnæ aereæ altitudo minor, quam in profundioribus, ideoque & ipsa columna in his gravior, quam in illis, consequenter minor columna Mercurii columnæ aereæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. *Q. e. d.*

SCHOLION.

92. *Veritatem hujus theorematis experientia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit* Pascalius, *qui phænomena tubi Torricelliani maxima cum solertia scrutatus est in Tractatu de æquilibrio liquorum.*

THEOREMA 12.

93. ***Si in tubo Torricelliano aeris quædam quantitas super Mercurio, & in genere in vase quocunque, cujus orificium apertum fluido immersum, super fluido relinquatur; Mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus vel vas vacuum fuerit, & pondus fluidi suspensi æquatur differentiæ elateris aeris inclusi a pondere atmosphærico.***

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aeris inclusi elater solus ponderi atmosphærico æquetur (§. 33); Mercurius vi gravitatis propriæ descendere incipit. Ast dum descendit, aer inclusus dilatatur (§. 36) ideoque elater ejus minori, quam ponderi

deri atmosphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur Mercurii aut fluidi cujuscunque alterius in tubo vel vase remanere debet, quantum differentiæ elateris aeris inclusi a pondere atmosphærico æquilibratur, consequenter Mercurius vel fluidum quodcunque ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus vel vas ab aere vacuum extitisset. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

94. Aer igitur in tubo Torricelliano inclusus rarior ambiente externo & ejus elater æquatur differentiæ ponderis Mercurii suspensi a pondere atmosphærico (§. 36 *Hydrost.*).

COROLLARIUM 2.

95. Hinc liquet, si vas exiguo orificio instructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorsus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium sit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vase quocunque alio quantumvis amplo, si orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA 16.

96. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aere prorsus vacuo ad altitudinem, qua gaudet, si tubi aliqua pars aere repleatur, una cum volumine aeris dilatati, invenire volumen aeris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo suspensi (§. 33), ideoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 94), pondera vero fluidi sint ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573 *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aeris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod ideo per regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

E. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aeris dilati 25; erit volumen primitivi $(28 - 14)\ 25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$. Quæ prorsus consona sunt experimento *Mariotti* (a).

PROBLEMA 17.

97. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo & ratione voluminis aeris primitivi ad volumen dilatati, invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= a$, altitudo in non vacuo $= x$, volumen aeris primitivi $= b$, dilatati $= c$, erit (§. 96)

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \quad (\text{§. 193 } Arith.).$$

Inveniri ideo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aeris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati & altitudinem in tubo vacuo.

Sit e. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$; erit $x = (25 - 12\frac{1}{2})\ 28 : 25 = 350 : 25 = 14$.

PROBLEMA 18.

98. *Datis altitudine fluidi in tubo vacuo & volumine aeris primitivi, invenire volumen dilatati & altitudinem fluidi in tubo non vacuo datæ altitudinis.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis $= a$, altitudo voluminis aeris primitivi $= b$, dilatati $= x$;

(a) Essay de la nature de l'air pag. 53. & seqq.

$= x$; erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, consequenter

$$m : m - a + x = x : b \quad (\S.\ 96).$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc est, si fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4}d^2 \quad \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula 1. Quadrato semidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aeris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic addatur semidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aeris dilatati. E. gr. sit $a = 39$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}d^2 = \frac{121}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, ideoque $\frac{1}{4}d^2 + bm = \frac{121}{4} + 350 = \frac{1521}{4}$, consequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$. Hinc altitudo fluidi in tubo non vacuo $a - x = 39 - 25 = 14$.

PROBLEMA 19.

99. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vasculo stagnantis & altitudine fluidi in tubo non vacuo, invenire altitudinem voluminis aeris primitivi.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aeris primitivi $= x$; erit altitudo dilatati $= a - n$, consequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur igitur x, quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi numerum quartum proportionalem.

Sit e. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$; erit $x = (39 - 14)(28 - 14) : 28 = (25 \cdot 14) : 38 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 20.

100. *Determinare quantitatem liquoris effluentis, si vas exigui orificii non plenum invertatur.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aere sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vase atque altitudo totius vasis *per hypoth.* reperietur volumen aeris dilatati (§. 98). Unde si
3. Subducatur volumen aeris primitivi; relinquetur quantitas liquoris expellendi, si vas invertatur (§. 95).

THEOREMA 13.

101. *Si vasis ab aere prorsus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris atmosphæræ æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demersumque aperiatur, liquor ascendens totum replebit: ast si non prorsus evacuatum fuerit, minus spatium liquor ascendens occupabit, quam aeris primitivi educti quantitas repleverat.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undique circa orificium vasis demersum a pondere atmosphæræ prematur (§. 21), sub orificio autem vasis aperto nulla sit aeris pressura, quia ab aere prorsus vacuum supponitur; tantum liquoris intra vas ascendere debet, quantum sufficit ad pressuram ei æqualem efficiendam, quæ a pondere atmosphærico efficitur

(§. 75 *Mechan.*). Sed vasis altitudo liquoris atmosphæræ æquiponderantis altitudinem non excedit *per hypoth.* Ergo pressura æqualis pressuræ ponderis atmosphærici a liquore intra vas contento effici nequit, nisi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quodsi quædam aeris portio residua fuerit, ea super liquore ingrediente constituta rarior sit necesse est quam aer primitivus (§. 94). Majus ergo spatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10 *Hydrost.*). Quoniam igitur nonnisi spatium reliquum a liquore occupatur, evidens est, liquorem ascendentem minus spatium vasis replere, quam aeris primitivi educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

Scholion.

102. Schottus *autor est* (a), *cum Herbipoli experimentum sæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuisse, ut etiam minore vase adhibito omnem excluderet aerem. Equidem cum aqua in vas irrumpens spumescat, ipse id indicium irruentis aeris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expansione aeris intra aquam latentis idem phænomenon deducunt, atque hinc aeris super liquore constituti originem derivant. Enimvero quemadmodum forte negari nequit, quod hac ratione aer in vase residuus aliquod capiat incrementum, ita rationi consentaneum videtur, non omnem aerem ope antliæ ex vasis educi, quia aer ad summum expansionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis dispersis æthere subtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum massula metallica in fluidis specifice levioribus natare solent, ut taceam massulas aereas, quæ ab eminentiolis in superficie vitri non secus ac aliorum fluidorum guttula fulciuntur. Sæpius tamen diverso tempore diversis quoque vasis repetito experimento didici, perexiguum esse aeris, quod super liquore constitutum deprehenditur, vase summa cum diligentia evacuato.*

Problema 21.

103. *Data altitudine vasis evacuati & altitudine liquoris in ipsum ingressi, invenire volumen aeris primitivi educti.*

Resolutio.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aere sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).
2. Quoniam porro datur altitudo vasis evacuati & altitudo liquoris ipsum ingressi, invenietur volumen aeris primitivi (§. 99).

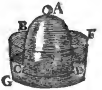
Corollarium.

104. Quodsi quantitas aeris educti quæratur per problema præsens eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur; certum id erit indicium, nihil aeris ex aqua irruente in summitatem vasis ascendisse.

Scholion.

105. *Dubito tamen, num hæ subtilitates in praxi satis discerni queant.*

Theorema 14.



106. *Si vas quoddam* ABCD *aperto orificio* CD *sub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur: quo profundius mergitur, eo magis aer in eodem comprimitur.*

Demonstratio.

Cum enim aer aqua aliisque fluidis levior existat (§. 57 *Mechan.* & §. 69 *Hydrost.*), si vas ABCD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua descendere deberet, quod fieri nequit (§. 99 *Hydr.*). Jam

(a) In Techn. curiosa lib. 1. cap. 3. pag. 14.

Jam elater aeris inclusi aquam subjectam eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum (§. 33), aqua vero in eadem libella circa orificium vasis præter pondus atmosphæricum etiam aqua super ea in vase stagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vasis CD, quam sub eodem, consequenter cum aer intra vas adhuc compressibilis existat (§. 17) & in ratione ponderum compressionem patiatur (§. 73); aliqua liquoris quantitas intra vas ascendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

107. *Veritatem theorematis experientia confirmat. Inprimis huc pertinent phænomena campanæ urinatoriæ a* Sturmio (a) *enarrata & experimento illustrata.*

THEOREMA 15.

108. *Iisdem positis, quæ in propositione præcedente (Vid. Fig. §. 106), elater aeris in vase* ABCD *compressi, una cum pondere liquoris in ipsum ingressi æquatur aggregato ex pondere atmosphæræ & pondere columnæ ejusdem fluidi, quæ eandem cum fluido ultra libellam orificii* CD *in vase* FG *stagnante altitudinem habet.*

DEMONSTRATIO.

Aer in vase ABCD adhuc compressibilis existit (§. 17): tamdiu itaque vi prementi cedit, donec eadem in fluidum sub orificio CD pressura efficiatur, quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmosphærico & columna fluidi eandem cum vase basin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vasis CD in vase FG stagnante altitudinem habente (§. 75 *Mechan.*). Sed pressura in aquam sub orificio CD fit ab elatere aeris in vase ABCD compressi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aeris in vase ABCD compressi una cum pondere fluidi intrantis æquatur &c. *Q. e. d.*

(a) Colleg. C.rios. part. 1. Tent. 1. & seqq.

PROBLEMA 22.

109. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vasis (Vid. Fig. §. 106)* CD *consistentis una cum volumine ejus & volumine aeris primitivi cavitatem vasis* ABCD *implentis, invenire volumen aeris compressi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fluidi $= g$, ejus volumen $= c$, pondus atmosphæricum $= a$, volumen aeris primitivi $= b$, volumen fluidi in vas ascendentis $= x$, erit volumen aeris compressi $= b - x$. Jam cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmospharico (§. 33), reperietur elater aeris compressi $= ab:(b-x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*); reperietur gravitas fluidi in vas ascendentis $= gx:c$. Habemus ergo

$$ab:(b-x) + gx:c = g + a \quad (§. 108).$$

$$abc + gbx - gx^2 = bgc + abc - gcx - acx$$

$$x^2 - bx - cx - acx:g = -bc$$

hoc est; si fiat $b + c + ac:g = d$

$$x^2 - dx = -bc$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 \quad \tfrac{1}{4}d^2$$

$$x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 - bc$$

$$\tfrac{1}{2}d - x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 - bc)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 - bc)}$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aeris primitivi & volumine fluidi super libellam orificii vasis stagnantis addatur numerus quartus proportio-

portionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmosphæricum & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ semisummæ quadrato subtrahatur factum ex volumine aeris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vasis stagnantis. 3. Ex residuo extrahatur radix quadrata, quæ si 4 a semisumma supra inventa subtrahatur, relinquetur volumen fluidi in vas ascendentis.

COROLLARIUM 1.

110. Cum pondus liquoris vas intrantis sit $gx:c$; idem substituto valore ipsius x, reperitur $= (\frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 - bc)})g:c$.

COROLLARIUM 2.

111. Et quia elater aeris in vase compressi est $ab:(b-x)$, idem substituto valore ipsius x, reperitur $= ab:(b - \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 - bc)})$.

PROBLEMA 23.



112. *Data profunditate vasis seu altitudine aeris primitivi in ejus cavitate contenti, invenire profunditatem, ad quam intra fluidum datæ gravitatis orificium* CD *deprimendum, ut volumen aeris compressi habeat ad volumen aeris primitivi rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aeris primitivi $= b$, pondus atmosphæricum $= a$, gravitas fluidi $= g$, ejus altitudo super libella orificii $= x$, altitudo aeris compressi $= c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $= b - c$. Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmosphærico (§. 33); reperietur elater compressi $= ab:c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*), erit gravitas fluidi in vas ascendentis $= (bg - gc):x$. Ergo

$$ab:c + (bg - gc):x = a + g \text{ (§. 108)}$$

$$abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2):(ac + gc - ab) = x$$

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam

$$ac + gc - ab : g = bc - c^2 : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmosphærico in altitudinem aeris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmosphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aeris compressi ad gravitatem fluidi, ita differentia quadrati altitudinis aeris compressi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vasis sub fluido demersi.

SCHOLION.

113. *Hactenus supposuimus, aerem, dum comprimitur, cum ambiente externo cætera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aere ambiente, aer in vase condensatur* (§. 24). *Dispiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA 24.

114. *Datis capacitate vasis, hoc est, volumine aeris primitivi, volumine fluidi demersum ingressi & volumine fluidi supra orificii vasis libellam stagnantis, una cum pondere atmosphærico, invenire rationem voluminis aeris compressi tantum, ad volumen compressi & condensati simul.*

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri potest volumen aeris compressi (§. 109) &, si volumen fluidi vas ingressi a volumine aeris primitivi subducitur, manifestum est, relinqui volumen aeris compressi & condensati simul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compressi

tan-

tantum, quam volumen aeris & compressi & condensati, illius ad hoc ratio latere nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

115. Quodsi volumen aeris compressi & condensati subtrahatur ex volumine aeris compressi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condensationem metitur.

COROLLARIUM 2.

116. Quodsi contingat, hanc differentiam esse nullam; vel aer ambiens non erit calidior aqua, vel aer compressus ab isto frigoris gradu nullam patiatur necesse est condensationem.

COROLLARIUM 3.

117. Quodsi differentia aliqua prodeat, evidens est, aerem compressum adhuc condensatum & spatium a compresso in condensatione derelictum a fluido ascendente repletum fuisse. Elater igitur aeris compressi facta condensatione decrevit & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in spatio derelicto contenti (§. 93).

SCHOLION 1.

118. *Supposuimus in hactenus demonstratis propositionibus vasa esse cylindrica vel prismatica: alias enim prolixiore subinde opus fuisset calculo.*

SCHOLION 2.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in problemate præsente de aere condensato demonstrata sunt, ad rarefactum quoque transferri posse, si vas in fluido calidiore, quam aer ambiens, demergatur.*

THEOREMA 16.

120. *Si pondus atmosphæræ minuitur, Mercurius in tubo Torricelliano descendere; si illud augetur, hic ascendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna Mercurialis intra tubum Torricellianum suspensa æquatur ponderi atmosphærico (§. 29). Quare si pondus atmosphæræ minuitur, Mercurius fortius deorsum nititur, quam pondus atmosphæræ resistit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentiæ ponderis columnæ Mercurialis & ponderis atmosphærici æquatur (§. 75 *Mech.*). Quare si volumen Mercurii minuitur, in tubo utique descendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonstratur pondere atmosphærico aucto, Mercurium in tubo Torricelliano ascendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121 Cum altitudo Mercurii in tubo Torricelliano quotidie varie: experientia teste; aeris quoque gravitas quotidie varietur opus est.

SCHOLION 1.

122. *Mathematici Parisienses maximam Mercurii altitudinem 28'' 4''', minimam 26'' 4''' observarunt, ut ideo omnis variatio intra 2'' seu 24''' pedis Parisini comprehendatur. An. 1711 die 23. Decemb. apud nos flante Euro & cælo nubilo altitudo maxima fuit 30''⅛ pedis Londinensis, die 21 Octobr. h. 7. mat. minima vix excessit 28 digitos pedis Londinensis, flante Zephyro & tempestate pluviali, cum nocte præcedente procella sævisset. Nec memini, me intra quinquennium, ex quo tales observationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem Mercurii deprehendisse. Tota igitur variationis scala non excedit 2¼ digitos pedis Londinensis, qui cum deficiat a Parisino $\frac{9}{144}$ (§. 26 Geom.); observationes nostræ cum Parisinis satis conspirant.*

SCHOLION 2.

123. *Equidem celeberrimus* Hallejus (a) *cum globum vitreum collo tenui instructum & Mercurio plenum aqua ad ignem ebulliente immergeret, volumen ejus $\frac{1}{74}$ sui crescere observavit, atque ideo hinc constat, Mercurium rarefieri iterumque condensari (§. 6. 8). Quoniam tamen incrementa & decrementa Mercurii calori atque frigori proportionalia non sunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, imo maxima plerumque hieme observantur (§. 122); variationes ejus à calore ac frigore minime pendent.*

THEO-

(a) Philos. Transact. n. 197 p. 650.

Theorema 17.

124. *Si tubus recurvus* ABC *in* A *hermetice sigillatus, in* C *vero apertus ut Torricellianus, Mercurio repletur; erit variatio altitudinis Mercurii in crure longiore* AB *ob variatum pondus atmosphæræ subdupla variationis altitudinis Mercurii in tubo Torricelliano ex eadem causa contingentis.*



Demonstratio.

Altitudo enim Mercurii in brachio majore atmosphæræ æquiponderantis semper computanda est a superficie Mercurii in crure minore BC stagnantis (§. 34. 36 *Hydrost.*). Ponamus jam Mercurium in crure minore CB consistere ad E, in majore AB ad D, sitque HD $= 26''$. Aucta atmosphæræ gravitate. Mercurius ascendat ex D in F (§. 120): tum ex E descendet in G, eritque suppositis tuborum CB & BA diametris æqualibus EG $=$ DF. Ponamus esse EG $= 1''$, erit IF $= 28''$. Quare si in tubo Torricelliano Mercurius ascendit per 2, in tubo recurvo nonnisi ex D in F, hoc est, per $1''$ ascendit. Est ergo variatio altitudinis Mercurii ob mutatum pondus atmosphæricum in istiusmodi tubo recurvo contingens subdupla variationis altitudinis Mercurii ex eadem causa in tubo Torricelliano contingentis. *Q. e. d.*

Corollarium 1.

125. Quia vasculum, cui tubus Torricellianus immittitur, cruri breviori respondet; evidens est, illud tam amplum esse debere, ut Mercurius ex tubo per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non sensibiliter augeat, e. gr. non nisi dimidia lineola. Ita enim Mercurius in tubo per unam lineam ascensurus propter hoc impedimentum nonnisi per lineam parte sui quadragesima octava mulctatam ($1''' - 2\frac{1}{4}$) ascendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

Corollarium 2.

126. Cum scala integra, per quam Mercurius in tubo Torricelliano vasculo satis amplo ascendere ac descendere solet, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non nisi 12 linearum seu digiti unius.

Problema 25.

127. *Data integra scala, perquam ascendit & descendit Mercurius in tubo Torricelliano, una cum diametro tubi, invenire diametrum vasculi, in quo si tubus contineatur, Mercurius ex eo delapsus non impediat, quo minus mutationes satis notabiles existant.*

Resolutio.

Totum negotium huc redit, ut impediatur, quo minus Mercurius ex tubo delapsus altitudinem Mercurii in vasculo stagnantis altitudinem in tubo augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini Mercurii in vasculo, ex demonstratione theorematis 17 (§. 124). Id autem obtinetur, si ea sit vasculi amplitudo, ut Mercurius per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non nisi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque scala Mercurialis in tubo Torricelliano $= a$, diameter tubi $= b$; erit supposita ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, cylindrus Mercurialis intra scalam continendus $= pb^2a:4d$ (§. 541 *Geom.*). Sit porro diameter vasculi $= x$, cum altitudo cylin-

cylindri, in quem in id delapsus Mercurius abire debet, sit dimidiæ lineolæ $= m$; erit soliditas ejusdem $= mpx^2 : 4d$ (*§. cit.*), consequenter

$$mpx^2 : 4d = pb^2 a : 4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2 : b^2 = a : m, \text{ seu, } x : b = \sqrt{a} : \sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi in ratione subduplicata scalæ Mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapsi in vasculo, hoc est ut $\sqrt{24'''} : \sqrt{\frac{1}{2}'''}$ (§. 122), seu $\sqrt{48} : 1 = 4\sqrt{3} : 1$.

Corollarium.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc est, diameter vasculi est media proportionalis inter altitudinem scalæ & diametrum tubi, si Mercurius ex integra scala delapsus in vasculo ascendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

Problema 26.

129. *Datis diametris tubi & vasculi, una cum altitudine intervalli, per quod Mercurius in tubo descendit, invenire altitudinem intervalli, per quod ascendit in vasculo & contra.*

Resolutio.

Sit diameter tubi $= a$, diameter vasculi $= b$, altitudo descensus $= c$, altitudinis Mercurii in vasculo incrementum $= x$, erit (§. 127)

$$a^2 pc : 4d = b^2 px : 4d$$

$$a^2 c = b^2 x$$

$$x : c = a^2 : b^2$$

Theorema. Incrementum altitudinis Mercurii in vasculo est ad intervallum descensus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi.

Corollarium.

130. Ergo si Mercurius descendit per quodcunque intervallum c, erit verum descensus intervallum $= c + a^2 c : b^2$.

Problema 27.

131. *Baroscopium construere.*

Resolutio.



1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ hermetice sigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, Mercurio ita repleatur, ut nihil aeris super eo relinquatur, nec ulli vesiculæ inter parietem vitri & Mercurium locus concedatur: id quod optime succedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari instructi.
2. Orificium tubi ita repleti, ut Mercurius ex eo redundet, digito fortissime appresso, ne intra eum & Mercurium aeris quidpiam remaneat, Mercurio in vasculo ligneo, cujus diameter per probl. 25. (§. 127) determinanda, ita immergatur, ut fundum non attingat.
3. Intervallo a superficie Mercurii in vasculo stagnantis 26 digitorum Rhenanorum affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos divisæ, qui rursus in 12 lineas aut particulas quotcunque æquales alias subdividendi.
4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciso indatur & superius tegatur, ut ex conspectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam tubus hic idem est cum Torricelliano (§. 87); baroscopium uti-

que erit hac ratione construĉtum (§.89. 120).

SCHOLION I.

132. *Non opus esse, ut vasculum ligneum, in quo Mercurius stagnat, sit apertum, & evidenti experimento* (a) *docui, & propria experientia didici. Meum enim baroscopium non modo vasculum habet undequaque probe clausum; sed praeterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aeris externi ad superficiem vasculi admittenti. Hoc tamen non obstante mutationes in altitudine Mercurii consueta ratione contingunt.*

SCHOLION 2.



133. *Non defuere, qui in eo operam suam collocarunt, ut mutationes sensibiliores efficerent.* Cartesius *primum, postea quoque* Hugenius, *commendarunt tubum* AB *vase cylindrico* CD *instructum & dimidium vasis una cum quadam tubi superioris parte aqua, reliquam vasis partem ac tubum inferiorem Mercurio repleri jusserunt. Advertit vero* Hugenius, *votis non respondere eventum. Etenim aer in aqua contentus vinculis suis sese liberabat & partem tubi superioris vacuam replebat: quo facto, cum aer inclusus rarefieret & condensaretur* (§. 23. 24), *depressiones & elevationes Mercurii a gravitatis atmosphæra variationibus producta non amplius discerni poterant. Cum ideo didicisset, consultum esse, ut Mercurius locum vacuo proximum occupet, a iam baroscopii compositi constructionem excogitavit, quam problemate sequente explicamus.*

PROBLEMA 28.

134. *Baroscopium compositum construere.*

RESOLUTIO.

1. Fiat tubus recurvus (*Vid. Fig. seq.*) ADG in A hermetice sigillatus, in G vero apertus & duobus vasis cylindricis BC & EF instructus.
2. Vasa BC & EF sint inter se æqualia & intervallo $27\frac{1}{3}$ digitorum distent, quanta scilicet est Mercurii in media aeris gravitate altitudo in baroscopio simplici.



3. Baroscopio huic infundatur primum Mercurius, dum baroscopium simplex mediam aeris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC assurgat, reliquo spatio ad A usque vacuo non solum a Mercurio, sed ab ipso etiam aere crassiore.
4. Postea quoque infundatur aqua communis cum parte sexta aquæ regiæ permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis constituatur. Ita baroscopium compositum constructum.

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim ultra libellam Mercurii in vasculo EF contenti per tubum AD assurgens ponderi atmosphærico & liquoris æquilibratur (§. 34 *Hydr.*). Aucto igitur atmosphæræ pondere augeri debet columna illa Mercurialis, consequenter liquor descendet. At imminuto atmosphæræ pondere, columna Mercurialis quoque imminui debet, consequenter liquor ascendet. Liquoris ideo descensus incrementum gravitatis aeris, ascensus vero decrementum indicat, consequenter instrumentum ita constructum baroscopium est (§. 89). *Q. e. d.*

SCHOLION.

135. *Baroscopium* Hugenianum *multo minoree gravi-*

(a) In Actis Eruditorum An. 1710. pag. 80.

gravitatis aereæ mutationes indicare, quam tubus Torricellianus, *attendentibus manifestum est. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamsi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expressi instilletur, liquori innatatura; loco aqua oleum Tartari per deliquium infundi potest.*

PROBLEMA 29.

136. *Baroscopium construere, cujus mutationes sint multo sensibiliores quam in barometro ordinario.*

RESOLUTIO.



1. Tubo recurvo ACD, cujus crus CD sit ad alterum AC perpendiculare, cohæreat vasculum cylindricum B, cujus diameter tanto major esse debet, quanto sensibiliores mutationes baroscopium indicare debet.
2. Crure AC in situm horizontalem inclinato, mediante infundibulo baroscopium repleatur Mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua sit, nec metuendum, ne in minima atmosphæræ gravitate Mercurius elabatur.
3. Cruri horizontali aptetur scala in suos digitos divisa & in lineas subdivisa. Dico hoc baroscopium mutationes gravitatis aeris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum pondus atmosphæræ augetur, Mercurius in vasculo tanto intervallo ascendit, quanto in ordinario baroscopio ascendere solet (§. 120), consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicare valet quam baroscopium commune sive simplex. Similiter quando pondus atmosphæræ minuitur, Mercurius in vasculo tanto intervallo descendit, quanto in ordinario baroscopio descendere solet (§. 120), consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis; in hoc multo ampliori intervallo versus orificium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicat, quam baroscopium simplex. *Q. e. d.*

PROBLEMA 30.

137. *Data diametro tubi (Vid. Fig. §. 136.)* CD *invenire diametrum vasculi* AB., *ita ut scala descensus Mercurii in tubo* DC *habeat ad scalam ascensus in vasculo* AB *rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, ratio scalarum $b:c$, diameter vasculi $= x$. Cum tantum Mercurii in vasculum ascendat, quantum per aeris gravitatem in tubo DC deprimitur, positaque ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, quantitas Mercurii in tubo recedentis sit $a^2pb:4d$ & quantitas vasculum ingressi $= x^2pc:4d$ (§. 541 *Geom.*); erit

$$a^2pb:4d = x^2pc:4d$$

$$a^2b = x^2c$$

$$x^2:a^2 = b:c$$

$$x:a = \sqrt{b}:\sqrt{c}.$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi in ratione subduplicata reciproca scalarum.

COROLLARIUM.

138. Datis ergo diametro tubi CD & diametro vasculi AB una cum scala Mercurii in vasculo, invenitur scala in tubo inserendo: ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi ita reciproce scala Mercurii in vasculo ad scalam Mercurii in tubo.



PROBLEMA 31.

139. *Datis diametris tuborum & vasculorum una cum altitudinibus intervallorum, per quæ Mercurius descendit, invenire utrum baroscopia concordent, nec ne.*

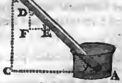
RESOLUTIO.

Quærantur vera descensus intervalla in eadem mensura (§. 130): quæ si utrinque æqualia reperiantur, evidens est, barometra inter se concordare; sin minus discordare.

SCHOLION.

140. *Apparet ideo ad judicandam duorum vel plurium barometrorum concordiam, aut veram intervallorum ascensus differentiam non sufficere, ut utrique eadem graduatio applicetur, nisi utriusque vasculi (§. 127) ea fiat amplitudo, ut Mercurius ex tubo delapsus gravitate atmosphæræ imminuta altitudinem in vasculo stagnantis sensibiliter non variet.*

THEOREMA 18.



141. *Si tubus Torricellianus* AB *inclinatur, erit cylindrus Mercurialis atmosphæræ æquiponderans ad cylindrum Mercurialem eidem in situ tubi verticali æquiponderantem ut longitudo tubi* AB *ad altitudinem* BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmosphærici egressum Mercurii ex tubo AB per osculum A impedientis concipiatur cylindrus Mercurialis isti æquiponderans in tubo verticali ad A resistere; erit ejus gravitas ad gravitatem Mercurii in tubo inclinato ut longitudo AB ad altitudinem BC (§. 34 *Hydrost.*). Cum itaque cylindro Mercurii verticali pondus atmosphæræ æquale sit; erit etiam gravitas Mercurii in tubo inclinato ad hoc ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi vel subtripla, vel subquadrupla &c: mutationes baroscopii triplo, vel quadruplo &c. sensibiliores evadunt.

COROLLARIUM 2.

143. Si AB sumatur pro sinu toto, erit CB sinus anguli inclinationis BAC. Est ergo gravitas Mercurii in tubo inclinato ponderi atmosphærico æquiponderantis ad pondus atmosphæricum ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

144. Ergo & scala integra, & singula intervalla ascensus descensusque Mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmosphærici ad scalam integram & singula ejus intervalla in tubo verticali sunt ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipsi BC & FE ipsi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 255 *Geom.*), consequenter DE : DF = BA : BC (§. 267 *Geom.*).

PROBLEMA 32.

145. *Data longitudine scalæ, per quam Mercurius nunc ascendit, nunc descendit in tubo verticaliter erecto, invenire angulum*

lum inclinationis tubi inclinandi, ut scala per quam Mercurius in ipso nunc ascendit, nunc descendit, habeat ad scalam tubi verticalis rationem datam.

RESOLUTIO.

Sit longitudo scalæ in tubo verticali $= a$, quia datur ratio scalæ in inclinato ad scalam in verticali, datur etiam scala ipsa in inclinato, quæ sit $= b$. Sit porro sinus totus $= t$, sinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 144).

CAPUT V.

De Rarefactione & Condensatione, Densitate item & Raritate Aeris.

THEOREMA 19.

146. *Calor elaterem aeris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aer vesicæ inclusus eadem vi premit, qua aer ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, vesicam distendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75 *Mechan.*). Enimvero vis illa, qua vesicam distendit, est elater ejus (§. 26). Calor ideo elaterem aeris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aer rarefactus iterum condensatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA 20.

148. *Vis elastica aeris, qua rarefiens expanditur, est ad elaterem aeris condensati uti volumen rarefacti ad volumen condensati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aerem rarefactum ea lege comprimi, ut idem recuperet volumen, quod condensatus obtinuerat: evidens est, ad id efficiendum pondus imponi debere, quod vi elasticæ æquatur, qua expansus fuit (§. 75 *Mech.*). Erit igitur elater aeris, quo rarefiens expanditur, ad elaterem condensati, ut pondus illud ad pondus alterum, quo condensatus premebatur (§. 553 *Mechan.*). Est vero pondus rarefacto incumbens idem, quod condensato incumbebat *per hypoth.* Ergo elater aeris, quo rarefiens expanditur, est ad elaterem condensati ut pondus, quod sustentat a rarefactione in pristinum condensationis volumen reductus, ad pondus, quo premitur rarefactus, consequenter ut volumen rarefacti ad volumen condensati (§. 73). *Q. e. d.*

PROBLEMA 33.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis spatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removetur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico;

Dico, liquorem sua veluti sponte in cavitatem vasis ascensurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aer rarefit (§. 23), consequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodsi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas ascendet, dum calor exspirat. Dum enim calor exspirat, cæteris paribus, aeris, quæ restat, portio rarior est externo ambiente, ideoque elater ejus minor quam externi (§. 78), consequenter quam ponderis atmosphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmosphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75 *Mechan.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

150. *Quodsi prima vice non tantum aeris expulsum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec necesse est, liquorem in priore operatione immissum rursus expelli, cum ipse potius ob propriam rarefactionem aeris adhuc residui expulsionem promoveat.*

THEOREMA 21.

151. *Sit globus vitreus* AB *cum annexo tubo* BC, *cujus orificium* C *aquæ immersum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad* D: *ascendet, si aer ambiens frigidior, vel gravior evadit; descendet, si calidior, vel levior redditur.*



DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam inclusus ideoque condensatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 78). Cum igitur is constanter æqualis esse debeat differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 93); si minuitur, pondus fluidi, consequenter & volumen ejus (§. 17 *Hydrost.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo ascendat necesse est. *Quod erat unum.*

Similiter si aer gravior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam sub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur aquæ ascendere debet, quantum sufficit ad æquilibrium cum pondere atmosphærico constituendum (§. 36 *Hydrost.*). *Quod erat secundum.*

Contra si aer externus calefit, calefit quoque inclusus, consequenter rarefit (§. 23), ideoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum descendere, si aer levior redditur, eadem ratione demonstratur, qua ostendimus, illud ascendere, si is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

SCHOLION.

152. *Celeberrimus* Hallejus (a) *observavit, uti supra de Mercurio (§. 123), quod spiritus vini insigniter expansus fuerit, atque ab initio celerius, postea tardius in tubulo ascenderit. Cum spiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus esset, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiebat. Vereor autem, ne diversitas spiritus vini expansionis gradum variet. In aqua exiguam expansionem notavit idem* Hallejus, *imprimis suo initium, & ebulliens,* 1/26 *circiter spatii prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experientiis manifestum sit, volumen fluidi calore crescere, frigore decrescere debere, consequenter liquorem ascendere conari, dum ab elatere aeris inclusi deorsum pellitur, & contra, ideoque rarefactionem liquoris obstare descensui ejus, condensationem vero ascensui: experientia tamen constat, hoc obstaculum non impedire, quo minus elateris aerei effectus sint satis sensibiles, quia aer multo magis rarefit & condensatur quam fluidum quodcunque aliud.*

THEO-

(a) Philos. Transact. n. 197 p. 650. & seqq.

THEOREMA 22.

153. *Densitas aeris, cæteris paribus, crescit in ratione ponderum comprimentium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim densitates ut gravitates specificæ (§. 33 *Hydrost.*). Gravitates specificæ sunt ut volumina reciproce (§. 29 *Hydrost.*). Ergo densitates sunt ut volumina reciproce (§. 167 *Arith.*), consequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

154. *Aer inferior densior est superiore.*

DEMONSTRATIO.

Aer superior premit inferiorem (§. 21). Cum ideo inferiori major aeris quantitas incumbat, quam superiori; inferior quoque magis premitur, quam superior (§. 10). Densitas ideo inferioris major est densitate superioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora densiora sunt graviora rarioribus sub eodem volumine (§. 14 *Hydrost.*) & aer gravis existit (§. 20); aer inferior specifice gravior est superiore.

THEOREMA 24.

156. *Densitas aeris inferioris non est ponderi atmosphærico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmosphærici cætera in aere inferiore omnia essent paria, densitates ejus essent ut pondera atmosphærica (§. 153). Sed calor aerem rarefacit, frigus condensat (§. 23. 24), ideoque a calore & frigore densitas diversimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur causæ eandem similiter alterantes. Cum ideo densitas aeris inferioris mutari possit, pondere atmosphærico immutato, ista huic proportionalis non est. *Q. e. d.*

THEOREMA 25.

157. *Si aer redditur densior, pondus corporum in aere minuitur; si rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 33 *Hydrost.*); aer densior specifice gravior est rariori. Corpus igitur aere specifice gravius in densiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56 *Hydrost.*). Unde si aer redditur densior, pondus minuitur; si rarior, augetur. *Q. e. d*

COROLLARIUM.

158. Si igitur densitas aeris sensibiliter alteratur, corporum in aere rariori æquilibratorum, quorum gravitates specificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in densiore, præponderabitque specifice gravius (§. 61 *Hydrost.*).

PROBLEMA 34.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aeris unius pedis cubici ob variationem ponderis atmosphærici acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus atmosphæræ cæteris paribus augetur, aer inferior magis premitur (§. 21), ideoque densior evadit (§. 153), consequenter pes cubicus aeris a compressione gravior fit (§. 9 *Hydrost.*). Sit jam pondus atmosphæræ minimum $= a$, maximum $= b$, pondus aeris a minimo compressi $= c$, pressi a maximo $= x$. Cum densitates corpo-

corporum æqualium ſint ut pondera (§. 16 *Hydroſt.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y, quod volumen aeris datum ob ponderis atmoſphærici variationem acquirere valet, eſt $bc : a - c = (bc - ac) : a$, conſequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmoſphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aeris a minimo compreſſi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmoſphærici acquirere valet volumen aeris datum.

E. gr. Pes cubicus aeris in minima atmoſphæræ gravitate ſit 507 granorum (§. 57). Quoniam $a = 26''$, $b = 28''$ (§. 122); erit $y = 39$ granorum. Incrementum ideo, quod pes cubicus aeris ab omni variatione ponderis atmoſphærici ſuſcipere valet, eſt fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis, quod ipſi a minimo pondere atmoſphærico preſſo competit.

Definitio II.

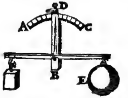
160. *Manoſcopium* eſt inſtrumentum, quod alterationes denſitatis aeris indicat. *Manometrum* eſt inſtrumentum, quod eaſdem metitur.

Problema 35.

161. *Manoſcopium conſtruere.*

Resolutio.

1. Aſſumatur bilanx tam accurate conſtructa, ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus eſt ſuper centro jugi.
2. Ex altero jugi brachio ſuſpendatur globus ex lamina metallica e. gr. cuprea aut orichalcea conſtruendus, ne pondus affrictum in libra augeat (§. 948 *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes eluſurum. Capacitas globi ſit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aer (§. 40).



3. Trutinæ affigatur Quadans ADC ex centro jugi B deſcriptus, ita ut ſecetur in gradu quadrageſimo quinto ab indice BD, ſi jugum fuerit in ſitu horizontali.

Dico, Manoſcopium eſſe conſtructum.

Demonstratio.

Etenim ſi aer denſior redditur, pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam (*vi §. cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix ſpatium a laminæ, ex qua globus conſtructus, ſoliditate repletum occupet, niſus ejus deorſum minus minuitur, quam globi (§. 55 *Hydroſt.*), conſequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis ſpecificæ aeris, in quo hæret, conſequenter & denſitatis (§. 33 *Hydroſt.*) indicat. Eſt ergo machina manoſcopium (§. 160). *Q. e. d.*

Corollarium.

162. Quoniam aeris denſitas & raritas non modo a pondere atmoſphæræ (§. 153), ſed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23. 24); manoſcopium hoc baroſcopium eſſe nequit.

Scholion I.

163. *Equidem* Otto de Guericke (a) & , *qui ipſum ſequitur*, Boylius (b) *idem inſtrumentum pro baroſcopio venditant; ſed non attenderunt, manente eodem pondere denſitatem ac raritatem aeris ſæpiſſime variari.*

SCHO-

(a) In Experiment. de Vacuo lib. 3. C. 31. f. 114.
(b) In Hiſtoria frigoris tit. 17.

SCHOLION 2.

164. *Neque vero putandum est, mutationes gravitatis globi ideo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant, experientia enim contrarium abunde satis confirmat. Certo* Guerickius *se expertum scribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum secundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit, & inprimis ingravescere globum notavit, si pluat. Nec difficulter idem ratione affequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aerei 39 granorum mutationem ob variatum pondus atmosphæricam sustineat (§. 159); bilanx vero unius vel alterius grani accessionem vel ablationem indicare possit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abest globus cum suo contrapondio) oneretur (§. 57); si globus evacuatus pedem aeris cubicum capit, quin variationes densitatis ab atmosphæræ pondere variato pendentes manoscopium nostrum indicet, dubitandum non est. Tanto minus autem dubitare fas est, quod aliæ adhuc densitatis variationes a diverso calore ac frigore aeris factæ, istis minores accedant. Didicit nimirum* Hallejus *aerem ordinarium in Anglia a calore æstivo extendi* $\frac{1}{11}$ *circiter sui voluminis, a maximo autem frigore condensari* $\frac{1}{20}$ *fere. Cum ideo pondus unius pedis cubici aerei sit 507 granorum (§. 57); erit decrementum ponderis in casu priore 39, incrementum in posteriore 25 granorum.*

SCHOLION 3.

165. *Manometri constructionem dedit celeberrimus* Varignonius (a): *de quo alias nonnulla monuimus* (b).

CAPUT VI.

De Motu Aeris.

DEFINITIO 12.

166. *Ventus* est agitatio aeris sensibilis.

PROBLEMA 36.

167. ***Data ratione gravitatis specificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aeris, una cum spatio, quod intra definitum aliquod temporis spatium fluidum istud percurrit ab aere premente impulsum, determinare spatium, quod ipse aer ob æqualem pressionem intra idem tempus emetiri debet.***

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo, ad quam per datam aeris pressionem elevari potest fluidum in medio non resistente $= a$. Sit porro ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b:c$. Spatium, quod fluidum ab aere premente impulsum describit, dicatur s, & denique spatium, quod aer ob æqualem pressionem intra idem tempus emetitur, vocetur x. Quoniam altitudines fluidorum, ad quas propter æquales pressiones elevantur, sunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36 *Hydrost.*); si altitudo, ad quam aer eandem cum fluido pressionem sustinens eveheretur, modo elatere careret, fiat $= y$; erit $c:b = a:y$, consequenter $y = ab:c$. Sunt vero velocitates, quibus fluida ob eandem pressionem elevantur, in ratione subduplicata altitudinum, ad quas ascendunt (§. 87. 322 *Mechan.*), ideoque in casu nostro ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{(ab:c)}$. Quare cum ob temporum suppositum æqualitatem spatia, quæ istis temporibus percurruntur, sint ut velocitates (§. 28 *Mechan.*); erit

(a) Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences An. 1705. p. m. 409. & seqq.

(b) In Element. Aerometriæ p. 184.

$$\sqrt{a} : \sqrt{(ab:c)} = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§. 260 } \textit{Arith.}\text{)}$$

$$ac : ab = s^2 : x^2 \text{ (§. 178 } \textit{Arith.}\text{)}$$

ideoque

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§. 181 } \textit{Arith.}\text{)}.$$

Theorema. Ut gravitas specifica aeris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum spatii, quod fluidum hoc quacunque vi impulsum intra quodcunque temporis spatium percurrit, ad quadratum spatii, quod aer ob eandem pressionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM I.

168. Ergo $x = \sqrt{(bs^2 : c)}$. Unde si ponamus, aquam data vi impulsam intra minutum temporis secundum percurrere spatium 2 pedum; erit $s = 2$, cumque gravitas specifica aquæ sit ad gravitatem specificam aeris ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b = 970$ & $c = 1$, consequenter $x = \sqrt{970 \cdot 4} = \sqrt{3880} = 62' 3'' 6'''$ fere.

COROLLARIUM 2.

169. Est etiam $s = \sqrt{(cx^2 : b)}$, ideoque spatium, quod intra certum aliquod temporis spatium ob certam quandam impressionem fluidum quodcunque emetitur, determinatur, si ad duos numeros, quibus ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris exprimitur, atque quadratum spatii quod aer ob eandem pressionem intra idem temporis spatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arith.*) & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arith.*).

SCHOLION.

170. Mariottus (a) *notat, ventum satis violentum ordinarie spatium 24 pedum intra minutum secundum describere. Quodsi ergo quæratur spatium, quod aqua ob eandem pressionem, quam aer sustinet, intra idem temporis spatium absolvit, erit* $c = 1$, $x = 24$, $b = 970$ *& reperietur* $s = \sqrt{(576 : 970)} = \frac{24}{31}$ fere.

PROBLEMA 37.

171. *Data altitudine, ad quam fluidum quodcunque a pressura aeris elevatur, una cum altitudine, per quam corpus grave intra minutum secundum descendit, determinare spatium, quod fluidum istud intra minutum secundum vi impetus impressi motu æquabili percurrit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo, ad quam fluidum ab aere premente elevatur $= a$, minutum temporis secundum $= b$, spatium quæsitum $= x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acquisitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322 *Mech.*); vis aeris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi, quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquisita ejus est celeritatis, qua corpus motu æquabili intra idem tempus, quo decidit, describere valet lineam altitudinis, ex qua decidit, duplam (§. 92 *Mech.*). Reperietur ideo spatium, quod fluidum intra idem tempus, quo decidit, vi cadendo acquisita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea spatium, quod corpus grave descendens intra minutum secundum describit, $= c$. Quoniam tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum a corporibus cadentibus descriptorum (§. 87 *Mech.*), erit tempus, quo grave decidit per spatium a, $= \sqrt{(ab^2 : c)}$. Quare si motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34 *Mech.*)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = a : x$$

$$2ab = x\sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impressum intra minutum secundum motu æquabili percurrit, est medium proportionale inter altitudinem duplam, ad quam idem ab aere premente elevatur, & altitudinem duplam ejus, per quam grave intra minutum secundum decidit.

(a) Trait. du mouvement des eax p. 126.

SCHO-

SCHOLION.

172. *Ponamus, Mercurium per pressionem atmosphæra in tubo Torricelliano sustentari ad altitudinem* $28''$: *erit ideo in problemate nostro* $a = 28''$. *Porro* $c = 15' \, 1''$ *seu* $181''$ (*pedis Parisini*) (§. 473 Mechan.). *Ergo* x *hoc est spatium, quod ob eandem pressionem Mercurius motu æquabili tempore unius secundi percurreret* $= 2\sqrt{181 \cdot 28} = 142''$ *quam proxime seu* $11' \, 10''$. *Ponamus Mercurium elevari per aeris pressionem nonnisi* $2''$. *Erit in casu problematis nostri* $a = 2''$, $c = 181''$, *ideoque* $x = 2\sqrt{181 \cdot 2} = 38'' = 3' \, 2''$.

PROBLEMA 38.

173. *Data altitudine fluidi, ad quam propter pressionem aeris elevatur, invenire spatium, quod tempore unius minuti secundi ob eandem pressionem percurrere debet aer in medio non resistente.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur, quantum spatium ob pressionem aeris, qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti secundi motu æquabili emetiretur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro
2. Investigari potest spatium, quod aer in medio non resistente ob eandem pressionem percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM 1.

174. Per præsens igitur problema determinari potest spatium, quod aer in vas prorsus evacuatum irruens intra minutum temporis secundum describit. Si enim vas prorsus evacuatum fuerit, aer irruens pressionem sustinet ei æqualem, qua aqua ad altitudinem 32 pedum Parisiensium elevatur (§. 29). Quare spatium, quod aqua ob istam pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili percurreret, est $527''$ (§. 171). Jam cum ratio gravitatis specificæ aquæ ad gravitatem aeris sit 970 : 1, reperietur spatium, quod aer in vas prorsus evacuatum irruens motu æquabili tempore unius minuti secundi percurrere debet, 1367 pedum (§. 167).

COROLLARIUM 2.

175. Si detur differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aeris contiguis, inveniri potest spatium, quod aer ex volumine fortiori elatere instructo irruens in volumen elatere debiliori præditum describit.

SCHOLION.

176. *Sit e. gr. differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aeris contiguis ea, qua Mercurius elevari potest ad altitudinem 2 digitorum; reperietur spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili Mercurius describere valet* $38''$ (§. 171). *Cum jam gravitas specifica Mercurii ad gravitatem aquæ sit ut 14 ad 1* (§. 29) *& gravitas aquæ ad gravitatem aeris ut 970 ad 1, erit gravitas Mercurii ad gravitatem aeris ut 13580 ad 1; ideoque reperietur spatium, quod ob æqualem pressionem aer emetiri debet tempore unius minuti secundi fere 369 pedum. Irruet ergo aer ex volumine fortiori in debilius ea celeritate, qua tempore unius minuti secundi fere 369 pedes percurrere valet. Sit differentia virium elasticarum nonnisi* $3'''$: *reperietur spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili Mercurius describere valet, fere* $13''$, *tandemque spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi aer emetiri debet, 126 pedum* (§. 167). *Ea igitur celeritate, qua tempore unius minuti secundi spatium 126 circiter pedum percurrere valet, aer ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam* Mariottus (a) *observat, ventum satis violentum intra minutum temporis secundum 24 pedes percurrere; ejus celeritas multo minor est ea, qua aer irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elasticarum nonnisi tanta existente, quanta Mercurium in tubo Torricelliano ad altitudinem* $3'''$ *elevare valet.*

COROLLARIUM 3.

177. Quoniam data ratione voluminum aeris primitivi atque compressi inveniri potest altitudo, ad quam aer compressus Mercurium in tubo Torricelliano elevare potest (§. 83); per problema præsens determinari etiam potest celeritas, qua aer cessante compressione seu remota vi premente sese expandit.

PROBLEMA 39.

178. *Dato spatio, quod aer intra minutum secundum percurrit, determinare pressionem, quæ celeritatem istam producere valet.*

RESOLUTIO.

Pressionem determinatam esse patet, si constet altitudo, ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aere

(a) Traite du mouvement des eaux p. 236.

elevandum, tantam pressionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, spatium quod aer intra minutum secundum percurrit $= a$, ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b:c$; altitudo denique, per quam corpus grave intra minutum secundum descendit $= d$; reperietur spatium a fluido tempore unius minuti secundi percurrendum $= \surd(a^2c:b)$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæsita $= a^2c:4bd$. Est itaque

$$4bd:ac = a:x.$$

Theorema. Spatium, quod aer tempore unius minuti secundi percurrit, est ad altitudinem, ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum, ut pressionem efficiat celeritati, qua istud desetibitur, producendæ sufficientem, in ratione composita gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris atque altitudinis quadruplæ, per quam corpus tempore primi minuti secundi descendit, ad spatium aeris prædictum. Sit e. gr. $a = 24'$, seu $288''$ ratio Mercurii ad aerem $b:c = 13580:1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 473 *Mechan.*); erit x minor unica linea seu duodecima digiti parte.

SCHOLION 1.

179. *Apparet ideo, quod exiguas mutationes in baroscopio, sed subitas, ingentes admodum procellæ subsequi debeant: id quod experientiæ consentaneum theoriam nostram confirmat.*

SCHOLION 2.

180. *Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac inprimis determinandus erat situs alarum in molendino alato, qualis nempe requiratur, ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus sit principiis generalibus de motu fluidorum, quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem universali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixisse videamur, cum plus dicere possemus.*

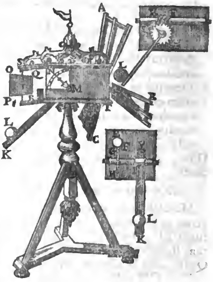
DEFINITIO 13.

181. *Anemometrum* est instrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA 40.

182. *Anemometrum construere.*

RESOLUTIO.



1. Construantur alæ A,B,C,D, quales in molis alatis adhiberi solent, multo tamen minores, a plano verticali sub angulo 54 circiter gradum reclinatæ.
2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. Circumacta deprimat dentes rotæ stellatæ GH.
4. Axi per centrum transeunti infigatur ad angulos rectos brachium satis longum IK, in medio canaliculi instar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L sursum deorsum libere moveri possit, ipsique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus Y.
5. Brachii majoris IK longitudo in quot-

quotcunque partes æquales dividatur, quarum singulæ radio axis æquantur.

6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos insistens, & extra cistam, cui rota stellata cum cochlea perpetua inclusa, eminens.
7. Denique ex centro axis in pariete cistæ exteriore describatur quadrans circuli in 90 gradus more solito dividendus, ab indice vel ascendente, vel descendente indicandus.

Dico, Anemometrum esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Manifestum enim, si alæ A, B, C, D vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi atque ideo rotam stellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota stellata GH eidem axi infigatur *per constr.* ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero distantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat necesse est, quo altius attollitur (§. 796 *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare potest pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipsum elevantis æqualis evadit, motus machinæ sistatur necesse est (§. 75 *Mechan.*) & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere potest, ipsa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabi nequit. Index ideo semper indicat, quantus sit angulus elevationis ponderis, ubi eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§. 793 *Mechan.*), atque ideo per machinam nostram ratio virium ventorum determinari potest, hoc est, vires venti metiri licet (§. 23 *Geom.*). Est igitur anemometrum (§. 181). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

183. *Ut hæc machina sine ullius adjumento alas* A, B, C, D *vento semper obvertat, cistæ* ST *plano, quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus est asserculus* POQR *figuram trapezii parallelarum basium habens. Ventus enim incidens in asserculum* POQR, *machinam circa axem pedamenti mobilem convolvet, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro machinæ erecti fieri potest, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION 2.

184. *Brachio* IK *contrapondium* Y *additur, ut instar lineæ gravitate carentis considerari possit, nec tædia calculi præter necessitatem multiplicentur.*

THEOREMA 26.

185. *Si elater aeris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis, ventus flat per locum, in quo elater imminutus.*

DEMONSTRATIO.

Cum aer per elaterem suum quaquaversum se expandere nitatur (§. 26); si elater uno in loco minor, quam in altero, nisus aeris vi elastica majore præditi adversus aerem vi elastica minore instructum major erit, quam hujus adversus istum. Ergo aer minus elasticus vi minore resistit, quam a magis elastico urgetur, consequenter minus elasticus loco suo pellitur & magis elasticus in eum succedit. Quod si ideo excessus elateris in aere magis elastico super elaterem minus elastici is sit, qui exiguam in baroscopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aeris expulsi, quam in ipsius locum succedentis

dentis sensibilis evadat necesse est (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aer minus elasticus replet (§. 166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

186. Cum aucto pondere comprimente elater augeatur (§. 553 *Mechan.*). Aer vero compressus sit densior minus compresso (§. 78): ventus flat per aerem rarioram ex loco, qui densiore repletur.

COROLLARIUM 2.

187. Quamobrem, quia aer densior rariore specifice gravior (§. 33 *Hydrost.*); extraordinaria aeris aliquo in loco levitas cum ventis extraordioariis seu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM 3.

188. Jam descensus Mercurii extraordinarius in baroscopio aeris lavitatem extraordinariam indicat (§ 120). Non ergo mirum, quod procellas portendat, si subito fiat.

SCHOLION.

189. *Non tamen necesse est, ut aeris levitas semper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aeris subitas pati mutationes. Hinc ventum sat valide flantem hoc ipso temporis articulo experimur, nunc in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, Mercurius in baroscopio consistat, nec nisi* $\frac{1}{5}$ *unius digiti depressior nunc factus, quam heri erat. Imo in maxima depressione ventus sæpe nullus spirat, quia depressio successive, non subito facta.*

COROLLARIUM 4.

190. Si aer alicubi subito condensatur, elater ejus subito minuitur (§. 148). Quodsi ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in baroscopio vix iudicari possit (§. 176. 178); ventus per aerem condensatum flabit.

COROLLARIUM 5.

191. Quoniam vero subito condensari nequit, nisi magnam ante passus fuerit rarafactionem (§. 6. 8); ventus flabit per aerem, dum post æstum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM 6.

192. Similiter si aer subito rarefiat, elater ejus subito intenditur (§. 148), ideoque defluet per contiguum actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75 *Mechan.*). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aer subito rarescit.

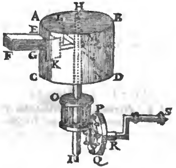
COROLLARIUM 7.

193. Cum vires solis in rarefaciendo aere notissimæ sint; solem in ventorum genesin influere manifestum est (§. 5. 6).

PROBLEMA 41.

194. *Ventum excitare adversus plagam desideratam spirantem.*

RESOLUTIO.



1. Construatur vas cylindricum ABCD ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major esse debet, quo impetuosior ventus excitandus.
2. Vas ipsum sit undequaque probe clausum, solo foramine in E gaudens, cui tubus EF utrinque apertus ante immittendus.
3. Per medium cylindrum transeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum alis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas instructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.
4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato RS 30, vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis SR curvatus semel convolvitur, alter erectus IH 5, vel 4 conversiones absolvit, ideoque alæ

L, M,

L, M, N, K per aerem inclusum celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum ideo tubus versus plagam desideratam dirigi possit; ventus excitabitur (§. 166) adversus plagam desideratam spirans. *Q. e. f.*

S C H O L I O N.

195. *Cum in molis frumentariis axis ferreus* HI *cum curriculo* O *occurrat* (§. 975 Mechan.); *hoc artificio sub lapidibus molaribus facile excitatur ventus partes a granis frumentis abrasas a nucleo eorum separaturus. Tum vero tubus* EF *sacci vices sustinet, & basis* GF *declivis, in* G *vero foramen esse debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abrasa a vento per* F *ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento post triturationem separandas, additis addendis, qua nunc fusius exponere non est nostri instituti.*

C A P U T VII.

De Calore ac Frigore, itemque Humiditate ac Siccitate Aeris.

D E F I N I T I O 14.

196. *Thermoscopium* est instrumentum caloris ac frigoris in aere incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero est instrumentum, quo calorem ac frigus aeris metiri licet.

D E F I N I T I O 15.

197. *Hygroscopium* est instrumentum, quod humiditatis & siccitatis in aere incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero est instrumentum, quo humiditatem & siccitatem aeris metimur.

P R O B L E M A 42.

198. *Thermoscopium construere.*

R E S O L U T I O.

1. Tubo (*Vid. Fig. seq.*) BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur aqua communis regiæ permixta & ab orichalco in hac soluto viredine tincta (§. 149). Opera vero danda est, ut tantum aeris in globo & tubo relinquatur; qui hieme maximam condensationem passus globum exacte repleat & æstate ad summum rarefactionis gradum perductus non omnem ex tubo BC liquorem expellat.



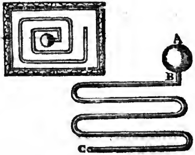
2. Tubus immittatur vasculo vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD apertus, ut aer ejici, iterumque ingredi libere possit, in quo similis liquor contineatur, qualis in tubum immissus.
3. Ab utroque latere tubi applicetur scala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

D E M O N S T R A T I O.

Si enim aer ambiens fit calidior, liquor in tubo descendit; si is frigidior eva-

evadit, hic ascendit (§. 151). Incrementa igitur caloris & frigoris indicat hoc instrumentum, ideoque thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

ALITER.



1. Eodem artificio, quo ante, & cum eadem cautione in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne scilicet longior spatium nimis longum occupet, nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum Mercurii, pisi magnitudinem non excedens.
2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ scalæ vicem sustineant.

Accessus Mercurii ad globum frigoris; recessus vero ejusdem a globo caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ præcedens.

COROLLARIUM I.

199. Quia liquor in thermoscopio primo & Mercurius in altero etiam ascendit, si aer gravior redditur; contra vero descendit, si levior evadit (§. 151): caloris ac frigoris incrementa non satis fideliter exprimit.

COROLLARIUM 2.

200. Quoniam tamen mutationes admodum sensibiles sunt; si aliorum corporum calor examinandus, commode thermoscopio altero utimur: exiguo enim temporis spatio, quo experimentum instituitur, gravitas atmosphæræ sensibiliter non mutatur.

SCHOLION.

201. *Quodsi in thermoscopio primo liquorem colore intense rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum simplicium atque rubidorum malvæ hortensis arefactis, ut color extrahatur. Quodsi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non sine jucunditate colorem intense rubrum emergentem contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque usi sunt artifices.*

PROBLEMA 43.

202. *Thermoscopium Florentinum construere.*

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus thermoscopium paulo ante descriptum premitur (§. 198); mensuram caloris & frigoris quæsivere in rarefactione spiritus vini, utut rarefactione aeris longe minore) §. 152). Thermoscopium vero ab ipsis repertum ita construitur:

1. Frustulis ex radice curcumæ aut anchusæ resectis affundatur spiritus vini rectificatissimus, seu qui, dum accensus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priore enim radice colore flavo, a posteriore autem rubro tingetur.
2. Postea spiritus vini iterum iterumque filtretur per chartam bibulam, ut particulæ crassiores ex radice extractæ remaneant.

3. Spi-

3. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme ſpiritus omnis in globum deſcendat; globum immittere juvat nivi multo ſale conſperſæ aut (ſi æſtivo tempore thermoſcopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ, in qua multum nitri ſolutum, ut ſpiritus condenſatus indicet terminum, quem maximo frigore attingere valet.



4. Quodſi a globo longiore intervallo adhuc diſtet, aliqua ejus portio rurſus expellenda. Ne autem tubus juſto longior fiat, globum ſpiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impoſitæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.

5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice ſigilletur.

6. A latere denique affigatur ut in probl. præc. ſcala EF in particulas quotcunque æquales diviſa.

Demonstratio.

Quoniam ſpiritus vini rareſit & condenſatur (§. 152); calore creſcente, in tubo aſcendet (§. 8); decreſcente, deſcendet (§. 6). Caloris igitur incrementa & decrementa inſtrumentum indicat, conſequenter thermoſcopium eſt (§. 196). *Q. e. d.*

Corollarium 1.

203. Si ſpiritus vini per multos gradus ſcalæ aſcendit, calorem multum creviſſe conſtat; ſi deſcendit, ideo multum decreviſſe intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad heſternum non indicatur, inſtrumentum calorem non metitur (§. 23 *Geom.*) ideoque thermometrum non eſt (§. 196).

Corollarium 2.

204. Liquor in tubo vi gravitatis ſuæ deorſum nititur (§. 4 *Mechan.*), ideoque ex globo in ipſum ulterius aſcendenti reſiſtit tanto quidem magis, quo altius jam aſcendit (§. 10). Præſtaret itaque, ſitum tubi BC eſſe horizontalem.

Corollarium 3.

205. Cum neceſſario aliquid aeris ſuper liquore in parte tubi vacua exiſtat, is vi elateris deorſum nititur (§. 26), ideoque aſcenſui liquoris reſiſtit; & quidem eo magis, quo magis a liquore aſcendente compreſſus (§. 17) majori gaudet elaterio (§. 79) ab actione caloris forte ulterius intendendo (§. 146).

Corollarium 4.

206. Cum experientia conſtet, remiſſiorem caloris gradum facilius cum ſpiritu vini in globo communicari, quam vehementiorem; rarefactiones ſpiritus vini viribus productricibus proportionales non ſunt, inprimis eum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat, quam remiſſior, cui tamen facilius communicari poteſt calor, quam in globo ſtagnanti. Thermoſcopium ideo Florentinum, accedente inprimis reſiſtentia inæquali (§. 204. 205), thermometrum non eſt (§. 196).

Scholion 1.

207. Halleius *author eſt, ſe didiciſſe ex iis, qui ſpiritum vini diu aſſervarunt, quod is ſucceſſu temporis partem vis expanſivæ amittat* (a). *Sed meretur res accuratiori examini ſubjici, vi eorum, quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus* (b).

Scholion 2.

208. *Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæſiverunt, a quo utrinſque gradus reliqui computentur, ut obſervationes eodem vel diverſo tempore in pluribus locis factas conferre inter ſe liceat. Aliqui locum notant, in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit, iterumque alterum tempore æſtivo, dum butyrum juxta globum thermoſcopii poſitum liquefit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod diviſionis me-*

 dium

(a) Tranſact. Anglic. num. 197. pag 650.
(b) Act. Erud. An. 1708. pag. 163 & ſeqq. conf. Logica §. 564. & ſeqq.

stum in ipsorum graduatione calori temperato ecscendet. Partem utramque in 10 gradus subdividunt, tandemque quatuor istiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor itidem super gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero divisionem fieri thermoscopio in umbra collocato, & ne observationes turbentur, versus eandem constanter plagam instrumentum dirigi debere, quam respiciebat, cum divisio absolveretur. Enimvero supponunt, congelationi aquae cujusvis eundem gradum frigoris & liquationis butyri cujusvis eundem gradum caloris respondere, ac singula thermoscopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impressiones. Posterius autem fallere non ignorant, qui experientia edocti, thermoscopia eidem parieti affixa non eundem constanter caloris gradum ostendere, utut eadem utrique graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne prius cum cura examinaturi contrarium similiter experiantur. Differunt enim aquae inter se, differunt inter se butyra: id quod vel sola gravitatis specificae variatio monstrat, ut alia taceamus, quae meditantibus & experimentantibus se offerent.

SCHOLION 3.

209. *Suadent alii, ut globus thermoscopii nivi vel glaciei multo sale conspersa immittatur, & gradus, ad quem spiritus subsistit notetur. Hinc thermoscopium in cellam profundam transferunt, quorsum aeris externi nihil pertingit, ut actionem aeris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique spatium intermedium in 15 vel plures partes aequales dividunt, etiam supra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra absolvatur. Sed ut nonnulla, quae in scholio praecedente jam abunde dicta sunt, quis quaeso respondeat quaerenti: an omni nivi idem sit frigoris gradus? An omni sali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim, frigus a sale nivi permisto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abrasis superficieculis earundem interiorem nucleum summe frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION 4.

210. *Celeberrimus* Hallejus *pro termine fixo assumit eum caloris gradum, quo spiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam supra monuimus, quaenam ratio sit suspicandi, forte nec hunc gradum esse usque adeo fixum. Et licet post ipsum* Amonton (a) *retinuerit ipsum gradum caloris, qui aqua ebullienti convenit, dum thermoscopium Mercuriale construxit, & postea* (b) *hujus ope thermoscopio Florentino talem graduationem applicare docuerit, qua ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diversa sit aquarum gravitas specifica, quae massae ac texturae diversitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem sit: unde opera pretium facient rerum naturalium scrutatores, si factis accuratis experimentis inquirant, quaenam sit gravitatis fluidorum specificae ad calefactionem eorundem respectus.*

SCHOLION 5.

211. *Nondum concipere licet istiusmodi minutias in praxi non esse attendendas: neque enim hactenus demonstratum, quod irregularitates a caussis memoratis pendentes sint minutiae. Lis igitur adhuc pendens nonnisi pluribus experimentis a pluribus praesertim pluribus in locis factis dirimenda.*

SCHOLION 6.

212. Carolus Renaldinus (c) *tradit modum integram graduationem methodo experimentali determinandi, ut habeantur gradus inaequales aequalibus gradibus caloris, dum intenditur, respondentes, quam collectores Actorum Eruditorum Lipsiensium* (d) *his verbis describunt:* „ Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, „ cum annexa bulla, eique infundatur spiritus „ vini tantum, ut sphaerula glacie circumdata „ omnino repleatur, neque tamen aliquid re„ dundet, orificiumque tubi sigilletur herme„ tice. Deinde parentur sex vasa, quorum quod„ libet aquae libram & aliquid amplius potest „ recipere, & in primum infundantur aquae ge„ lidae unciae 11, in secundum unciae 10, in „ tertium 9 & sic porro. His peractis thermo„ metrum mergatur in vas primum eique affun„ datur aquae ferventis uncia una, observetur„ que quousque ascendat spiritus in collo & lo„ cus unitate notetur. Porro transferatur in „ vas secundum, cui injectae aquae ferventis un„ ciae duae denuoque notetur locus, ad quem „ ascendit spiritus, notetusque binario & sic „ deinceps. Quodsi cui placeat ulterius proce„ dere, donec tota aquae libra sit infusa, per„ fectius erit instrumentum elaboratum, nem„ pe duodecim numeris aut asteriscis distinctum, „ quibus caloris termini denotantur.

SCHOLION 7.

213. *Facile incautis imponere poterat* Renaldinus, *ut sibi persuaderent, hac ratione exactam caloris mensuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus & effectus respondentes gradus uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde vicissim cognoscentur gradus simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus dati ad calorem cujuscunque alterius, consequenter calorem metiri licet* (§. 23 Geom.). *Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quaeso, supposita, ne forte aliquid esse ponamus, quod non est,*

(a) Memoir. de l'Acad. Royal. des Scient. An. 1702. p. m. 210. & seqq.

(b) Memoir. de la meme Acad. An. 1703. p. m. 63. & seqq.

(c) In Philos. Nat. dissert. 16. sect. 11.

(d) Supplem. Tom. 4. sect. 10. pag. 453.

est, sicque erroneam conclusionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris simplum, si 11 unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, si 10 affundantur duo; triplum, si 9 tres; quadruplum, si 8 quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem simplum vi simpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in spiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, si idem effectus in thermoscopio a calore aëris ambientis producitur, qui ab aqua calida producebatur, aëri eundem competere caloris gradum, qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his suppositis verum est. Quod enim primum attinet, concedamus interea, calorem aquæ ferventis, si frigida affundantur, per hanc æqualiter distribui. Distribuentur ideo unus caloris gradus per partes undecim; duo per 10; tres per 9; quatuor per 8 &c. Si itaque assumamus æqualia istarum aquarum volumina, e. gr. singularum partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto casu &c. Fallit ergo suppositum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam, cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in spiritum vini uniformiter agit, id est, eadem vi per omne tempus actionis suæ. Prius experientiam vulgi non fugit, ut ideo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus sit. Posterius facillime ostenditur. Notum nimirum est, requiri aliquod temporis spatium, antequam calorem suum cum spiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis spatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. si vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diversis sub initium immersionis globi esset nunc simplus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aëris non modo in spiritum vini in globo, sed & in tubo contentum agit, idemque non istum modo, verum etiam hunc rarefacit. Imo nondum constat, num omnia fluida, in quibus idem est gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem suum communicent: nec forte hæc disquisitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri possent. Sufficit situs consinere, methodum Renaldinianam *suppositis niti partim precariis, partim manifesto falsis, ut ideo ratio nulla sit, cur vulgari divisioni in partes æquales hæc in partes inæquales divisio mechanica præferatur.*

SCHOLION 8.

214. *Ceterum quamvis mutationes thermoscopii Florentini admodum sensibiles existant, ita ut spiritus vini per notabile intervallum ascendat, manu calida admota, iterumque descendat, ea remota; ubi tamen per insigne intervallum tempore hiemali descendit, ascensus intervalla decrementis frigoris non satis respondent. E. gr. hoc ipso (a) anno die 9. Jan. h. 8. mat. liquor in thermoscopio meo descenderat usque ad 71mum gradum scalæ frigoris, cum consueta phænomena frigus intensum loquerentur: sed cum die 18. Jan. eadem hora tempestate jam multo mitiore ad gradum 80vum subsisteret, hora tertia, qua nix & glacies ad pristinum fluiditatis statum reducebantur, spiritus ad 71mum hærebat. Scilicet ad eundem sæpius gradum depressus cernitur liquor, cum tamen phænomena alia diversitatem caloris ac frigoris insignem manifesto prodant. Imo interdum depressio spiritus major cum effectione frigoris remissioris; minor vero cum effectibus multo intensioris conjungi solet. Et hæc observantur, etiamsi thermoscopium collocetur in loco, ad quem aëri externo liber patet aditus. Ratio phænomeni hæc mihi videtur. Experientia constat frigore invalescente multum aëris ex fluidis expelli: id quod testantur vesiculæ tum superficiebus vitrorum, in quibus continentur, adhærentes. Extra dubium itaque positum videtur, frigore intenso ex spiritu quoque vini in thermoscopio aërem ejici & per tubi vacuam partem expandi. Cum ideo aër ambiens calidior rursus redditur, inclusi elater augetur spiritusque ascensura resistit (§. 146). Quoniam vero per experimenta* Mariotti (b) *determinata quædam aëris quantitas in fluido salis instar dissolvitur; aër a frigore expulsus crescente calore sensim sensimque spiritui rursus permiscetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes semper erunt justis minores.*

EXPERIENTIA 6.

215. *Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exsiccabatur, ad pristinam redibat dimensionem. Multo autem brevior evadebat, ubi sub aqua per aliquod tempus ipsum detinueramus. Huc pertinent, quæ* Schvventerum *expertum esse in Geometria* (c) *annotavimus. Et* Guilielmus Molyneux, *Armiger atque Societatis Dublinensis Secretarius, istiusmodi funem humectatum cum appenso pondere suspendit, eaque pro ratione exsiccationis resolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida ple-*

(a) Scilicet 1713. quo prima horum Elementorum editio prodiit.
(b) Essay de la Nature de l'Air pag. 97 & seqq.
(c) §. 129. pag. 93.

num admovisset, ascendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque cessante rursus resolutus. Imo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit celeriterque resolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito (a).

Corollarium.

216. Sola igitur humiditas aeris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipsosque funes arctius contorquere valet.

Scholion.

217. *Humor nimirum dimensionem funis secundum diametrum auget. Sed cum gyri spirales filorum contortorum fere in circulares abeant, autopsia teste, dimensio secundum longitudinem decrescit. Abbreviationis igitur causa non modo ab insinuatione humoris in poros funium, sed & imprimis a spirali eorundem textura petenda.*

Experientia 7.

218. *Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat 1′ 14″ circiter juxta mensuram Rhenanam experti sumus. Cum enim eundem duobus clavis utraque sui extremitate alligatum juxta fenestram apertam extendissemus, & ope pauculæ ceræ indiculum ligneum applicassemus, per complures dies non sine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum sole oriente ros decideret, ita ut fere semicirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus descripsisse notaretur. Ast Solis radiis illustratus nervus iterum resolvebatur atque indiculum ultra terminum reducebat, in quo eum sub ortum solis conspexeramus, cum fenestram cubiculi noctu clausam primum aperiremus. Non tamen singulis diebus æquales indiculi itus reditusque notavimus. Eundem nervum sub aqua demersum sensibiliter contorqueri didicimus: satis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non secus ac si duo manibus prebendentes ejus extremitates ipsum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus, quam cum eundem aquæ immitteremus, & radiis licet solaribus exsiccatus ad pristinam longitudinem reducturi vires eludebat.*

Scholion.

219. *Similia se expertum testatur* Sturmius (b). *Non ignoro, quod alii* (c) *contrarium accidere affirmant; sed quid alii experti sint, mihi quidem haud constat, cum circumstantias singulares non annotent. Mihi rem ennarrare libuit, prouti eandem expertus sum.*

Problema 44.

220. *Hygroscopium construere.*



Resolutio.

1. Funem cannabinum aut nervum fidium AB juxta parietem extende super rotula B alterique ejus extremo D pondus E alliga, cui infixus sit stylus IG.
2. Eidem parieti affigatur lamina metallica

(a) Philos. Transact. Anni 1685. n. 161. p. 1032. conf. Acta Erudit. An. 1686. p. 389. 390.

(b) In Colleg. Curios. part. 2. tent. 14. phæn. 5. pag. 124. & seqq.

(c) Traitè des barometres, thermometres & notiometres pag. 34.

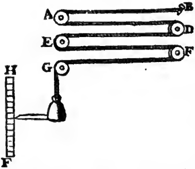
tallica HF in partes quotcunque æquales divisa.

Dico hygroscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem sensibiliter abbreviet, humore autem rursus exspirato iterum resolvat (§. 215): pondus humore aeris aucto ascendet, imminuto descendet. Et quoniam index IG in lamina HF spatium monstrat, per quod pondus ascendit, vel descendit, intervalla vero ascensus & descensus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia sunt; instrumentum indicat, num dato hoc tempore aer plus alat humoris, quam alio habuit. Est igitur hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

ALITER.

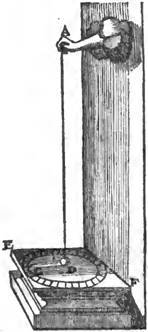


Si hygroscopium sensibilius desideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero est, sive partes funis AB, AD, DE, EF, FG sint horizonti parallelæ, ut in schemate expressimus, sive ad eundem perpendiculares: pro-uti nempe quolibet in casu commodum visum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum præcedente.

ALITER.

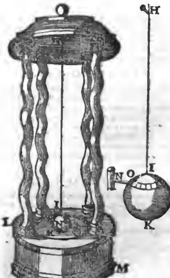


1. Funis cannabinus AC aut nervus fidium altera sui extremitate unco ferreo A alligetur, altera vero C in centro tabulæ ligneæ EF horizontaliter positæ firmetur.
2. Prope C infigatur pondus plumbeum D unius circiter libræ cum annexa regula DG.
3. Ex centro C in tabula describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus. DE-

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aeris, qualem secum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rursus extemplo resolvatur (§. 215. 218); evidens est, quod humore aeris aucto index quantitatem contorsionis vel resolutionis monstrare, consequenter humiditatis & siccitatis incrementa indicare debeat. Est igitur instrumentum hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

ALITER.



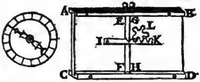
1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero sui extremo suspendatur ex unco H.
2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.
3. Limbo pedamenti LM inscribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & spatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.
4. Globo infigatur stylus NO, cujus extremitas O limbi divisionem fere attingit.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & siccitatis aeris ostensurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ proxime præcedens.

ALITER.



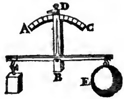
1. Parentur subscudes fulcatæ AB & CD ex ligno quercino.
2. Intra crenas oppositas aptentur asserculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri possint.
3. In extremitatibus subscudium A, B, C, D clavis firmentur asserculi & inter utrumque relinquatur spatium EGHF, cujus latitudo EG unius circiter digiti.
4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cujus axi in altera machinæ facie index inseratur.
5. Tandem ex centro axis in eadem facie describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum enim experientia teste lignum abietinum humorem aeris facillime imbibat ac inde turgescat, humore autem rursus exspirato tabescat: si aeris humiditas augetur, asserculi AF & BH humore turgescentes propius ad se invicem accedunt; si illa rursus minuitur, iidem asserculi tabescentes denuo a se invicem discedunt. Quoniam vero distantia asserculorum nec minui potest sine rotulæ L convolutione, nec augeri; index demonstrabit incrementa humiditatis & siccitatis aeris. Est igitur machina constructa hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

ALITER.



Manoscopium superius descriptum (§. 161) in hygroscopium abit, si globo evacuato E substituas spongiam, aut materiam quandam aliam, quæ humorem facile imbibit. Solet autem spongia primum aqua communi, deinde, ubi bonam partem rursus exsiccata fuerit, aqua vel aceto, in quo aliquid salis Armoniaci seu salis tartari dissolutum fuerit, macerari atque in loco umbroso denuo exsiccari.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer humidus evadit, spongia gravior reddita præponderat; si ille levior redditur, hæc rursus altius tollitur experientia teste, ideoque index incrementa & decrementa humiditatis indicat. Est ergo hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

221. *Omnia hygroscopia, quæ hactenus descripta sunt, sensim sensimque a perfectione sua deficiunt, tandemque ab humiditate aeris parum aut nihil mutationis patiuntur. Usus ultimi est magis diuturnus, quam cæterorum omnium.*

SCHOLION 2.

222. *In hygroscopio ultimo* Gouldius (a) *loco spongiæ omnium maxime commendat oleum vitrioli, quod indies in tantum augeri observavit, ut intra spatium 57 dierum a tribus drachmis ad drachmas novem & 30 grana ascenderet. Enimvero non annotat, num etiam humiditatem tam prompte rursus dimittat, quam eam attrahit: de quo valde dubito, ideoque præsenti instituto oleum vitrioli minime congruum judico.*

SCHOLION 3.

223. *Cæterum quilibet me non monente videt, structuram hygroscopiorum multis modis variari posse.*

(a) In Actis Erudit. An. 1685. pag. 315.

Finis Elementorum Aerometriæ.

ELE-

ELEMEMTORUM HYDRAULICÆ.

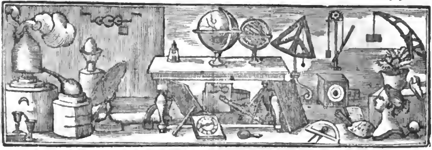
PRÆFATIO.

IN Hydraulica non modo machinarum, quibus aqua elevatur, atque fontium salientium constructio edoceri debet; sed explicandæ sunt præterea leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius stupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel soli libri spiritalium *Heronis* aperte loquuntur; ita diffiteri non possumus, in posteriore excolendo posteris adhuc multum relictum esse, utut præclara jam dederint viri de Hydraulica optime meriti *Majottus*, *Castellus*, *Torricellius*, *Borellus*, *Guilielminus*, *Mariottus* & inprimis celeberrimus *Varignonius* [a]. Imo ipsa machinarum Hydraulicarum constructio Matheseos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod indies magis magisque excolatur. Si enim machinas Hydraulicas

(a) Memoires de l'Academie Royal. des Sciences An. 1703. p. 285.

fontesque salientes spectes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poetis ingeminari solet, quod non minus prodesse, quam delectare velit. Egregia scilicet vitæ humanæ commoda præstat, dum varias vias ostendit, per quas aqua ad locum datum derivari potest. Mirifice delectat, dum jucunda fontium salientium aliorumque admirandorum spectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad scientiæ naturalis, tum ad machinarum perfectionem tendunt: & si quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali distinctius cognoscetur, unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potissimum propositum sit, machinarum Hydraulicarum constructionem exponere & ad causas suas revocare; non tamen leges motus fluidorum prorsus insuper habebo, sed eas propositurus sum, quæ ad ulteriorem disquisitionem viam sternunt & præ reliquis scitu necessariæ sunt. Has meditentur inprimis illi, quos rerum naturalium cognitio solidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, nisi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydrostatica, proprietates aeris ex Aerometria perspexerit.

ELE-



ELEMENTORUM HYDRAULICÆ.

CAPUT I.

De Motu Fluidorum a Gravitate Pendente.

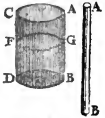
DEFINITIO I.

1. HYdraulica est ſcientia motus fluidorum, præſertim aquarum.

SCHOLION.

2. *Quare cum in Hydroſtatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex ſublato autem æquilibrio motus naſcatur; Hydraulica Hydroſtaticam ſupponit. Unde contingit, ut nonnulli, qui de Hydraulica ſcripſere, hydroſtaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO 2.



3. Per *tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO 3.

4. *Lumen* eſt apertura tubi.

DEFINITIO 4.

5. *Epiſtomium* vel *Clavicula* eſt inſtrumentum; quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri poteſt.

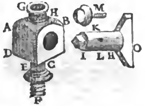
SCHOLION.

6. *Quoniam in machinis Hydraulicis epiſtomii creberrimus eſt uſus, non inconſultum ducimus, ut ejus ſtructura hic exponatur.*

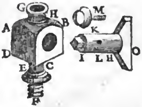
PROBLEMA I.

7. *Epiſtomium vel claviculam conſtruere.*

RESOLUTIO.



1. Paretur ex orichalco cubus ABCD cum gemina tubi parte GH & EF,



quarum altera EF cochlea instrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri possit, aut si cochlea destituatur, tubo vel vasi afferruminetur.

2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti possit cylindrus solidus HI perforatus in K, & in L matrice, in O manubrio instructus, ut per cavitatem cylindri trajectus mediante cochlea M in hoc situ firmari, & ope manubrii O huc illucque versari possit.

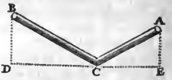
3. Perforetur similiter uterque tubulus GH & EF.

Quodsi enim cylindrum solidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF respondeat, aqua in F effluere potest: si vero idem cylindrus HI soliditatem foraminibus iisdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, ideoque instrumentum est epistomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLION.

8. *Perfectissimam epistomii constructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumstantiis singularibus, si qua omitti possint. Ita e. gr. communiter omittitur cochlea* M *cum matrice, qua cylindrum* HI *intra cavitatem tubi* AC *firmandum esse diximus. Neque cochlea* F *semper adest & tubus* GF *sæpius horizontalis est.*

THEOREMA I.



9. *Locus* A, *ad quem aqua ex loco alio* B *sive per alveum, sive per tubos aut canales derivanda, humilior seu centro Telluris propior esse debet hoc ipso altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat, nisi vi gravitatis, gravitas vero sit nisus versus centrum Telluris (§. 4 *Mechan.*): per alveum fluere nequit, nisi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere potest. Necesse igitur est, ut locus, ad quem aqua per alveum fluere debet, centro Telluris propior sit altero, unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodsi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum descendat ex B in C, deinde rursus ascendat ex C in A: sit DE linea horizontalis per C ducta, & BD atque AE ad eandem perpendiculares. Sit jam AE < BD, pressio aquæ in tubo BC major est pressione aquæ in tubo AC (§. 34 *Hydrost.*). Ista igitur prævalet, ideoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero si AE > BD; quamprimum aqua in tubo AC ascendit ad altitudinem ipsi BD æqualem, alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34 *Hydrost.*), ab ea igitur ad ulteriorem ascensum sollicitari nequit (§. 75 *Mechan.*). Sed vi gravitatis deorsum nititur versus C (§. 4 *Mechan.*), ideoque nec

nec vi intrinseca ascendere potest. Ibi igitur subsistit, consequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, nisi A sit humilior B. *Quod erat alterum*.

COROLLARIUM I.

10. Cum alveus vel tubus BC, per quem aqua fluit ex B in C, sit planum inclinatum (§. 258 *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari possunt, quæ in Mechanica cap. 6. de descensu gravium in plano inclinato demonstrata sunt.

COROLLARIUM 2.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diversos tubos fluentium eodem tempore acquisitæ ut tuborum longitudo reciproce (§. 302 *Mechan.*).

SCHOLION.

12. *Insuper hic & in sequentibus habemus resistentiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi* (§. 933 Mechan).

PROBLEMA 2.

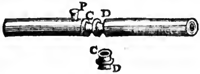
13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum*.

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§. 912 *Mech.*) hoc est, investigetur, quam propior centro Telluris sit locus, ad quem aqua derivanda est, altero, unde derivatur (§. 904 *Mech.*).
2. Quodsi locus ille hoc humilior fuerit, non alia re opus est, quam ut aqua vel per canalem, vel per tubos declives ex loco excelsiore in humiliorem deducatur, prout vel magna, vel exigua ejus suppetit copia.
3. Ut aqua per intervalla nobis commoda visa effundatur extremum tubi epistomio muniatur (§. 5).
4. Et quia experientia teste fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, sed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipsum assurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, sicque per ipsum celerius fluat.
5. Si tubus vel canalis per intervalla sufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua remoto epistomio continuo fluens intra puteum ex saxis exstructum colligatur necesse est: qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.
6. Si denique aqua (*Vid. Fig.* §. 9) ad terminum infimum C delapsa rursus ascendere debet, deducenda est per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD (§. 9).

SCHOLION I.

14. *Utimur autem in deducendis aquis tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo est 4, 5 vel 6 digitorum pro quantitate aquæ effundendæ;*



conjunguntur autem annulo ferreo CD. *Tubo plumbeo locus est, si aqua in altum elevanda ad fontes salientes: neque vero sanitati conducere deprehensa est aqua, quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior superficies lithargyrio obducenda; imo & exterior, nisi sumtibus parcas. Longitudo eorum est duorum aut unius & dimidii pedum, crassities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commissuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.*

SCHOLION 2.

15. *In alveo, quem prope fontem construxisti, ita aptandus est tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex superfi-*

ſuperficie hauriat, quia prope fundum turbida, gravioribus, quæ in aquam incidunt, fundum petentibus, ſuperficiei vero infecta, aliæque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad arcendas ſordes lumini canalis primo cribrum ferreum ſed ſtamno obductum apponere, imo ad percolandam aquam turbidam ſpongiam. Ut aqua conſervetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præſtat.

SCHOLION 3.

16. *Ne aër interceptus curſum aquarum in canale intercipiat, ſed exituri ei concedi queat, utque canalis ipſe purgari poſſit, quoties opus fuerit; hinc inde eſt perforandus & obturaculo figuram coni truncati habente foramen obturandum.*

SCHOLION 4.

17. *Cæterum omni ſtudio in deducendis aquis vitandus eſt aquarum aſcenſus, quia aqua aſcendens majorem vim infert, quam deſcendens.*

PROBLEMA 3.

18. ***Fontem naturalem arte conſtruere.***

RESOLUTIO.

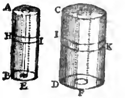
1. In loco elevato paretur foſſa aggeribus undequaque cincta & variis meatibus ex cruſtis lapideis excitatis hinc inde diſtincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine inſtructum.
2. Foſſa hæc deſuper ſilicibus, calculis & ad duos treſve pedes glarea operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari poteſt, cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus deſtillabit aqua & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLION.

19. *Si intra meatus foveæ tantum aquæ non contineatur, ut perennis fluat, orificio meatus ultimi tubus cum epiſtomio aptandus.*

THEOREMA 2.



20. *Si duo tubi æquales altitudines* AB & CD, *atque æqualia lumina* E & F *habuerint, fuerint que ambo conſtanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.*

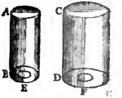
DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia ſunt & altitudines aquæ ſuper iiſdem etiam æquales *per hypoth.* aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (*§. 42 Hydroſt.*), ideoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum, conſequenter ſi aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus inclinati, ubi utriuſque altitudo eadem fuerit, ipſique fundi inter ſe æquentur (*§. 47 Hydroſt.*); ſi tuborum utcunque inclinatorum, modo æqualtorum lumina fuerint æqualia, tubique conſtanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA 3.



22. *Si duo tubi æquales altitudines* AB, *&* CD, *ſed lumina inæqualia* E & F

E & F *habuerint, fuerintque constanter pleni, quantitates aquarum effluentium eodem tempore sunt ut lumina* E & F.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus divisum in plura minora alteri E æqualia: per singulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundentur illi æquales, quæ per lumen minus effunditur (§. 20). Sunt ideo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effusarum ut lumen minus ad numerum partium, in quas divisum concipitur majus, hoc est, ut lumen minus ad majus (§. 86 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

23. Si lumina fuerint circularia, quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & constanter plenis effusæ sunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt in ratione duplicata diametrorum. Patet eodem modo, quo corollarium theorematis præcedentis (§. 21).

SCHOLION.

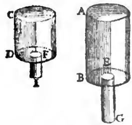
25. *Legem hanc experimentis non exacte respondere auctor est* Mariottus (a). *Observavit enim, si diameter luminis* F *erat diametri luminis* E *dupla, ex tubo minore plus quam quartam aquæ ex majore effluentis partem eodem tempore effundi, tuborum altitudine modica existente. Enimvero in demonstratione abstrahimus ab omnibus obstaculis accidentalibus, quæ irregularitatem inducere solent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet altitudo aquæ super lumine minor, quam ad latera vasis: aqua enim in ea voluminis parte, quæ lumini respondet, cavitatem assumit, cum effluenti non extemplo alia a lateribus succedere valet. Quoniam vero hoc decrementum altitudinis majus est in tubo majore, quam in minore, pressura quoque seu exeundi conatus minor erit in majore, quam in minore (§. 44* Hydrost.). *Porro dum aqua superior effluentis locum occupare nititur, vim, qua premit, ad descendendum impendit, non ad premendum. Unde denuo conatus ad exeundum minuitur. Tandem hic quoque habenda est resistentiæ aeris & affrictus aquæ in superficie tubi & orificio imprimis ratio. Enimvero omnia illa impedimenta ad certas leges nondum revocata: imo hactenus ne quidem constitutum est, quodnam eorum in casu quolibet dato prævaleat.* Dechales (b) *affrictus unice rationem habens, in aqua effundenda prærogativam majoribus luminibus tribuit, quia proportionaliter minorem superficiem habent, cum tamen ex modo dictis pateat,* Mariottum *prorsus contrarium expertum esse. Ipse vero* Mariottus (c) *non diffitetur, dari subinde causas, quæ multas irregularitates inducant, ita ut nunc majoribus, nunc minoribus luminibus in aqua effundenda tribuenda sit prærogativa, & assertum suum experimentis confirmat.*

(a) Trait. du mouvement des Eaux part. 3. disc. 1. p. 267.

(b) In tract. de fontibus naturalibus prop. 30. f. 132. Tom. 3. Mund. Mathem.

(c) Loc. cit. disc. 2. pag. 276.

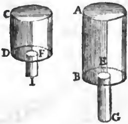
THEOREMA 4.



26. *Si duorum tuborum constanter plenorum* AB & CD *lumina* E & F *æqualia fuerint; quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. aquam ex tubo AB effluere ea celeritate, quæ sit ad alteram ex tubo CD effusæ in ratione dupla. Quia hic tantum ratio habetur motus instantanei per foramen; motus aquæ ut æquabilis considerari potest, ideoque celeritates erunt ut spatia eodem tempore percursa (§. 33 *Mech.*). Quodsi ergo filum aliquod aquæ in tubo AB extenderetur usque ad G; filum ex altero usque ad I: erunt longitudi-



tudines EG & IF in ratione dupla seu celeritatum. Enimvero quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut fila ista seu cylindri EG & FI: quorum bases E & F cum æquales sint *per hypoth.* altitudinum EG & FI rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sunt ideo etiam quantitates aquarum effluentium ut celeritates (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 5.

27. *Si duo tubi habuerint (Vid. Fig. ut sup.) lumina* E & F *æqualia, sed altitudines* AB & CD *inæquales, fuerintque constanter pleni, quantitas aquæ effluentis ex majore* AB *erit ad quantitatem aquæ effluentis ex minore* CD *eodem vel æquali tempore, in ratione subduplicata altitudinum* AB & CD.

DEMONSTRATIO.

Cum vires aquas per lumina E & F expellentes sint gravitates absolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem *per hypoth.* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia sunt vires mortuæ (§. 9 *Mechan.*), si quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & *a*, celeritates ut C & *c*; erunt vires ut A.C ad *a.c* (§. 278 *Mechan.*), consequenter A.C ad $a.c = AB:CD$ (§. 167 *Arith.*). Est vero etiam $A:a = C:c$ (§. 26), ideoque (cum porro sit $A:a = A:a$) $A.C:a.c = A^2:a^2$ (§. 185 *Arithm.*). Quare $A^2:a^2 = AB:CD$ (§. 167 *Arith.*) & hinc $A:a = \sqrt{AB}:\sqrt{CD}$ (§. 124 *Analys. finit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F affluentium sunt in ratione duplicata ipsarummet aquarum eodem tempore affusarum.

COROLLARIUM 2.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium sunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione subduplicata altitudinum.

PROBLEMA 4.

30. *Data ratione aquarum effluentium per utrumque (Vid. Fig. ut supr.) tubum* AB & CD *una cum altitudine unius, invenire altitudinem alterius.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad numeros, qui rationem aquarum effluentium exprimunt & radicem altitudinis datæ numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*).
2. Ducatur is in seipsum; erit factum altitudo CD quæsita (§. 28).

SCHOLION 1.

31. *Cum ex altitudine data rarissime radicem perfectam extrahere liceat, ut altitudo quæsita e exacte inveniatur, per regulas Arithmeticæ irrationalium operandum. Sit e. gr. ratio data* 3:5, *altitudo data* 7, *reperietur radix altitudinis quæsitæ* $5\sqrt{7}:3$. *Unde habetur altitudo ipsa quæsita* $\frac{25}{9}.7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION 2.

32. *Quodsi cui leges Algorithmi irrationalium non fuerint perspectæ, is faciat ut* 3 *ad* 5 *ita* 7 *altitudo data ad numerum quartum proportionalem* $\frac{35}{3}$ &

porro

porro ut 3 *ad* 5 *ita* $\frac{35}{9}$ *ad altitudinem quæsitam, quæ ut ante* $= 5 \cdot \frac{35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. *Sit enim universaliter* $3 : 5 = a : b$, $7 = c$; *reperietur per resolutionem problematis altitudo quæsita* $= b^2c : a^2$. *Sed quarta proportionalis ad* a, b *&* c *est* bc : a *&* *tertia proportionalis ad* c *&* bc : a *est ut ante* $b^2c : a^2$. *Unde patet inferri posse*, ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæsitam: *id quod etiam ex demonstratione theorematis quinti* (§. 27) *liquet. Atque hac analogia commodissime utuntur, qui a tricis algorithmi irrationalium sibi metuunt.*

P R O B L E M A 5.

33. *Data ratione altitudinum tuborum constanter plenorum & per æqualia lumina aquas effundentium, una cum quantitate aquæ ex uno effusa, invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.*

R E S O L U T I O.

1. Quæratur ad altitudines datas & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effusæ numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque si radicem quadratam extrahas (§. 269 *Arith.*) prodibit ipsa quantitas aquæ quæsita.

E. gr. Sint altitudines tuborum ut 9 ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effusa duorum pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(4 \cdot 25 : 9)} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

T H E O R E M A 6.

34. *Si duorum tuborum constanter plenorum (Vid. Fig. pag. præc.) altitudines* AB *&* CD *fuerint inæquales, lumina* E *&* F *itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione composita ex simplici luminum & subduplicata altitudinum.*

D E M O N S T R A T I O.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & l habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sint P & q. Porro altitudo tubi tertii $= A$, lumen $= L$, quantitas aquæ dato tempore effluentis Q: erit

$$P : q = L : l \quad (\S. 22).$$
$$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a} \quad (\S. 27).$$

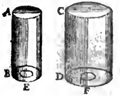
Ergo $PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 213 *Arith.*).

Unde $Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$, consequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299 *Arith.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260 *Arith.*), hoc est, si quantitates aquarum ex duobus tubis constanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina sunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

T H E O R E M A 7.



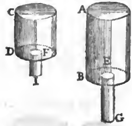
36. *Si altitudines duorum tuborum constanter plenorum* AB *&* CD *æquales fuerint, aquæ per lumina* E *&* F *utcunque inæqualia eadem celeritate effluunt.*

D E M O N S T R A T I O.

Illud per se patet, si præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia, aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adsit disparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus divisum in partes quotcunque, quæ singulæ minori lumini æquales sint.

Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur, ac si per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a pressione perpendiculariter imminentis (§.215 *Mech.*); evidens est eandem in singulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit, qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.



37. *Si altitudines tuborum constanter plenorum* AB & CD, *itemque lumina* E & F *inæqualia fuerint; celeritates aquarum effluentium sunt in ratione subduplicata altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum a, a & A, lumina eorundem L, l & L, velocitates aquarum effluentium u, v & c. Quia $L = L$; erit $u : c = \sqrt{\mathrm{a}} : \sqrt{A}$ (§.29). Est vero $\mathrm{a} = a$, *per hypoth.* ideoque $\sqrt{\mathrm{a}} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c = \sqrt{\mathrm{a}} : \sqrt{A}$ (§. 168 *Arith.*). Porro ob $\mathrm{a} = a$, *per hypoth.* etiam $u = v$ (§. 36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§.168 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

38. Cum altitudinibus inæqualibus existentibus aquarum per æqualia lumina fluentium celeritates similiter sint in ratione altitudinum subduplicata (§.29), hæc vero ratio æqualitatis sit, si altitudines æquales; patet in genere celeritates aquarum ex tubis constanter plenis effluentium esse in ratione altitudinum subduplicata.

COROLLARIUM 2.

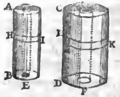
39. Quadrata igitur velocitatum sunt ut altitudines (§. 260 *Arith.*).

SCHOLION.



40. Mariottus (a) *multiplici experimento docuit, si ad vas* ABDC *applicetur tubus* EF, *plus aquæ per tubum æquali tempore effluere, quam per idem lumen vasis* E, *tubo remoto, & motum aquæ eo magis accelerari, quo tubus* EF *longior. Cum altitudo vasis* AC *esset unius pedis, tubi vitrei* EF *longitudo trium pedum, diameter luminis trium linearum; intervallo unius minuti effundebantur* $6\frac{1}{6}$ *sextarii aquæ, tubo autem remoto nonnisi* 4 *circiter. Cum longitudo tubi* EF *esset* 6 *pedum, diameter luminis* F *unius digiti, aqua omnis intra* 37 *minuta secunda effluxit. Cum vero tubi dimidium* FH *resrinderetur, vas integrum intra* 45″ *; tubo prorsus remoto intra* 95″ *evacuatum est. Tubo nimirum applicato altitudo aquæ incumbentis & egressum orificio tubi proxime urgentis major est; ideoque motus aquæ magis acceleratur.*

THEOREMA 9.



41. *Si duo tubi* AB & CD *fuerint ejusdem altitudinis & lumina* E *atque* F *æqualia habuerint; tempora, quibus deplentur, sunt in ratione basium.*

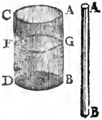
DEMONSTRATIO.

Sit basis tubi CD dupla basis tubi AB.

(a) Traitè du mouvement des eaux part. 3. disc. 6. pag 28? & seqq.

AB. Quoniam altitudines æquales sunt *per hypoth.* quantitates aquarum in tubis contentæ basium rationem habent (§. 573 *Geom.*), ideoque ex hypothesi aqua in tubo CD dupla est aquæ in tubo AB. Concipiatur altitudo utriusque tubi in partes infinite parvas divisa, erit cylindrulus ejusmodi altitudinis in tubo majore CD duplus cylindruli in tubo minore AB. Uterque autem in utroque tubo eadem celeritate per lumen ejicitur (§. 36) & quia lumina æqualia sunt *per hypoth.* eædem quantitates aquæ eodem instanti fluunt per utrumque lumen. Ergo eodem tempore, quo cylindrulus HI effluit, nonnisi dimidium alterius LK ejicitur: ut ideo alterum dimidium expellatur opus est instanti altero. Tempuscula itaque, quibus cylindruli HI & LK effluunt, sunt in ratione subdupla, nempe ut bases tuborum AB & CD. Idem cum de ceteris eodem modo demonstretur, patet tempora, quibus integri tubi evacuantur esse in ratione basium (§. 187 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.



42. *Vasa cylindrica & prismatica* ABDC *ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decrescant secundum numeros impares ordine retrogrado sumtos.*

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG descendentis continuo decrescit in ratione subduplicata altitudinum decrescentium (§. 38). Velocitas gravis descendentis crescit in ratione subduplicata altitudinum crescentium (§. 87 *Mech.*). Talis igitur est motus libellæ FG ex G in B descendentis, ac si inversa ratione ex B in G descenderet. Sed si ex B in G descenderet; æqualibus temporibus spatia crescerent secundum numerorum imparium progressionem (§. 86 *Mech.*). Ergo secundum eandem progressionem inverse sumtam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decrescunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege descendit, qua vi impressa per altitudinem ipsi GB æqualem ascenderet (§. 329 *Mechan.*).

SCHOLION.

44. *Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonstrari possunt, quæ nunc brevitatis gratia omittimus.*

PROBLEMA 6.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes singulis temporibus vacuandas, dato tempore, quo depletur totum.*

RESOLUTIO.

Sit. e. gr. Vas cylindricum, cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes singulis horis evacuandas.

1. Fiat ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12 ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vasis in partes

144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime superiores horæ penultimæ, quinque ulteriores horæ decimæ &c. 23 denique postremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora crescant in serie numerorum naturalium 1.2.3.4.5 &c. altitudines vero, si numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, crescant in serie numerorum imparium 1.3.5.7.9 &c.(§.42); erunt altitudines ab hora undecima computatæ, ut quadrata temporum 1.4.9.16.25 &c.(§.83 *Analyf. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144 complectitur omnes altitudinis vasis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 est quadratum ipsius 12 (§. 246 *Arith.*), consequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo dividenda, secundum seriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia distribuendus (§.42). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vasis substituere liceat vasa minora ipsis æqualia; data altitudine vasis intra datum temporis spatium deplendi, inveniri potest altitudo vasis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. *Patet ergo methodus clepsydras construendi, quibus veteres usos esse constat.*

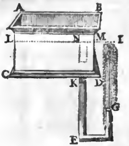
THEOREMA II.

48. *Aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium.*

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vasis vi solius gravitatis absolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam, qua egreditur ab aqua supra orificium consistente pressa, in ratione subduplicata altitudinis istius aquæ tempusculo infinite parvo per foramen exeuntis, seu, quod perinde est, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ supra orificium (§.37). Enimvero si aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ supra orificium æqualem, celeritas cadendo acquisita foret itidem ad eam, qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione subduplicata altitudinis aquæ supra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87 *Mech.*). Aqua igitur per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam cadendo ex altitudine aquæ supra orificium acquireret (§. 177 *Arith.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 12.



49. *Si aqua per tubum* KE *descendens, per lumen* G, *cujus directio verticalis, prosiliat, ad eam altitudinem* GI *ascendit, ad quam libella aquæ* LM *in vase* ABDC *consistit.*

DE-

Demonstratio.

Quoniam aqua per lumen G vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipsius celeritas est, quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48); consequenter ea ipsi vis est, qua ad altitudinem ipsi EN æqualem ascendere valet (§. 322 *Mechan.*). Quare cum directio luminis sit verticalis *per hypoth.* ideoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis existat, nec quicquam fit, quod eandem mutet extra tubum; aqua sursum feratur necesse est ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vase consistit. *Q. e. d.*

Scholion 1.

50. *Experientia constat, aquam per lumen* G *prosilientem elevari ad altitudinem ipsa* GI *minorem. Constat præterea, lumen* G *eo minus esse debere, quo minor est altitudo libellæ* LM *in vase* ABDC. *Imo propriis experimentis didici, minus esse debere lumen, si mercurius salire debet, quam ut aqua saliat, consequenter si fluidum majore vi urgetur, quam si minore. Inde vero non concluditur theorematis falsitas; sed tantum colligitur, subesse impedimenta quædam, quæ ascensui resistant. In ea igitur inquirendum.*

Scholion 2.

51. *Plerique præcipuam resistentiæ causam aerem allegare solent, per quem aqua saliens ascendit. Enimvero quamvis non negem, aeris resistentiæ inter impedimenta locum aliquem esse concedendum, quæ obstant, quo minus ad eam præcise altitudinem ascendat, unde decidit; causis tamen aliis majorem resistentiæ totalis partem tribuendam esse, mihi quidem satis probabile videtur. Aquas enim in vase ab aere evacuato* (§. 40 Aerom.) *salientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aere, ubi altitudo ascensus unius circiter pedis fit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua saliens* GI *longe infra libellam ascensum sisteret. Illud autem observare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramulosque dividi, in quos in aere dispergitur; sed fere unitam versus eam plagam defluere, versus quam lumen* G *parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter salientis magis ab aere resistente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen saltibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aeris resistentiam sensibiliorem esse puto. Ipsa enim aqua in guttulas ramulosque divisio fieri nequit, nisi aliqua celeritatis parte imminuta, quemadmodum ex regulis motus abunde constat.*

Scholion 3.

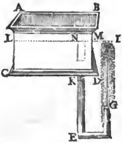
52. *Cæterum hinc mirum non est, quod regula* Mariotti *defectum altitudini* GI *a perpendiculo aquæ computandi, quam resistentia aeris potissimum superstruxit* (a), *& quæ defectus isti in ratione duplicata altitudinum esse prohibentur, non satis exacte experientiæ respondeat. Quoniam tamen ejus aliquis esse potest usus; ideo non piget tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum salientium altitudines tuborum, per quos delabuntur, juxta illam assignantur, in pedibus quidem Parisinis & ejus digitis seu partibus duodecimis.*

Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.		Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.	
5'	5'	1''	55	55'	121''
10	10	4	60	60	144
15	15	9	65	65	169
20	20	16	70	70	196
25	25	25	75	75	225
30	30	36	80	80	256
35	35	49	85	85	289
40	40	64	90	90	324
45	45	81	95	95	361
50	50	100	100	100	400

Scholion 4.

53. *Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ ascendentis, quia observavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevatur, quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus si languescit, posteriores in eas incurrentes retardantur: id quod ipsismet oculis suis videre poterit, qui aquas salientes*

(a) Traitè du mouvement des eaux part. 4. disc. 1. pag. 304. & seqq.



tes attentius contemplare voluerit. Atque inde est, quod, si lumen G angulo quantulibet exiguo inclinetur, at aqua saliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, saltus altitudo statim major evadat. Huc pertinet, quod Torricellius (a) *a se observatum annotavit. „ Quando, inquit, „ opposita manu foramen* G *penitus occluditur, de- „ inde retracta quam citissime manu repente ape- „ ritur: videbantur prima & praeuntes gutta al- „ tius pervenire, quam fit deinceps culmen* I, *„ postquam aqua deorsum fluere caperit „. Adde quod dispersionem in guttulas ipsa gravitas aquæ juvet.*

Scholion 5.

54. *Maximum autem impedimentum in affrictu positum est: unde lumen seu orificium* G *optime levigatam requiritur.*

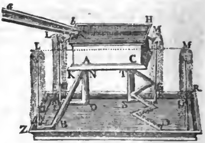
Scholion 6.

55. *Quamvis autem lumen non nimis ingens esse debeat, at sufficiens aquæ copia continuo affluere possit, cum alias saltus non modo minuatur, sed prorsus impediatur; idem tamen nec nimis exiguum sit necesse est. Experimur enim, aquæ salientis altitudinem majorem esse, si lumen majus, quam ubi minus fuerit. Certe* Mariottus (b) *observavit aquam salientem per lumina in eadem linea horizontali sita & in eodem tubo facta, quorum diametri erant unius, 4, 6, 10, 12 &c. linearum, notavitque altius ascendere eam, quæ per majora egreditur, quam quæ per minora ejicitur.*

(a) De motu projectorum lib. 2. Oper. Geometr. pag. 192.

(b) Traité du mouvement des eaux part. 4. disc. 1. pag. 303.

Theorema 13.



56. ***Aqua per tubum inclinatum* AB, *vel per tubum quomodocunque inflexum* CD *descendens per lumen* G *ad eam altitudinem in* L *vel* M *ascendit, ad quam aqua in vase* HK *subsistit.***

Demonstratio.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato AB, vel inflexo CD eadem vi impellitur, qua impellitur ad lumen G in tubo NO vel TS (§.34 *Hydr*). Sed vi impressa per lumen istud ascendit ad altitudinem altitudini libellæ ML æqualem (§.49). Ergo etiam per lumen tuborum reliquorum saliens ad eandem altitudinem ascendere debet. *Q. e. d.*

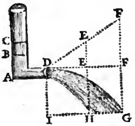
Scholion.

57. *Veritatem theorematis experimento confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea stamno obducta* (Vid. Fig. §.56) *vas* HK *figuram parallelepipedi habens. Ad fundum afferruminari jussi quatuor tubos, quorum duo* NO & ST *sunt ad fundum perpendiculares, sed inæqualium diametrorum, tertius* AB *est inclinatus, quartus vero* CD *ex pluribus partibus diversimode inclinatis compositus; omnes una ad fundum pelvis* RZ *aquam salientem excipientis afferruminati. Denique in* M & L *ad vas aptati sunt tubuli inclinati, ut, si per canalem* ab *plus aquæ affluat, quam per lumina tuborum* G *salit, superflua per eos effluat: quo artificio quoque ostendam, si experiri volueris, quæ in antecedentibus de motu aquarum in tubis constanter plenis demonstrata sunt. Quamdiu igitur aqua eandem libellam*

ML

ML *turbatur, altitudo salientium per omnes tubos erat eadem, neque augebatur, unius, duorum vel trium luminibus obturatis. Quodsi vero libella* ML *vel descenderet, vel obturatis tubulis in* M & L *ascenderet; salientium quoque altitudines omnes æqualiter decrescebant, vel augebantur.*

THEOREMA 14.



58. ***Aquarum per lumen horizontale vel ad horizontem inclinatum*** D ***salientium longitudines*** DE & DF, ***vel*** IH & IG, ***sunt in ratione subduplicata altitudinum in vase vel tubo*** AB & AC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impressa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71 *Mechan.*), vi gravitatis autem deorsum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), nec vis una alteram impedire potest, quia directiones non sunt contrariæ; aqua a premente AB impulsa eodem tempore pervenit ad rectam IG ipsi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulsa eandem attingit, suntque rectæ IH & IG spatia, quæ interea vi impetus impressi descripsissent eædem aquæ. Sunt vero spatia IH & IG, quia motus per DF est uniformis (§. 490 *Mechan.*), ut celeritates (§. 33 *Mechan.*); celeritates in ratione subduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata salientium sunt in ratione subduplicata altitudinum (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

59. Cum in medio non resistente omne corpus vel horizontaliter, vel oblique projectum parabolam describat (§. 480. 482 *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum saliens parabolam describit.

COROLLARIUM 2.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, & in eadem recta collocatos saliens arcuatum opus efficit, sub quo citra periculum madescendi deambulare licet, impetu, quo abripiuntur guttæ descensum impediente.

SCHOLION 1.

61. *Jucundum admodum spectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis solaribus illustrati iridis coloribus superbiunt.*

SCHOLION 2.

62. *Equidem tum aëris resistentia, tum aquæ facilis divisio impediunt, quo minus arcus sint exacte parabolici; sed qui spectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

CAPUT

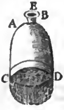
CAPUT II.

De Motu Fluidorum vi Aeris Contigui Producendo.

PROBLEMA 7.

63. *Construere vas ad hortos irrigandos idoneum.*

RESOLUTIO.



1. Fiat vas cylindricum ABDC, exiguo orificio E instructum, ut digito apposito claudi possit.
2. Fundus vasis CD constet ex lamina exiguis foraminulis pertusa.

VEL.



Fiat vas sphæricum HB collo tenui HE instructum, & hemisphærium DCB sit, ut ante, foraminulis pertusum.

Dico, si utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fundi intrare: si digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ affluere: si tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula instar roris stillare, ideoque ad hortos irrigandos adhiberi posse.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vase cum ambiente in eadem libella existat (§. 34 *Hydr.*). Ast si digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua sint, ut juxta aquam effluentem aeri in vas aditus denegetur; aer ambiens impediet, quo minus quidpiam aquæ effluere possit (§. 95 *Aerom.*). Si digitum removeas, aeris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem atmosphæræ extensa in aquam in vase contentam & una cum aqua in aerem ad fundum CD gravitat. Quare cum pressio aeris per orificium in aquam æqualis sit resistentiæ aeris ad fundum (§. 34 *Hydrost.*); aquæ pondus hanc superabit, ideoque ea per fundum vasis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

64. *Siphonem construere, hoc est, instrumentum, cujus ope liquor ex vase hauriri potest.*

RESOLUTIO.



Construatur vas FE, cujus pars media ABDC figuram cylindri, extremæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: sintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora, quam quæ digito apposito commode claudi possunt.

Dico, si vas in liquorem demergas, fore

fore ut eodem repleatur, & si superius orificium F exstet, si digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat: si denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

Demonstratio.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

Aliter.



Cum globo AB connectantur duo tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F sint aperta.

Dico, si tubuli EF extremum F liquori immergas & aerem ex vase per tubulum CD exsugas, liquorem in globum AB ascensurum. Quodsi jam digito ad lumen D applicato siphonem extrahas, fore ut nihil effluat: ast si digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rursus exeat.

Demonstratio.

Dum enim aerem exsugis, perinde est, ac si vasis ab aere evacuati orificium F in liquorem demergas, ideoque liquor in globi AB cavitatem ascendere debet (§. 101 *Aerom.*). Quodsi digito ad orificium D applicato siphonem extrahas, liquor ex eo per lumen F effluere nequit (§. 95 *Aerom.*). Quamprimum vero digitum ab orificio D removes, cum in F tantum resistat pondus atmosphæricum, liquor autem præter vim gravitatis ab eodem pondere atmosphærico per tubulum DC impellatur; resistentia a vi majore uti- que vincetur, ideoque liquor per F effluet. *Q.e.d.*

Scholion.

65. *Siphone secundo commode utimur ad fluida specifice leviora a gravioribus, quibus innatant, separanda: unde Chymicis subinde non contemnendum præbet usum.*

Problema 9.

66. *Siphonem construere, cujus ope totus liquor ex vase quolibet in aliud quodcunque educi potest.*

Resolutio.



Fiat tubus recurvus ABC, ita ut orificio A in plano horizontali posito altitudo DB cruris minoris AB 31 pedes Rhenanos nunquam excedat. Ad communes usus altitudo dimidii, aut unius vel alterius pedis sufficit. Quodsi brachium minus AB liquori immergatur & per lumen C aer exsugatur, liquor ex vase tam diu per tubum BC effluet, quamdiu lumen A sub liquore constituitur.

Demonstratio.

Quando aerem ex siphone ABC exugimus, in eo residuus dilatatur (§. 37 *Aerom.*), ideoque elater ejus debilior evadit (§. 79 *Aerom.*). Quare cum antea ponderi atmosphærico æquaretur (§. 33 *Aerom.*); nunc eodem minor est. Aqua igitur in tubum AB impellitur, donec elater aeris inclusi cum fluidi ascendentis gravitate pondus atmosphæræ iterum adæquet (§. 93 *Aerom.*). Quodsi ergo non tanta fuerit altitudo BD, ut aqua intra tubum AB contenta vi gravitatis respectivæ, qua in atmosphæ-



mosphæram aquæ superficiei extra tubum incumbentem gravitat (§. 28 *Aerom.* & §. 34 *Hydrost.*), defectum elateris suppleat; in tubum BC descendet. Si jam orificium C infra libellam aquæ, cui alterum A immersum est, subsistit; gravitas aquæ respectiva in crure BC est ad gravitatem respectivam aquæ in crure AB ut altitudo BE ad altitudinem BD (§. 34 *Hydrost.*). Quoniam itaque nisus aeris in superficiem aquæ circa orificium A gravitantis & aquam ad ascensum urgentis continuatur per aquam in tubo BC contentam, utpote quæ ad descensum isto aeris nisu urgetur; aer ad orificium C resistens urgetur vi ponderis atmosphærici & gravitate respectiva aquæ, quæ est ut altitudo BE. Et eodem modo patet aeris nisui prope orificium A resisti vi ponderis atmosphærici (quod ob exiguam siphonis altitudinem BE pro eodem habere licet) & gravitate respectiva aquæ in tubo BA, quæ est ut altitudo BD. Cum igitur aeri ad orificium A minus resistatur, quam ad orificium C; nisus illius ibidem prævalet, atque ideo aqua continuo per AB ascendit & per alterum BC descendit, quamdiu orificium A sub fluido demersum & alterum C sub libella constituitur. *Q. e. d.*

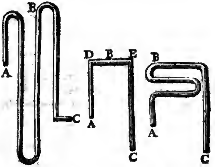
COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmosphærici aqua nonnisi ad altitudinem circiter 31 pedum Rhenanorum constanter elevari potest (§. 27 *Aerom.*); altitudo cruris AB, nempe BD, minor esse debet 31 pedibus Rhenanis, si aqua per siphonem constanter fluere debet.

SCHOLION 1.

68. *Evidens ideo est, recte rejici artificium* Heronis *ope siphonis per montium vertices in oppositam planitiem aquas deducendi. Jubet enim* Heron, *ut extremitatibus siphonis applicentur epistomia & ad nexum crurum infundibulum, per quod aqua infundi possit, utrique siphonis cruri implendo sufficiens. Quoniam itaque aeris auxilio non modo est opus ad primum aquæ in crus minus ascensum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non potest, ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmosphærico elevari solet. Suffragatur experientia: notum enim nobis est artificium* Heronis *irrito successu fuisse tentatum, ubi altitudo major fuerat 32 pedibus Rhenanis.*

SCHOLION 2.



69. *Illud quoque notatu dignum est, figuram siphonis ad arbitrium variari posse, modo orificium* C *sit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, si ex fluido extrahitur orificium* A, *fluidum omne per lumen inferius* C *egreditur: & quod in minore crure* AB *continetur, secum veluti trahit. Quodsi sipho plenus ita constituatur, ut lumen utrumque* A & C *sit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Videntur ideo fluida in siphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans descendens instar catenæ secum trahat leviorem.*

SCHOLION 3.



70. *Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabulæ ligneæ* AB *infige alterum siphonis orificium* C. *Nam tabula aquæ innatans, constanter orificium ipsum* C *ad eandem profunditatem demerget.*

CSHO-

SCHOLION 4.

71. *Denique notandum, fluere aquam per siphonem etiam interruptum* (Vid. Fig. 2 §. 69), *si nempe crura* AD & EC *conjunganiur mediante tubo capaciore* DE, *aere pleno.*

PROBLEMA 10.

72. ***Diabetem construere, hoc est, vas, quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.***

RESOLUTIO.



Fundo vasis AFBG afferruminetur sipho inversus CDE ea lege, ut crus longius DE ultra basin vasis exporrigatur, aut minimum ejus orificium sit in basi vasis: crus vero minus CD eandem non prorsus attingat: altitudo denique siphonis minor sit altitudine vasis AG.

ALITER.



Fundo vasis AFBG afferruminetur tubus DE, qui cruris majoris vicem sustinet: loco autem cruris minoris imponatur tubus alius capacior DC in C tantum apertus.

Dico, si vas AFBG aqua vel alio liquore impleas, quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

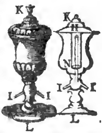
DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua infunditur, in tubo DC seu crure minore siphonis ad eandem altitudinem ascendit, ad quam in vase consistit (§. 34 *Hydrost.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE seu cruris longioris subsistit, consequenter per hoc nihil ejus effluere potest. Quamprimum vero plenum extiterit, ultra orificium D subsistit, ideoque vi gravitatis propriæ per tubum DE descendit, dumque semel fluit per siphonem CDE, tamdiu fluere debet, quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immersum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

73. Quodsi vas non fuerit plenum, & ad orificium E ore epplicato, eerem ex siphone CDE exsugas; liquor itidem omnis ex vase effluet (§. 66).

COROLLARIUM 2.



74. Hinc costrui potest poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis, postquam sufficieetar vinum hausisti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta, donec nihil amplius effluere sentis. Tum poculum KL alteri porrige & jube, ut ore ed orificium I epplicato liquorem exsugat. Ubi igitur haustu absoluto poculum ab ore removerit, vinum adhuc fluans vestem madidebit.

SCHOLION 1.

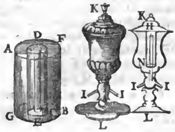
75. *Si tubus* (Vid. Fig. 2 §. 72) CD *vitreus fuerit, aerem in suprema ejus parte residuum una cum aqua fluente per tubum* DE *successive abripi observabis. Jucundum inprimis spectaculum, ubi aerem per tubulum vitreum fundo vasis in* E *infixum magna celeritate cum aqua defluentem conspicies. Hoc phænomenon primus observavit* R. P. de la Roche (a), *cumque experimentum repeterem, varias adhuc circumstantias annetavi, unde usus in praxim redundat* (b). *Expertus inter alia sum, quod, cum diameter orificii* D *esset* 6 *linearum seu digiti dimidii, diameter vero inferioris* E *unius saltem lineæ, aer tubum* DE *per superius* D *ingressus per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impediverit. Hinc vero jam constat ratio, cur in diabetis istiusmodi aquæ fluxus interdum sistatur, antequam omnis effluxerit, continuandus tamen aliquantisper, si tubus* DC *elevetur; atque hinc manifestum mihi videtur, quod luminis tam superioris* D, *quam inferioris* E *dia-*

 meter

(a) Vid. Diarium Trevoltiense An. 1709. art. 86. p. 1709.
(b) In Actis Erudit. A. 1711. p. 13.

meter eadem esse debeat, nec ipse tubus luminibus capacior.

SCHOLION 2.

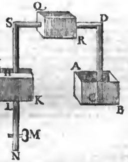


76. Quodsi altitudo tubuli DE *major fuerit altitudine vasis* AG, *hoc non obstante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat, digito ad* E *apposito, tubus* DC *attollatur, ita enim aer in tubo* DE *contentus dilatabitur; ac elatere ejus imminuto* (§. 79 Aerom.), *aqua intra tubum* DC *altius assurgens in tubum* DE *sese præcipitem dabit. Quodsi itaque poculi* KL *operculo* K *tubus* HN *afferruminetur, ubi bibere volueris, non opus est, ut sugas, sed operculum attolli sufficit.*

PROBLEMA II.

77. *Aquam per siphonem interruptum elevare.*

RESOLUTIO.



1. Duo vasa æqualia AB & IK in eadem planitie collocentur, quorum unum AB sit apertum, alterum vero clausum; utrumque aqua plenum.
2. Ex vase tertio QR undique clauso & ab aqua vacuo tendant duo tubi DC & SH (quorum longitudo minor quidem, sed non major quam 32 pedum esse potest) in vasa AB & IK, quorum prior fundum vasis AB fere attingit, alter SH operculo vasis IK afferruminatur.
3. Denique vasi IK afferruminetur tubus alius LN epistomio M instructus & tubo DC longior:

Dico, dum aqua per tubum LN descendit, epistomio M aperto, aliam ex vase AB in vas QR per tubum DC ascendere debere.

DEMONSTRATIO.

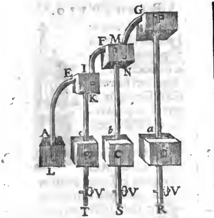
Cum enim gravitas aeris in tubo SH contenti respectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla sit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde est ac si tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed in hoc casu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN descendit, per alterum DC ascendit (§. 66). Ergo etiam in altero casu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vase QR jungitur, aqua per DC ascendere debet, dum per LN descendit. *Q.e.d.*

SCHOLION I.

78. Poterat idem eodem modo demonstrari, quo ascensum & descensum aquæ continuum in cruribus siphonis communis supra evicimus.

COROLLARIUM.

79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem elevabitur, si in eadem



eadem altitudine collocentur plura vasa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, & G &c. vasaque G & D, F & C, E & B tubis P*a*, M*b*, I*c*, vasa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vasis D, C & B tubi R, S, T cum epistomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores sint. Epistomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens deinque per tubum R eam ex F in G attollet, atque ita porro.

SCHOLION.

80. *Aut magnum requiritur præcipitii perpendiculum, aut ingens vasorum apparatus, si ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem si in vasa* B, C, D *Mercurius infunderetur, tubus* BT 27 *digitorum responderet tubo* AE 31 *pedum* (§. 29 Aerom.); *sed hac ratione elevatio aquæ nimis sumtuosa foret. Praxi ideo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum respondet.*

THEOREMA 15.



81. *Motus fluidi per siphonem* ABC *eodem modo acceleratur, quo a fluido consistente intra vas ad altitudinem æqualem profunditati* DE *orificii* C *cruris longioris* BC *infra libellam* DA, *cui crus minus* BA *immersum est, acceleratur motus fluidi per foramen vasis ipsius effluentis.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione problematis 9 (§. 66), vim, qua fluidum per siphonem urgetur, esse ut gravitatem fluidi respectivam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris supra libellam fluidi, cui immersum, consequenter ut altitudinem DE (§. 34 *Hydrost.*), quæ est excessus istius profunditatis infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per siphonem accelerari debet, quo acceleratur motus fluidi per vasis foramen effluentis, si intra ipsum ad altitudinem DE consistat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

82. Quoniam aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam aquireret eadendo ex altitudine aquæ supra orificium (§. 48); celeritas, qua illa per siphonem fertur, eadem est, quam acquireret eadendo per profunditatem DE orificii C extra aquam infra ipsius libellam DA consistentis.

COROLLARIUM 2.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diversis vasis erumpentium celeritates sunt in ratione subduplicata altitudinum earum super foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diversos siphones fluentium erunt in ratione subduplicata profunditatum orificiorum, per quæ effluunt, infra libellam aquarum, quibus crura minora siphonum immersa.

COROLLARIUM 3.

84. Eodem modo patet (*Vid. Fig. §. 77*), in siphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N effluentis eam esse, quam acquireret cadendo per altitudinem, quæ est æqualis differentiæ tubi LN & partis tubi DG ultra libellam aquæ in vase contentæ (§. 77).

COROLLARIUM 4.

85. Similiter patet, per diversos siphones interruptos aquam fluere in ratione subduplicata earundem differentiarum tuborum LN & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vase AB computata.

SCHO-

Scholion.

86. *Hinc prono alveo fluunt alia in theoria & praxi siphonum utilia, quæ antecedentium gnarus sua sponte inde inferes.*

Problema 12.

87. *Aquam vi elastica aeris compressi movere.*

Resolutio et Demonstratio.

Sit vas quodcunque ABDC, e cujus medio assurgat tubus EF fundum non prorsus contingens, sitque apertura aliqua in G epistomio ad arbitrium obturanda. Quodsi jam per aperturam G sive ope follis, sive syringis, sive antliæ pneumaticæ, sive flatu oris vehementiore aerem intruseris in vas AD ad medietatem aqua repletum, aer comprimetur in parte vasis reliqua (§. 17 *Aerom.*); ideoque elater ejus intendetur (§. 78 *Aerom.*). Cum ideo elater externi ambientis minor sit, si clauso epistomio G, epistomium F aperias, aqua ex vase AD per tubum EF ab aere sese expandente expelletur.



Scholion.

88. *Si aer ope antliæ comprimitur, non opus est epistomio* G, *sed sufficit cochlea muniri aperturam. Tubus vero* FE *in cochleam desinit, ut ad antliam firmari possit.*

Problema 13.

89. *Vi aeris loco suo expulsi aquam movere.*

Resolutio.

1. Sit vas quodcunque BQ per diaphragma EH in duo receptacula distinctum.
2. In superiori sit catinus DB foramine in K pertusus, quod cochlea obturari possit.
3. Per ejus medium transeat tubus AC diaphragma HE non prorsus attingens, & epistomio I munitus.
4. Fundo catini conferruminetur tubus DEL ultra diaphragma ad fundum fere vasis inferioris NQ protensus, tuboque AC longior.
5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere assurgens.



Dico, si receptaculum superius BR aqua repleas per foramen K, & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo superiore BR ejiciatur per tubum CA, & relabens in catinum DB, per tubulum DL in inferius HQ descendat.

Demonstratio.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aer in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17 *Aerom.*), ideoque elater ejus intenditur (§. 78 *Aerom.*). Quodsi ergo epistomium I aperias, elater aeris inclusi fortior, magis premit aquam in vase BR, quam externus ad A resistit. Aquam igitur ex vase BR per tubum AC repellit; & dum relabitur in catinum DB, per tubum DL descen-

descendit in vas inferius HQ (§. 4 *Mechan.*). *Q.e.d.*

SCHOLION.

90. *Quodsi tubulus* AC *exiguo lumine fuerit instructus, ut aqua ex eo saliat; ingeniosa hæc machina ab inventore* Herone *Alexandrino* Fons Heronis *appellatur. Patet ex demonstratione aquam hic urgeri ad saltum vi elastica aeris compressi, quemadmodum in problemate præcedente, consequenter fontem Heronis pendere a modo ingenioso aerem intra vas vi structura fontis comprimendi.*

PROBLEMA 14.

91. *Aquam per rarefactionem aeris expellere.*

RESOLUTIO.



1. Sint duo vasa ABDC & CDFE per diaphragma CD a se invicem separata, habeatque superius ABDC catinum AGHB conferruminatum, & ejusdem cum ipso capacitatis.
2. Ex diaphragmate CD ascendat tubulus IK fundum catini non prorsus attingens.
3. Per fundum catini exsurgat alius tubulus LM, cujus lumen L a diaphragmate exiguo intervallo distet.

Dico, si vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF supponantur, fore ut aqua ex vase AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aer in vase CEFD incalescit, rarefit (§. 23 *Aerom.*) ejusque elater intenditur (§. 146 *Aerom.*). Elater igitur aeris inclusi fortius premit aquam in vase AD contentam, quam externus ad M resistit, consequenter aqua per tubulum LM ejicitur. *Q.e.d.*

THEOREMA 16.

92. *Si aqua vi aeris compressi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur, quo acceleraretur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem primitivi, seu ejus, qui ad orificium tubi resistit, constituendum.*

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aeris compressi per tubum ejicitur, vis, quæ impenditur ad eam ejiciendam, est excessus vis elasticæ aeris compressi supra vim elasticam aeris ad orificium tubi resistentis, reliqua ad vincendam resistentiam insumta. Quoniam igitur perinde est, sive aqua ejicienda urgeatur vi elastica aeris, sive vi gravitatis aquæ eidem æqualis; motus ejus eodem modo accelerari debet, quo accelararetur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ejus, qui ad orificium tubi resistit, constituendum. *Q.e.d.*

COROLLALIUM 1.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam constituta aqua æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis servat (§. 48).

COROLLARIUM 2.

94. Et si diversimode compressus aer ejicit aquam, celeritates, quibus ejicitur, sunt in ratione subduplicata altitudinum, ad quas constituta aqua cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis æquilibrium servat (§. 38).

COROL-

COROLLARIUM 3.

95. Quoniam elater aeris magis compressi est ad elaterem minus compressi ut massa aeris magis compressi ad massam aeris minus compressi sub eodem volumine (§. 80 *Aerom.*); si aer primitivus in vase, antequam comprimatur, fuerit idem cum exteriore ad orificium tubi, per quem aqua ejicitur, resistente, vis qua aqua ejicitur est ut differentia massarum aeris compressi & primitivi sub eodem volumine.

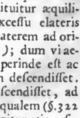
THEOREMA 17.

96. *Si aqua vi aeris compressi salit, ad eam altitudinem ascendit, ad quam constituta æquilibrium servat cum excessu elateris aeris compressi supra resistentiam aeris ad orificium tubi.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aeris compressi saliens ea celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem ad quam constituitur æquilibrium servans cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis (§. 92); dum vi aeris compressi urgetur, perinde est ac si per illam altitudinem descendisset. Enimvero si per eam descendisset, ad altitudinem saliret ipsi æqualem (§.322 *Mechan.*). Ad tantam igitur etiam salire debet, dum vi aeris compressi impellitur. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.



97. Quia in fonte *Heronis* vis elastica aeris in vase BR compressi æquilibratur columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem salit ad altitudinem æqualem altitudini orificii D a libella aquæ in vase HQ.

COROLLARIUM 2.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL descendit, quantum per orificium A ejicitur, ideoque altitudo orificii D supra libellam aquæ in vase HQ continuo decrescit; altitudo quoque saltus continuo decrescit.

COROLLARIUM 3.



99. Et cum in vase AD aer continuo magis magisque dilatetur, dum aqua per tubum EF salit (§. 36 *Aerom.*), ac præteres aquæ libella in eodem vase AD continuo descendente, resistentia aquæ in tubo EF crescat (§. 34 *Hydrost.*); altitudo quoque aquæ salientis continuo decrescere debet (§. 95).

SCHOLION.

100. *Nimirum gravitat[illegible] aquæ in tubo* EF *ultra libellam in vase* AD *consistentis superaccedit resistentia aeris ad orificium* F *& cum eadem unita agit, ita ut resistentia totalis, quam experitur vis elastica aeris compressi aquam in vase ad ascensum per tubum urgens, componatur ex elatere aeris ad orificium* F *resistentis & gravitate aquæ in tubo* FE *ultra libellam in vase consistentis elevatæ. Sed quoniam aqua in aere saliente, resistentia ista æquatur columnæ aquæ 31 pedes Rhenanos alta* (§. 28 Aerom.), *tubus vero* EF *vix dimidii vel unius pedis in vase vacuo existit; resistentia aquæ in tubo vulgo non attenditur.*

PROBLEMA 15.

101. *Data ratione aeris primitivi ad compressum, invenire altitudinem saltus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam aer comprimitur in ratione ponderum (§. 73 *Aerom.*), vis autem elastica aeris primitivi æquilibratur columnæ aquæ 31 pedum Rhenanorum (§. 28 *Aerom.*); ex data ratione aeris primitivi ad compressum inveniri potest altitudo aquæ cum compresso æquilibrium servantis in vacuo (§. 302 *Arith.*).
2. Quodsi ergo aqua in aere libero salit, cum resistentia aeris prope orificium æquetur columnæ aquæ 31 pedum

pedum Rhenanorum (§.28 *Aerom.*); altitudo inventa mulctanda est 31 pedibus Rhenanis, ut relinquatur altitudo saltus.

E. gr. Sit aer compressus duplus aeris primitivi, ideoque ratio primitivi ad compressum ut 1 ad 2; reperietur columna aquæ compresso æquilibratæ 62 pedum Rhenanorum. Quodsi ergo aqua in aere libero salit, resistentia est 31 pedum, ideoque altitudo saltus itidem 31 pedum. Eodem modo patet, si aer compressus sit triplus vel quadruplus primitivi, fore altitudinem saltus in casu priore 62, in posteriore 93 pedum & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis aeris rarefacti ad volumen condensati seu primitivi, datur ratio elateris, quo rarefiens expanditur, ad elaterem primitivi (§. 148 *Aerom.*); eodem modo inveniri potest altitudo saltus, si constet quantum eo gradu caloris, qui aeri incluso inest, idem dilatari possit.

SCHOLION.

103. *Ex his principiis alia bene multa deducere licet: sed nobis dicta sufficiant.*

CAPUT III.

De Machinis quibus Aqua elevatur.

DEFINITIO 5.

104. *Valvula* seu *assarium* est obturaculum vasis, vel tubi, quod introrsum aperiri potest; ast quo magis contra fundum, seu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

105. Valvula igitur ingressum fluidi in vas, vel tubum permittit; regressum vero impedit.

PROBLEMA 16.

106. *Valvulam seu assarium construere.*

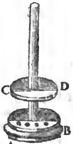
RESOLUTIO.

Valvulæ simplicissimæ C conficiuntur ex corio, habentque figuram circularem,

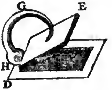


& ansula D clavis affigitur fundo vasis, aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur.

Fieri etiam possunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compressis AB & foraminibus circum circa pertusis, quæ alio orbiculo orichalceo CD sursum deorsumque mobili teguntur.



Parantur porro ex laminis cupreis E & D, quarum altera E corio tenui obducta, & circa cardinem in H mobilis, relabens exacte obturare valet foramen in altera D factum. Ut autem certius relabatur, elatere G instruitur.



Quemadmodum vero hactenus descriptæ valvulæ embolis potissimum conve-

conveniunt, ita in fundo vaſorum vel tuborum ſequente utendum.



1. Foramen A torno excavetur, tantiſper in conum deſinens.
2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum, & clavo aut tigillo tranſverſo D impediatur, ne inverti poſſit.

Vel foramen hemiſphæricum excavetur, eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA 17.

107. *Syringem, hoc eſt, machinam conſtruere, ex qua aqua attracta violenter expelli poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Cōſtruatur cylindrus ABDC ex materia ſolida, intus cavus, inferius tubulo EF inſtructus.
2. Immittatur embolus K ex corio vel alia materia, quæ humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipſum & cylindrum aeri vel aquæ nullus conceditur tranſitus.



Quodſi tubulo EF aquæ immiſſo embolum K extrahas, in cavitatem ab aere vacuam ea aſcendet (§. 101 *Aerom.*). Embolo igitur intruſo, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM 1.

108. Impetus aquæ eo major eſt, aqua vero per ſpatium eo longius propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM 2.

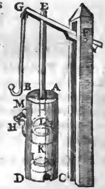
109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum, quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu, eoque per longius ſpatium aqua propellitur.

PROBLEMA 18.

110. *Conſtruere antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus cavus ABDC ex materia ſolida in aqua verticaliter erigendus, cujus inferior baſis valvula I introrſum hiante inſtruatur (§. 105).
2. Immittatur embolus EK valvula ſurſum hiante in L inſtructus.
3. Pro ejus faciliori extractione & depreſſione vectis FG applicetur.



DEMONSTRATIO.

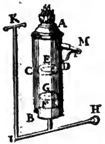
Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam I elevat & in cavitatem cylindri ſeu tubi AD ruit (§. 101 *Aerom.*). Quodſi ergo idem rurſus deprimatur, valvula I aquæ exitum negante (§. 104), valvula L aperitur & aqua ultra embolum aſcendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA 19.

111. *Construere antliam, quæ per meram expulsionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.



1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata est, divisus in aqua collocetur.
2. Embolus F valvula G instructus ita immittatur, & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi possit.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depresso valvula G aperitur (§. 104) & aqua in cavitatem cylindri BC ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed dum rursus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (§. 105. 106), & sic aqua vi emboli, agitatione sæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

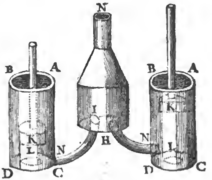
SCHOLION.

112. *Si quod vitium contrahit hoc antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, si vis sufficiens in* K *applicetur: ea enim attolli aquam palam est.*

PROBLEMA 20.

113. *Construere antliam, quæ aquam attractam violenter aliorsum expellit.*

RESOLUTIO.



1. Paretur cylindrus ex orichalco ABDC in L valvula instructus & in aqua collocetur.
2. Immittatur embolus K sine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumescit, tornatus & corio vel stupa vestitus.
2. In H afferruminetur tubus alius NH cum valvula sursum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (§. 105), & in cavitatem cylindri ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed cum rursus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

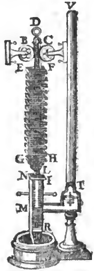
SCHOLION I.

114. *Ingeniosæ hujus machinæ inventor fuit* Ctesibius, *qui primus de aqua antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis mechanicis & hydraulicis suo ævo celebris,* Vitruvio *auctore* (a). *Ab eo antliæ dicuntur* machinæ Ctesibianæ.

(a) Lib. 10 cap. 12. conf. lib. 9. cap. 9.

SCHOLION 2.

115. Ejus vires, sublato affrictu, multiplicare studuit diu multumque in theoria & praxi aquarum elevandarum versatus Morlandus (a). *Virga ni-*



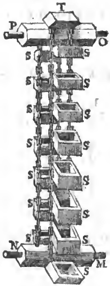
mirum ferrea DL *inter trochleas* B & C *evitandi affrictus gratia sursum deorsum movetur* (§. 956 Mechan.) & *ponderibus* EFGH *oneratur, ut aquam fortius per tubum plumbeum* TV *expellat embolus* LM *ex orichalco tornatus, & intra exiguum circulum coriaceum ad basin superiorem* NI *cylindri orichalcei* RN *dextre aptatum sine omni fere frictione mobilis, ad quam tollendam & duodecim annorum studium, & multum argenti se impendisse fatetur laudatus inventor.*

PROBLEMA 21.

116. *Aquam ope catenarum situlis instructarum elevare.*

RESOLUTIO.

1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut prisma sexangu-



lare MN circa axiculum ferreum mobile.

2. Eo in loco, quo aqua elevari debet, constituatur cylindrus aut prisma simile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.

3. Situlæ S catenis connectantur, quæ utrumque cylindrum vel prisma ambiant. Alii situlas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod sæpius accidit) catenis dissilientibus fundum aquæ petant.

Quodsi cylindrum superiorem OP convertas, inferior similiter convolvitur, & situlæ per aquam trajectæ aquam hauriunt superius in T effundendam.

SCHOLION.

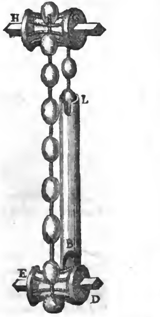
117. Quoniam situlæ utrinque vacuæ in æquilibrio sunt; pondus elevandum est aqua in situlis ex altera parte contenta, ubi ab affrictu discesseris, qui in his machinis non exiguus est. PRO-

(a) Elevation des Eaux cap. 4. art. 1. pag. 35 & seqq.

PROBLEMA 22.

118. *Rosarium construere ad elevandam aquam.*

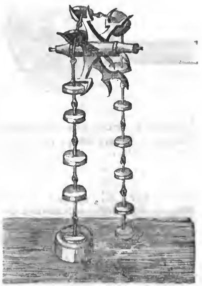
RESOLUTIO.



1. Tubus ligneus LB in aqua constituatur tantæ altitudinis, quanta est altitudo, ad quam aqua elevanda.
2. Tum sub aqua, tum in superiori loco, quo aqua elevanda, collocentur ut in problemate præcedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles.
3. Ad funem, cujus extremitates inter se connexæ, circa cylindros GH & ED circumductum aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor sit frictio) hemisphæria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Dum enim cylindris circumvolutis globi, aut hemisphæria per tubum LB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

SCHOLION.



119. *Alii utuntur prismatibus quadratis loco tuborum, & tabulis ligneis quadratis loco globorum. Imo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis substituunt. Cæterum hæc machina usum quoque habet in fossis & fluminibus a fæcibus purgandis. Ingens tamen affrictus esse solet, quem parum curare solent, ubi virium ad aquam elevandam compendium quæri necessitas nulla jubet: id quod & de aliis machinis, in quibus ingens affrictus est, notandum.*

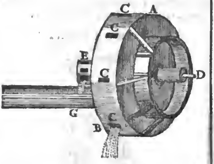
PROBLEMA 23.

120. *Aquam tympano vel rota situlis instructa elevare.*

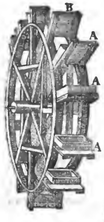
RESO-

RESOLUTIO.

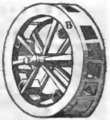
Structura admodum variari solet pro diversitate quantitatis aquæ elevandæ, & altitudinis, ad quam evehenda.



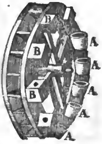
Si magna aquæ quantitas ad exiguam altitudinem elevari debet; tympanum construitur AB in 8 cavitates divisum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis vices sustinet, ut aqua per ejus foramina E in cistam G effundi possit.



Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, situlæ ligneæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trajiciuntur, rota circumacta, & superius in B effundunt.



Quodsi rotæ palmulas non in fronte gerant, spatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonisi foramine in palmula superiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rursus effunditur.



Sunt qui situlas congiales A vel (quod præstat, ne scilicet tantum aquæ perdatur) capsas quadratas unico foramine instructas B ad latus rotæ aptant. Sunt & qui heli-



cibus CD a peripheria ad centrum fere tendentibus instruunt. Alios modos silentio præterimus.

SCHO-

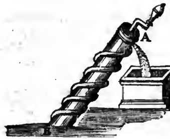
SCHOLION.

121. *Rotæ istiusmodi structura plurimum inter se variant; non tamen omnes ejusdem notæ. Sunt enim, quæ multum aquæ inutiliter dissipant, antequam in receptaculum commune effundatur. In praxi tamen ejus non semper habetur ratio, modo aqua sufficiens copia elevari possit.*

PROBLEMA 24.

122. *Cochlea* Archimedis *aquam elevare.*

RESOLUTIO.

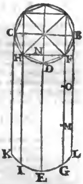


1. Circa cylindrum AB circumvolvatur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea designare solemus (§. 854 *Mechan.*).
2. Cylindrus inclinetur ad horizontem sub angulo 45 circiter graduum, sitque orificium tubi B sub aqua demersum.

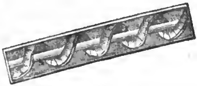
Quodsi cochleam ita circumagas, ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem ascendet tandemque in A effundetur.

ALITER.

1. Basis cylindri tam superior, quam inferior dividatur in 4 vel 8 partes æquales, & puncta divisionum D & E, F & G, B & L &c. connectantur rectis DE, FG, BL &c. in superficie cylindri descriptis, in quas transferatur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividantur in tot partes æquales, quot sunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HI partes duæ, in CK tres &c. transferantur, ut ideo tota cylindri superficies, in areas quadratas sit divisa.



2. Anguli diagonaliter oppositi connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenso facile designantur, & juxta harum ductum helice fulcetur cylindrus.



3. Ad helicem firmentur asserculi admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.
4. Basibus denique circum circa affigantur asseres tenues & annulis ferreis muniantur, totaque superficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHO-

SCHOLION I.

123. *Peripheria basium cylindri dividi potest in quotcunque partes æquales & in lineas verticales puncta divisionum conjungentes transfertur distantia helicum, quoties fieri potest, in tot partes æquales subdividenda, quot sunt lineæ verticales, ut inde divisiones earum determinentur, quemadmodum in resolutione problematis præcepimus. Si diameter totius cochleæ 18 digitorum, diameter axis 6 vel 4, distantia helicum 9 digitorum esse solet.*

SCHOLION 2.

124. *Hac machina exigua vi multum aquæ attolli posse, experientia jam dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non sufficit; sed quæ ab una effunditur, haurienda est ab altera & ita porro.

PROBLEMA 25.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelsiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requisiverit.
2. Intra turrim seu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis situlis instructæ (§. 121), vel sitularum catenis connexarum (§. 116), vel rosarii (§. 118), vel cochlearum Archimedearum (§. 122), vel antliarum (§. 110. 112), viribus vel animatis, vel inanimatis legitime applicatis juxta regulas c. 17 Mechanicæ (§. 876 & seqq.) traditas.
3. Aqua effusa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati sint tubi, per quos iterum descendet.
4. Ne aqua ultra latera aheni unquam assurgat, unus alterve ad summitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium refluat, unde hauritur.
5. Hi tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defossis ad eum usque locum protensis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis, in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in quos hient lumina horizontalium epistomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti possit (§. 5).

Aperto enim epistomio aqua in tubo verticali ascendet (§. 34 *Hydrost.*).

SCHOLION.

127. *Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inseritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochleæ* Archimedis *ac cylindri superiores rosariorum & catenarum situlis instructarum instruuntur rotis radiatis, quibus aliæ dentatæ occurrunt. E. gr. Ponamus rosarium calcando moveri debere. Construendum igitur erit tympanum ingens* (§. 886 Mechan.), *cujus axi una infigenda rota stellata, occurrens radiatæ, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiata verticularis ad conservandum impetum. Quodsi equus eandem machinam movere deberet, axi verticali temone instructa* (§. 888 Mechan.) *infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodsi homo partim trahendo, partim deprimendo aquam ope rosarii elevare teneretur, tympano substitueretur axis cum scytalis & rota verticulari* (§. 882 Mechan.). *Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vectis homodromi versando* (§. 884 Mechan.) *infigenda rota radiata, quæ circumagat stellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentatæ dentes in plano, axem cum cylindro rosarii communem habenti occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis casibus fieri debeat, modo problemata mechanica de potentiarum ad machinas applicatione fuerint perspecta.*

CAPUT

CAPUT IV.

De Fontibus Salientibus.

PROBLEMA 26.

128. *Construere fontes salientes.*

RESOLUTIO.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiorem (§.110 & seqq.) & intra vas satis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rursus descendat.
2. Cum tubis hisce connectantur alii horizontales sub terra defossi, per quos aqua usque ad originem fontium salientium deducatur.
3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo sit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum prosiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§.56).

SCHOLION 1.

129. *Quodsi aqua saliens ad altitudinem datam ascendere debet, quæsito satisfieri potest per schol. 3 theor.* 12 (§. 52).

SCHOLION 2.

130. *Quodsi desideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per theor.* 3 *Cor.* 1 (§. 23) & *per theor.* 5 (§. 27).

SCHOLION 3.

131. *Si denique aquarum ex diversis unius fontis tubis salientium altitudines inæquales requirantur; quæsito potiemur per theor.* 12 (§. 49) & *theor.* 13 (§. 50): *ubi & observasse juvabit quæ superius in scholiis theor.* 12 (§. 50 & seqq.) *monuimus.*

PROBLEMA 27.

132. *Fontem construere, ex quo aqua erumpens pilam æneam projiciat, descensumque parantem continuo repellat.*

RESOLUTIO.



1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate sua impetū impressum eludat.
2. Tubus BC, per quem aqua salit, sit ad horizontem exacte perpendicularis.
3. Aquæ sufficiens copia ex insigni altitudine in tubum BC deducatur.

Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum & descendentem constanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus sit ad horizontem exacte perpendicularis *per hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter ascendit. Quoniam vero ex insigni altitudine delapsa *per hypoth.* & ex tubo ea celeritate erumpit, quam cadendo per istam altitudinem aquireret (§.48), magna quoque celeritate movetur (§.87 *Mech.*), ideoque globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari ascendendi (§. 534 *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit, ad quam vi impressa ascendere licet

(§. 317 *Mech.*); vi gravitatis suæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215 *Mechan.*). In descensu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impresso, ut ante, ascendere cogit. Quamobrem globus in aere pendulus sursum deorsum feretur, quamdiu aqua ex tubo saliens satis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi ascensum descensumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem substituere licet, e. gr. avem cum alis expansis.

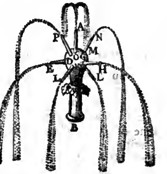
SCHOLION.

134. *Quoniam globus, ut ex alto rursus descendens in aquam salientem incurrat, in eadem constanter linea perpendiculari ascensus descensusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime exposita.*

PROBLEMA 38.

135. *Construere fontem, qui aquam versus diversas plagas projiciat.*

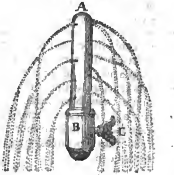
RESOLUTIO.



Sit tubus verticalis AB aquam advehens, & ipsi infixi sint alii horizontales DE & GH, alii ad horizontem versus diversas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem versus plagas illis intermedias reclinati, ut FL.

Quoniam aqua directionem luminis, per quod prorumpit, retinet; per lumen A saliens perpendiculariter ascendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diversæ amplitudinis (§. 59) & ad diversas plagas tendentes describet. Fons igitur aquam versus diversas plagas ejicit.

ALITER.



Tubus AB, per quem aqua salire debet, sit superius clausus in A, & luminis loco vel undiquaque, vel in dimidia superficiei parte foraminulis exiguis pertusus.

Quodsi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis, aqua versus omnes plagas per foraminula salit, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapsus (§. 58) satis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodsi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere assurgentem epistomio C instruas; eo aperto, spectatores veluti ab imbre improviso madidati recedent.

SCHOLION.

137. *Probe autem tenendum est, diametros luminum, per quæ aqua egreditur, diametris tuborum aquam*

aquam advehentium minores esse debere, ne aeris resistentia aliaque impedimenta (§. 50 & seqq.) impetum aquæ statim eludant. Ipsi quoque fontes sufficientem aquæ copiam suppeditare; aquæ impetu sufficiente gaudere debent.

PROBLEMA 29.

138. *Fontem construere, ex quo aqua instar pluviæ prosiliat.*

RESOLUTIO.

Tubo, ex quo aqua salire debet, afferruminetur globus, vel corpus lenticulare ex duobus segmentis sphæricis compositum AB, ex lamina metallica confectum, cujus superior superficies minimis foraminulis pertundatur.



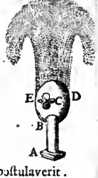
Ita enim futurum, ut aqua cum impetu versus superiorem laminam AB propulsa sub forma tenuissimorum filamentorum in varias guttulas mox dispergendorum prosiliat.

PROBLEMA 30.

139. *Fontem construere, ex quo aqua prosiliens ad modum lintei expanditur.*

RESOLUTIO.

Tubo AB afferruminentur duo segmenta sphærica C & D, quæ fere se invicem tangant, & mediante cochlea E ad eum situm facile reducantur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat prout usus postulaverit.



Alii vel in tubis lumine destitutis, vel in corporibus sphæricis, aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

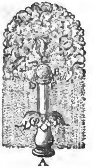
Aqua per crenam saliens ad modum lintei expanditur, si impetus fuerit sufficiens.

PROBLEMA 31.

140. *Fontem construere, qui aquam spumescentem jucundo spectaculo ejiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari possit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur.



Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens spumescet, ac fere nivis aerem opplentis floccos æmulabitur.

PROBLEMA 32.

141. *Fontem construere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque sitos derivari possit, & directionem luminis retineat; non alia re opus est, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abscondantur, quorum orificia hient per eas partes, unde aqua prosilire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud difficul-*

tee eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquæ salienti figuras varias conciliare licet, concipi potest. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.

PROBLEMA 33.

143. *Construere fonticulum salientem, qui ubi salire desiit, clepsydræ instar inverti potest.*

RESOLUTIO.



1. Fiant duo vasa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua saliens consumere debet, tantoque majori intervallo PN a se invicem remota, quanto major aquæ salientis altitudo desideratur (§. 49).
2. Sit BAC tubus recurvus, in C epistomio instructus, & DEF tubus alius itidem recurvus in D epistomio munitus.
3. In I & K sint tubuli alii utrinque aperti & fundos vasorum NO & LM fere attingentes: quousque similiter tubi QR & ST pertingunt.

Quodsi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epistomio C, ea prosiliet fere ad K, & delapsa per tubulum I apertum in vas NO ruet aeremque contentum per tubum QR expellet. Ubi vero aqua omnis ex vase LM effluxerit, machina inversa, delapsa ex vase NO salientem efficiet.

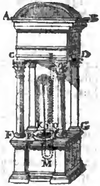
COROLLARIUM.

144. Si vasa LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ spatium tota effluat; clepsydram habebimus salientem in suas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA 34.

145. *Construere malluvium cum fonticulo saliente.*

RESOLUTIO.



1. Sit ABDC receptaculum vasis, cui aqua infunditur.
2. Ex vase descendat tubus ab L usque ad M, ubi versus I inflectitur.
3. In K applicetur epistomium, quo aperto aqua prosiliet fere ad L usque (§. 49).
4. FG sit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, si aquæ salienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia superius exposita* (§. 135 & seqq.).

PROBLEMA 35.

147. *Flatu oris aquam salientem efficere.*

RESOLUTIO.



1. Sit AB sphæra vitrea vel metallica &
2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C instructus & in D infimum sphæræ punctum fere attingens.

Dico,

Dico, si aerem per tubulum CD exſugas, & orificium C in frigidam ſtatim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in ſphæram aſcendat. Quodſi iteratis ſuctionibus ultra medietatem fuerit repleta & ore in C applicato aerem per tubulum infles; remoto ore aqua proſiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aerem exſugis, in ſphæra AB incluſus rarior evadit externo, ideoque orificio C in aquam immerſo tantum fere aquæ aſcendere debet, quantum aeris fuerit eductum (§. 101 *Aerom.*). Quodſi vero per tubulum CD aerem infles, is per aquam ſpecifice graviorem (§. 57 *Aerom.*) aſcendet (§. 99 *Hydroſt.*), conſequenter aer incluſus comprimitur (§. 5 *Aerom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

148. Quodſi hanc ſphæram aquæ ebullienti immittas; aer rareſiet (§. 23 *Aerom.*), ideoque denuo aqua per tubulum CD ſalire debet.

SCHOLION.

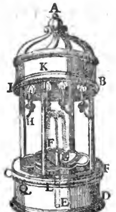
149. *Fonticulus hic ab inventore* Herone *nomen* Pilæ Heronis *ſortitus eſt*.

PROBLEMA 36.

150. *Fonticulum conſtruere accenſis candelis ſalientem*.

RESOLUTIO.

1. Ex lamina metallica fiant duo vaſa cylindrica (*Vid. Fig. ſeq.*) AB & CD.
2. Jungantur tubis utrinque apertis



KL, ut aer ex ſuperiore in inferius deſcendere poſſit.
3. Tubis afferruminentur candelabra H,
4. Operculo vero baſis inferioris CF in formam catini efformato tubus EF epiſtomio G inſtructus & ad fundum fere vaſis protenſus.
5. In Q ſit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi poſſit.

Dico, candelis in H accenſis, aquam per tubum EF ſalire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis 14. (§. 91).

SCHOLION.

151. *Hoc eodem artificio efficies ſtatuam ad præſentiam ſolis, vel candelis accenſis, lacrymas effundentem. Neque enim alia re opus eſt, quam ut ex cavitate, in qua aer rareſit, tubulos ducas ad quaſdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repleas.*

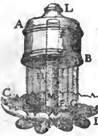
PROBLEMA 37.

152. *Fontem intermittentem conſtruere.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Per axem vasis AB ascendat tubus EF utrinque apertus, foramine in E exciso.



2. Tubus hic afferruminetur tam vasi superiori in H, quam inferiori in E.
3. Vas superius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi possit; in basi autem inferiore multa foraminula, per quæ distillare queat.
4. In vase inferiore sit foramen G ita aptatum, ut aqua per illud non defluat, nisi ad altitudinem EM constituta.

Dico, aquam ex hoc fonte per intervalla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine E aperto aeri externo per tubum EF in vas superius AB aditus pateat; aëris inclusi elater æqualis est ponderi atmosphærico (§. 33 *Aerom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vase contentæ ipsi juncta pressionem majorem efficit, quam resistentia ponderis atmosphærici ad foraminula, ideoque aqua distillare debet. Quam primum vero aqua delapsa foramen E occludit, ut nullus amplius aer in locum aquæ delapsæ succedere possit; perinde est, ac si vas quoddam exiguo orificio instructum inverteres, ideoque fluxus aquæ per foraminula sistetur (§. 95 *Aerom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque assurgit, per foramen G in cavitatem vasis CD descendit. Ea igitur defluente, foramen E rursus aperitur aerique aditus in vas superius AB denuo conceditur. Unde patet, aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus ideo fontem intermittentem. *Q. e. d.*

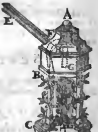
ALITER.



Quodsi fonticulum per intervalla salientem desideres, fiant omnia ut ante, nisi quod loco foraminulorum aptandi sint tubi recurvi PQT & RSV.

ALITER.

1. Sit tubus EF aquam advehens in cavitatem vasis AB.



2. Ex hoc vase descendat sipho GHI in minus CD lumine conveniente in L instructus.

Quamprimum aqua ultra punctum H siphonis GHI attolletur, per siphonem eundem fluet, donec vas exhauriatur (§. 72), ideoque tamdiu per lumen L saliet. Quod si igitur efficias, ut plus aquæ per lumen

L sa-

L saliat, quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermittentem.

Scholion 1.

153. *Hoc posteriori artificio haud difficulter efficies, ut statuæ aquas evomant ex improviso in adstantes.*

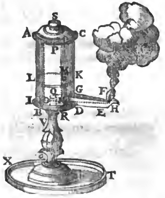
Scholion 2.

154. *Priori autem superstructa est lampas, quam in gratiam amici inventam publici deinde juris feci (a), & in sequenti problemate denuo exhibeo.*

Problema 38.

155. *Lampadem construere, quæ eandem quantitatem olei ellychnio constanter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.*

Resolutio.



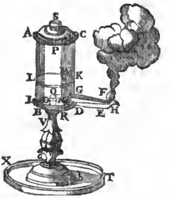
1. Fiat vasculum cylindricum ACDB, cui oleum infundi possit, & ipsi afferruminetur aliud minus formam parallelepipedi habens FED & rostro FH instructum, pro recipiendo ellychnio.
2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam fornici AC.
3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vasculi AB parieti adhæreat, quem *tracheam* appello. Ejus osculum superius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O superficiem olei ad libellam HI constituti lambit.
4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque similiter apertus, & ad eandem olei libellam HI protensus.
5. Fundo vasis DB afferruminetur tubulus QR, cujus osculum superius Q ultra libellam olei tantillum emineat, & transeat per matricem cochleæ V, qua vas ABDC ad pedamentum VTX firmatur.
6. Intra hoc fiat vasculum cavum *ab* & in G foramen exiguum, per quod aeri externo in cavitatem DKLB pateat aditus.
7. Denique in fornice fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas (si quando opus fuerit) a sordibus purgari queat.

Dico, si lampas a pedamento avulsa invertitur, & digito ad foramen G applicato oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infundatur, fore ut oleum cavitatem GB ingressum per tubulum NM, vase in latus DC inclinato, in proprium receptatulum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rursus firmata munere suo, ut decet, fungatur.

Demonstratio.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI consistit, ne guttula quidem una per MN effluere potest, vi eorum, quæ ad problema præcedens demonstrata

(a) In Actis Erudit. An. 1711. pag. 30. & seqq.



ſtrata ſunt (§. 152). Inſenſibili autem ejus quantitate abſumta, aer per tracheam OP ingreditur, & oleum per MN deſtillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas conſtanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.*

Quodſi lampas in locum calidum deferatur, aer ſupra oleum rareſit (§. 23 *Aerom.*), ideoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91): quod cum ultra libellam HI aſſurgat, per tubulum QR in vaſculum *ab* defluit, conſequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi poteſt. *Quod erat ſecundum & tertium.*

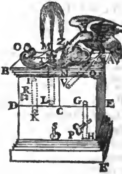
SCHOLION.

156. *Ut demonſtratio ocularis evaderet, vas* ABCD *ex vitro fieri curavimus obſervavimusque, tracheam* TO *non nimis arctam eſſe debere, ſi deſideres, ut olei vel minima quantitas abſumta ſtatim refundatur. Etenim gutta olei aeri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, niſi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas* ACKL *abripiatur. Unde ſimul colligitur, operam dandam eſſe ut orificium tracheæ ſit bene politum.*

PROBLEMA 39.

157. *Conſtruere fonticulum ſalientem, in quo avicula tantum aquæ ſorbeat, quantum ex illo profluit.*

RESOLUTIO.



1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates diviſum, quarum ſuperior AEDB in duas alias AC & CB per diaphragma CN ſubdividitur.
2. In Q, R & S fiant foramina cochleis munienda, ut aqua infundi & effundi poſſit, prout uſus poſtulaverit.
3. Ex vaſe AB in vas EF deſcendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum vero hujus non prorſus attingens, atque clavicula P inſtructus.
4. Ex vaſe DF aſſurgat tubus KI baſi DC afferruminatus, at vero baſim ſuperiorem BN non prorſus attingens.
5. A fundo fere vaſis CB aſcendat alius tubus LM tranſiens per fundum phialæ O aquam ſalientem excipientis, epiſtomio T inſtructus.
6. Denique per roſtrum, corpus & pedes aviculæ vaſi AB inſiſtentis ducatur ſiphon inflexus ZV.

Dico, ſi epiſtomia P & T aperias, vaſis A & B aqua repletis, & roſtro aviculæ

aquæ

aquæ immerso, fore ut aqua per tubulum LM saliat, & avicula eam sorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum epistomio P aperto aqua per tubulum GH ex vase AC in vas DF descendit; aqua ex phiala per rostrum avis ascendere debet (§. 77). Dum vero per siphonem ZV semel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhausta (§. 66). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH descendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM salire debet (§. 89). Habemus ergo fonticulum salientem, & aviculam tantum aquæ sorbentem, quantum ex illo profluit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

158. *Eadem prorsus structura est fontis* Kircheriani, *in quo avis tantum aquæ sorbet, quantum a serpento in poculum exspuitur. Absconde enim tubum* LM *intra corpus serpentis & eum inflecte, ut lumen* M *per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircherianum mutabitur.*

PROBLEMA 40.

159. *Fontem construere in vase vitreo clauso salientem.*



RESOLUTIO.

1. Sit sphæra vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum.
2. Per cochleam transeat tubulus DC, exiguo lumine in C, sed ampliore in D instructus, cujus pars major sit extra vitrum.
3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus EF admodum gracilis, sed altero CD multo longior, hians in cavitatem sphæræ A.
4. Sint duo vasa IK & LM mediante tubo HN inter se connexa, & basi superioris IK afferruminetur tubulus GH,
5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, si vas IK & aliquam sphæræ A partem aqua repleas, aquam ex sphæra per tubulum EF in vas LM descensuram, & per tubulum DC in sphæram ascensuram, per lumen exiguum C saliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF descendit, aer in sphæra dilatatur (§. 36 *Aerom.*), ideoque elater ejus minuitur (§. 78 *Aerom.*). Quare cum inclusus ante dilatationem ponderi atmosphærico æqualis existeret (§. 33 *Aerom.*), quo aqua in vase IK premitur (§. 21 *Aerom.*); inclusus post dilatationem ad lumen C minus resistit, quam externus aquam in vase IK premit. Aqua igitur per tubulum DC ascendere, & quia lumen C exiguum *per hypoth.* salire debet (§. 55). *Quod erat unum.*

Cum vero fonticulus hic saliens sit sipho interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ salientis continuatus intelligitur per ea, quæ de continuatione motus fluidorum in siphonibus demonstrata sunt (§. 66). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

160. *Ex demonstratione apparet, aquam per tubulum* DC *salire debere, modo orificium* D *in aquam immergatur, orificio* F *extra eam constituto. Unde structura fontis multis modis variari potest.*

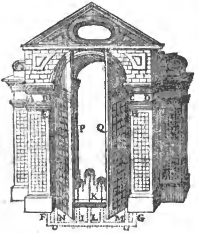
CAPUT V.

De Variis Machinamentis Hydraulicis.

PROBLEMA 41.

161. *Fores construere, quibus apertis aqua conspergatur ingrediens.*

RESOLUTIO.



1. Ad latera valvularum juxta superliminare collocentur vasa AB & CD aqua plena, quibus
2. Tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG sub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epistomia cum valvulis P & Q ita connexa, ut iis apertis & ipsa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L profiliet & ingredientem madidabit (§. 49).

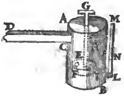
SCHOLION.

162. *Eodem artificio riscum construes, quo aperto, facies aperientis aqua conspergatur.*

PROBLEMA 42.

163. *Efficere, ut in horto vel crypta deambulans subito aquis ex terra profilientibus conspergatur.*

RESOLUTIO.



1. Sub terra ita abscondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depressa embolus movetur, paulo ultra ipsius superficiem promineat.
2. Embolus E sit valvula F hiante versus basim inferiorem B instructus, & ita aptetur, ut a pede calcantis depressus a lamina elastica H rursus attollatur.
3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
4. Fundo antliæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra superficiem terræ paulo promineat.

Dico, aquam per M profilire debere, si pede in G insistas.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in superiorem antliæ AB partem delapsa urget valvulam F, quæ cum in partem inferiorem hiet, aperitur, & aquæ illuc transitum concedit, in tubo LM usque ad N ascensuræ (§. 34 *Hydrost.*). Quodsi jam pede calcantis embolus E deprimatur, valvula F clausa aquæ regressum in superiorem antliæ partem impedit (§. 104): quare per tubum LM cum impetu ejicitur. Remoto autem pede ab embolo GE, pistillum situi suo restituitur ope elateris H. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

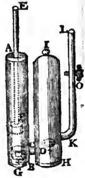
164. *Cum aqua ex altitudine quadam delapsa, ad eam fere rursus ascendat (§. 49); quæ tubo* CD *advehitur, ex vase intra terram defossa & in planitie replendo illuc derivari debet.*

SCHOLION 2.

165. *Quodsi vero aqua per tubum* CD *advecta ex altitudine quadam fuerit delapsa; ita aptanda valvula, cui deprimenda solum aquæ pondus non sufficiat: vel totum machinamentum alia ratione construi deberet.*

PROBLEMA 43.

166. *Construere machinam, quæ aquam insigni cum impetu elevet.*



RESOLUTIO.

1. Construatur antlia compressiva AB (§. 113).
2. Ex ea transeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco parato altitudo sit 2 pedum, diameter octo digitorum.
3. Tubus CD sit valvula in D instructus, quæ in cavitatem vasis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epistomio O pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Dico, hanc machinam aquam ad insignem altitudinem elevaturam.

DEMONSTRATIO.

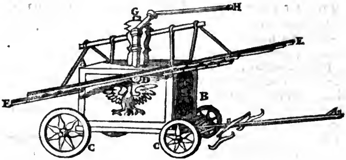
Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur, & aqua in antliam AB ascendit (§. 36 *Aerom.*): quo rursus depresso, illa clauditur, & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI ejicitur (§. 105). Quo facto, cum epistomium O sit clausum, aer in cavitate vasis HI comprimitur (§. 17 *Aerom.*). Quodsi itaque sufficienter fuerit compressus; aperto epistomio, aqua insigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli continuata, aer in eodem compressionis gradu conservari potest; hæc machina aquam continuo ejicit.

PROBLEMA 44.

168. *Hydracontisterium, hoc est, machinam construere, quæ aquam ad incendia restinguenda ad datam altitudinem & in datum locum evomat.*



RESOLUTIO.

1. Fiat ciſta AB figuram parallelepipedi habens, & rotis C inſtructa, ut commode ad locum incendii advehi poſſit. Sunt & qui ciſtam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rota.
2. Intra ciſtam firmetur machina Cteſibiana cum gemino cylindro (§. 113).
3. Ad agitandos embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.
4. Tubus GH per quem aqua ejaculatur immittatur alteri mobili, ut ad locum deſideratum commode dirigi poſſit.

Si enim continuo aqua in ciſtam AB infundatur, & emboli nunc eleventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum deſideratum ejaculabitur (§. *cit.*). Machina igitur ad reſtinguenda incendia commode utimur.

SCHOLION 1.

169. *Belgæ aliique ipſorum exemplo excitati tubo mobili* GH *ſubſtituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infeſtata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout neceſſitas poſtulaverit. (Vocatur tubus ejusmodi Germanis* ein Schlauch*). Unde apparet, hac ratione hydraconiſteriis eſſe locum, etiamſi flamma in conclavibus ædificii tantum ſæviat, nec per tectum ac feneſtras foras erumpat.*

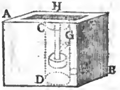
SCHOLION 2.

170. *Non inutiliter machinæ Cteſibianæ ſubſtituere licet alteram* in probl. 43 (§. 166) *deſcriptam; quia aquam non per intervalla, ſed continuo ejaculatur.*

PROBLEMA 45.

171. *Efficere, ut ad ſpeculum aut objectum aliud accedens aqua ex improviſo conſpergatur.*

RESOLUTIO.



1. Sit AB ciſta aqua plena, cujus fundo afferruminetur tubus recurvus CDEF.
2. Pars tubi intra ciſtam AB paulo infra embolum elevatum foraminibus nonnullis pertundatur.
3. Denique embolus G ita immittatur, ut

ut cessante vi deprimente, per elaterium rursus attollatur.

D E M O N S T R A T I O.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet, ac in tubo EF eousque ascendet, donec in eadem altitudine subsistat, ad quam aqua intra cistam AB constituitur (§. 34 *Hydrost.*). Quodsi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, ideoque eadem ex improviso consperseris. *Q. e. d.*

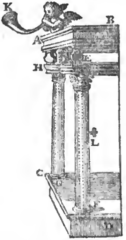
S C H O L I O N.

172. *Quodsi aqua ex alto delabatur, sufficit, ut pede deprimatur valvula, quæ aquæ aditum in tubum* EF *concedat* (§. 85).

P R O B L E M A 46.

173. *Construere speculam, in qua speculator constitutus sonum ingentem cornu edat.*

R E S O L U T I O.



1. In superiore loco speculæ constituatur vas aqua plenum AB & in inferiore aliud aere plenum CD, contra omnem vero aeris accessum optime munitum.

2. Ex vase superiori AB in inferius CD transeat tubus FE epistomio L instructus.

3. Ex vase inferiori CD ascendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os speculatoris, cui cornu K sit afferruminatum.

Etenim laxato epistomio L, aqua ex vase AB per tubum EF descendit, & ingenti celeritate aerem ex vase CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem sonum parit, qui aere in cornu inflato auditur.

S C H O L I O N 1.

174. *Simili artificio sonos alios produces.* Kircherus (a) *cantum singularum fere avicularum notis musicis exprimere & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerpsit* Schottus (b), *quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

S C H O L I O N 2.

175. *Huc referenda quoque sunt organa hydraulica jam veteribus nota & a* Vitruvio (c) *descripta, a* Perraltio *in notis schematismo nitido egregie illustrata: de quibus, cum non amplius in usu sint, hic dicere non attinet.*

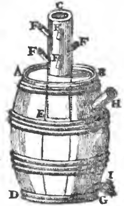
P R O B L E M A 47.

176. *Ventum excitare ad flammam conservandam aptum.*

RESO-

(a) Musurgiæ lib. 9. part. 5.
(b) In Magia Universali Naturæ & Artis part. 2. lib. 6.
(c) Lib. 10. c. 13. f. m. 325.

Resolutio.



1. Ad basin dolii superiorem AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut sex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur.
2. Tubus EC hinc inde instruendus est tubulis F, aut, si mavis, foraminulis, ut ab aqua descendente aer una in dolium abripiatur.
3. In basi inferiori DG e regione luminis E sita sit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.
4. In G aptetur tubus I angustior eo, per quem aqua delabitur, ut delapsa ex dolio iterum effluat.
5. Denique in H sit tubus ad eum locum protensus, quo ventus spirare debet.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac dispergitur, aer ingenti impetu per tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide spirantem (§. 166 *Aerom.*).

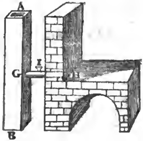
Scholion 1.

177. Franciscus Tertius de Lanis (a) *auctor est, se vidisse, hoc artificio ventum majorem fuisse excitatum, quam qui follibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

Scholion 2.

178. *Enimvero opus non est, ut tubus* CE *sit rotundus, & vas* ABGD *figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, e. gr. quadrata fieri potest. Unde quidam loco dolii cameram ex lateribus construunt. Opera tantummodo danda, ne aer ex vase* ABGD *ullibi, quam per tubum* H *erumpere possit.*

Scholion 3.



179. *Succedit etiam artificium, si nullum adsit dolium; sed aqua per tubum quadratum* AB *nullis spiraculis instructum tantum delabatur, ad quem aptatus sit tubus* GH*, unde ventus spirat. Quodsi usus postulaverit, ut ventus interrumpatur, obturato orificio* H*, aperiatur aliud* I*, vento exitum concedens.*

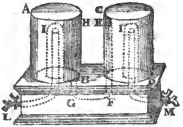
Problema 48.

180. *Duo vasa construere, quorum unum utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, nisi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ* Vasa concordiæ *vocantur.*

Reso-

(a) In Magisterio Naturæ et Artis lib. 5. cap. 3. artif. 25 f. 197.

RESOLUTIO.



1. Sint AB & CD duo vasa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter se communicent.
2. In utroque vase aptetur ad fundum diabetes (§. 72), ita ut orificium tubi minoris I sit infra orificia E & H tubi recurvi EFGH..

Quodsi vas AB vino repleatur, donec lumen I sit in libella ejus; nihil effluet (§. 72). Sed si vas alterum CD aqua adimpleas totum; per tubum EFGH vas alterum AB ingreditur (§. 34 *Hydrost.*) & quantitatem liquoris ibidem auget. Quare cum jam utrinque liquor ultra orificium I ascendat; per M omnis aqua ex vase CD, per L vero vinum omne ex vase AB effluet (§. 72). *Q. e. d.*

PROBLEMA 49.

181. *Vas construere, quod tantum vini effundit, quantum aquæ infuderis.*

RESOLUTIO.



1. Fiat vas ADBC in duas cavitates per diaphragma GF divisum & undiquaque contra accessum aeris probe munitum.
2. Operculo AH afferruminetur tubulus HI per cavitatem unam GB ad fundum fere vasis CB pertingens.
3. Cavitates duæ inter se communicent tubo recurvo LK.
4. Denique cavitati alteri immittatur tubulus MN & utraque cavitas instruatur foramine cochlea munito, ut, si opus fuerit, liquor infundi & rursus effundi possit.

Quodsi enim cavitatem AF vino repleas, nihil infusi per MN effluet (§. 34 *Hydrost.*). Enimvero si per tubulum HI aquam cavitati alteri affundas; aer per tubum KL in cavitatem alteram propellitur, ideoque vinum per tubum MN expellit.

PROBLEMA 50.

182. *Vas construere, quod liquorem excipit, donec fuerit plenum, si constanter eum affuderis; sed ne guttam amplius admittit, ubi semel cessaveris.*

RESOLUTIO.



1. Vas AB per diaphragma CD in duas cavitates ACD & CBD dividatur, quarum superior aperta esse potest.
2. Ad diaphragma in cavitate superiore AD aptetur diabetes GF: sub dia-



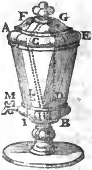
diaphragmate autem in cavitatem inferiorem hiet tubulus H.

Quodsi aquam constanter affundas, ea per diabetem GF defluet in cavitatem inferiorem CB (§. 72) aeremque per tubulum H expellet. Sed si aliquamdiu desistas, aer tubum longiorem diabetæ replebit, excepta parte FE aquæ immersa. Nihil ergo amplius per tubum istum in cavitatem BC defluet.

PROBLEMA 51.

183. *Vas construere, ex quo per idem orificium vel aqua, vel vinum fluit, prout desideraveris, vel etiam mixtum ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.



1. Sit vas AB per diaphragma CD in duas cavitates divisum.
2. In operculo vasis AE fiant duo foramina F & G, per quæ aeri in utramque civitatem aditus patet.
3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB descendere possunt.
4. Ex tertia hac cavitate procedat tubulus M.

Quodsi foramen G obtrudes, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini cessabit, fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodsi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

SCHOLION.

184. *Ex his principiis innumera alia derivare licet.*

CAPUT VI.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIO 6.

185. A*lveus fluminis* est cavitas in superficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO 7.

186. *Alveus naturalis est*, qui a natura effectus est. *Alveus* vero *artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLION.

187. *Istiusmodi alveos artificiales parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas* (§. 925 Mech.). *Germanico idiomate alveus naturalis* der wilde Bach, *alveus autem artificia* is der Mülgraben *appellatur.*

DEFI-

Definitio 8.

188. *Sectio alvei* est planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur

Scholion.

189. *Ponamus aquam intra alveum totam subito abire in glaciem & secari plano ad fundum alvei perpendiculari. Quæ hinc prodit sectio, erit ea, quæ nobis hic sectio alvei vocatur.*

Definitio 9.

190. *Sectio naturalis* est sectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* sectio alvei artificialis.

Scholion.

191. *Definitio ideo sectionis fluminis, quam dedimus, cum de molendinis ageremus* (§. 913 Mechan.), *est sectionis artificialis, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.*

Corollarium 1.

192. Quoniam constat alveos naturales figuram habere prorsus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commode reduci nequit; sectio naturalis figura plana irregularis est.

Corollarium 2.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedi habent; sectio artificialis est rectangulum parallelogrammum (§. 462 *Geom.*).

Scholion.

194. *Qualis figura sit sectio artificialis jam ostendimus alibi* (§. 914 Mechan.). *Potest vero figura quæcunque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus basis altitudini fluminis æqualis. Unde in sequentibus per sectionem intelligemus rectangulum, cujus latitudo eadem cum latitudine fluminis, nisi res ipsa loquatur posse quamcunque sectionem supponi.*

Definitio 10.

195. *Sectiones* dicuntur *æqueveloces*, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero sit velocitas seu celeritas media, commodius docebitur deinceps.

Definitio 11.

196. *Sectio velocior* est, per quam aqua celerior fluit; *Sectio tardior*, per quam fluit tardior.

Definitio 12.

197. *Flumina in statu manente* sunt, si superficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, sed eadem manet in eodem loco profunditas.

Scholion.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi sit magis, alibi minus profundum.*

Definitio 13.

199. *Flumen intumescit*, si superficies aquæ intra alveum attollitur; *detumescit*, si eadem deprimitur.

Theorema 18.

200. *Aquæ libere fluentis in alveo declivi cursus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter pressionem, quam inferior sustinet a superiori.*

Demonstratio.

Aqua enim fluidum grave est & quidem gravitatis eximiæ (§. 64 *Hydrost.*). Sed gravia per declivia seu ad horizontem inclinata motu accelerato deorsum ruunt (§. 284 *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu accelerato ruere debet, atque ideo cursus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem assurgit; inferiori incumbit superior. Enimvero motus aquæ ob pressionem, quam a superiore sustinet, perinde ac cadendo

per aliquam altitudinem, acceleratur (§. 48). Ergo cursus fluminis acceleratur quoque per pressionem, quam aqua inferior a superiore sustinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

201. Quo declivior ideo fundus alvei est, eo celerius aqua per eundem decurrit.

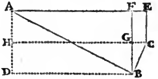
COROLLARIUM 2.

202. Quo profundior aquæ in alveo horizontali altitudo est, ad quam intra alveum assurgit, eo celerior cursus fluminis.

COROLLARIUM 3.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur, quam ab eo remotior; quo fundo propior eo cursus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM 4.



204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquisita est ut radix altitudinis AD (§. 287 *Mechan.*); aqua etiam si libere fluit per canalem declivem AB in B, eam celeritatem acquirere debet, quæ est ut radix altitudinis AD.

COROLLARIUM 5.

205. Quodsi aqua per foramen B egrederetur ex vase, in quo ad altitudinem BF ipsi AD æqualem consisteret; ejus quoque celeritas esset ut radix altitudinis BF sive AD (§. 48). Aqua igitur per canalis inclinati sectionem eadem velocitate movetur, ac si flueret ex vase per lumen sectioni congruens a superficie aquæ tantundem remotum, quantum sectio ab horizontali per initium canalis ducta distat.

THEOREMA 19.

206. *In qualibet sectione canalis inclinati celeritas aquæ libere fluentis major est in fundo, quam in superficie.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur per originem (*Vid. Fig.* §. 204) canalis A linea horizontalis AE, sitque sectio, per quam aqua fluit BC, quæ est ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipsi AE parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230 *Geom.*) & FG = EC (§. 257 *Geom.*), consequenter FB > FG vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea est, quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB sibi comparasset (§. 287 *Mech.*). Major igitur celeritas in B quam in C (§. *cit.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

207. *Sequitur ex his, quæ demonstrata sunt, fluminis cursum continuo celeriorem fieri debere, quo longius juxta fluvium progrederis: id quod tamen experientiæ parum convenire videtur. Tenendum itaque & ripas, & fundi inæqualitates causari resistentias, per quas celeritas continuo imminuitur, imo modo acquisita rursus extinguitur. Sed de his impedimentis accidentalibus nostrum jam non est dicere. Id tantummodo inculcandum esse censemus, cum declivitas fundi exigua sit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam esse, cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad descensum impendatur* (§. 261 Mech.).

DEFINITIO 14.

208. Per *celeritatem* seu *velocitatem mediam* intelligo eam, qua si aqua flueret omnis per sectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. *Hinc intelligitur, cur sectiones æquiveloces appellaverimus eas, per quas aqua eadem celeritate media fluit* (§. 195). *Quoniam enim aqua inferior celerior fluit superiori ob diversam pressionem, & fundi declivitas diversa diversæ quoque celeritatis causa est; per sectiones eadem celeritate variabili non fluit*

fluit aqua, nisi eadem & æquales, & similes fuerint, ideoque theoremata de sectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem, quam habere possunt, nisi variabilis celeritas ad mediam quandam constantem reduceretur.

THEOREMA 20.

210. *Per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.*

DEMONSTRATIO.

Per sectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195). Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per sectionem fluit, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208) & sectiones æquales sint *per hypoth.* eodem tempore per sectiones æquales & æqueveloces æquales aquarum quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

211. Quodsi ergo sectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris æquetur (§. 20 *Arith.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem, consequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM 2.

212. Et quoniam per sectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplam quadrupla aquæ quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210). Quantitates aquarum per æqueveloces sectiones fluentes eodem tempore sunt inter se ut sectiones.

THEOREMA 21.

213. *Per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ sectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate, qua fluit per A. Concipiatur sectio infinite parvæ crassitiei, & huic respondens aqua transeat tempusculo infinite parvo per sectionem A. Quoniam celeritas media in sectione B dupla est *per hypoth.*, dum aqua a sectione A distat intervallo crassitiei isti respondente, altera a B duplo istiusmodi intervallo distare debet (§. 33 *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ tempusculo infinite parvo eodem fluit per sectionem B. Jam cum tempus quodcunque in istiusmodi tempuscula æqualia resolvi possit, & singulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonstrata*; evidens est quod omnibus istis tempusculis simul sumtis, hoc est dato quocunque tempore aquæ per sectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum quacunque; per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 22.

214. *Si sectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes sunt in ratione composita sectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per sectionem S celeritate media C quantitas aquæ Q, & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque sectionem *s* alia quacunque celeritate *c* quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per sectionem S celeritate *c* quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per sectiones inæquales *s* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eædem in ratione sectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales sectiones S di-

versa celeritate C & *c* fluunt; erunt eædem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus ideo $Qm : mq = SC : sc$ (§. 213 *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : sc$ (§. 181 *Arith.*), consequenter quantitates aquarum Q & *q* per sectiones inæquales, nec aqueveloces fluentes sunt in ratione composita sectionum S & *s* atque celeritatum mediarum C & *c* (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

215. Si $Q = q$, erit $SC = sc$, ideoque $S : s = c : C$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si eodem tempore æquales quantitates aquarum per inæquales sectiones diversa celeritate media fluunt, erunt sectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM 2.

216. Quodsi præterea fuerit $S = s$, erit etiam $C = c$, ideoque si quantitates aquarum eædem per æquales sectiones fluunt; celeritas media eadem est, consequenter sectiones æqueveloces sunt (§. 195).

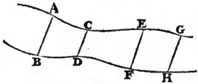
COROLLARIUM 3.

217. Quodsi ponatur $C = c$; erit etiam $S = s$, ideoque si celeritas media eadem, & quantitates aquarum eodem tempore per sectiones æquiveloces fluentes æquales; sectiones quoque ipsæ æquales sunt.

COROLLARIUM 4.

218. Quoniam $Q : q = SC : sc$ (§. 214); erit $qSC = Qsc$ (§. 297 *Arith.*) & hinc $C : c = Qs : qS$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, celeritates mediæ sunt in ratione composita ex reciproca sectionum & directa quantitatum aquarum, quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA 23.



219. *Si fluvius fuerit in statu manente, per omnes sectiones quomodocunque inæquales* AB, CD, EF, GH *aquæ eadem quantitas eodem tempore fluit.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per sectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere, quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, ideoque fluvius in alvei ABDC parte continuo intumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197). Hoc cum sit contra hypothesin, aquæ per sectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Ponamus ex adverso per sectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, ideoque fluvius in parte alvei ABDC continuo detumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197) contra hypothesin. Aquæ igitur per sectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Quoniam itaque per sectionem inferiorem aliquam nec minor, nec major quantitas fluere potest, quam per superiorem quamcunque; per omnes omnino sectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROL-

Corollarium 1.

220. Quoniam Sectiones AB, CD, EF, GH inæquales ſunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per ſingulas fluunt; aqua per ſectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

Corollarium 2.

221. Flumen igitur coarctando aquæ celeritas augetur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altius aſſurgere (§. 206), ideoque fluvius intumeſcere debet (§. 199).

Corollarium 3.

222. Ex adverſo flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aquæ ibidem altitudo imminui (§. 206), ideoque fluvius detumeſcere debet (§. 199).

Corollarium 4.

223. Quoniam in quibuſcunque fluvii ſectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§. 219), ſectiones vero inæquales ſunt *per hypoth.*; celeritates mediæ in duabus quibuſcunque fluminis ſectionibus ſunt ut ſectiones reciproce (§. 215).

Scholion.

224. *Quæ corollariis tribus prioribus continentur, experientiæ conſona ſunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorem eſſe, ubi minor eſt fluvii latitudo; ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, niſi forſan ex accidente adſit quædam vorago. Uſu quoque in praxi receptum eſt, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.*

Theorema 24.

225. *Si fluvius intumeſcit, aqua fluens per quamlibet ſectionem dato quodam tempore eſt ad aquam, quæ ante intumeſcentiam ibidem fluxerat in ratione compoſita ſectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad ſectionem & celeritatem mediam priſtinam.*

Demonstratio.

Dum enim fluvius intumeſcit, aqua intra alveum fit altior, conſequenter non modo ſectio, verum etiam celeritas media (§. 199. 206) augetur. Nova igitur ſectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam priſtina. Quoniam vero ſectio major jam facta & priſtina ſpectari poſſunt inſtar ſectionum duorum fluminum, per quas aqua diverſa celeritate fluit (cum fluvius intumeſcens a ſeipſo differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, ſed ejuſdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit) aqua fluens per ſectionem auctam celeritate media aucta erit ad aquam fluentem æquali tempore per ſectionem priſtinam celeritate priſtina in ratione compoſita ſectionis auctæ ad ſectionem priſtinam & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediam priſtinam (§. 214). *Q. e. d.*

Corollarium 1.

226. Erit ideo augmentum aquæ fluentis ad aquam priſtinam æquali tempore fluentem, ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in ſectiones ad factum ex ſectione priſtina in celeritatem priſtinam (§. 193 *Arith.*).

Corollarium 2.

227. Quodſi ſectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit, cum parallelogramma ejuſdem baſis altitudinum rationem habeant (§. 389 *Geom.*), augmentum aquæ fluentis poſt intumeſcentiam erit ad aquam fluentem ante eandem, ut differentia factorum ex altitudine aquæ aucta in celeritatem mediam auctam, & ex altitudine priſtina in celeritatem priſtinam ad factum poſterius: id quod in alveo artificiali ſemper locum habet (§. 193).

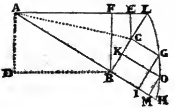
Scholion.

228. *Quando de altitudinibus ſectionum vel aquæ in alveo fuerit ſermo, per eam intelligitur ea perpendiculi a ſuperficie aquæ in fundum demiſſi pars, per quam aqua continuo fluit, ita ut, ſi fluxus omnis protinus ceſſare ponatur, nulla aqua in defluentis locum ſuccedente, nihil prorſus aquæ in ea remanere intelligatur. Etenim aquæ in cavitatibus fundi ſtagnantis nulla in fluxu habenda ratio eſt, cum perinde ſit ac ſi prorſus abeſſet fundo plano exiſtente. Vulgo auctores, qui de aquis currentibus ſcripſere,*

perpe-

perpendiculum istud, per quod aqua fluit, altitudinem vivam *vocare solent, quod sit altitudo aquæ vivæ: aqua enim currens ad differentiam stagnantis viva appellari solet* (§. 10 Mech.).

THEOREMA 25.



229. *Si fuerit* AB *canalis declivis, &* BC *altitudo sectionis continuetur, donec lineæ horizontali* AL *per initium ejus* A *ductæ, ubi superficies aquæ canalem secat, in* L *occurrat & circa axem* LB *describatur parabola quæcunque* LGH; *semiordinata* CG *exponet celeritatem aquæ in* C, BH *celeritatem fundo proximam & semiordinatæ intermediæ inter* CG *&* BH *celeritates quascunque in perpendiculari* BC *inter* C *&* B *intermedias*.

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim aquarum in C & B sunt in ratione subduplicata rectarum EC & FB (§. 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL *per hypoth.* erit CE ipsi BF parallela (§. 256 *Geom.*). Quamobrem cum sit LC : LB = CE : BF (§. 268 *Geom.*); celeritates in C & B etiam in ratione subduplicata rectarum CL & LB existunt (§. 124 *Analys. finit.* & §. 167 *Arith.*). Enimvero semiordinatæ parabolæ CG & BH sunt itidem in ratione subduplicata rectarum CL & BL (§. 402 *Anal. finit.*). Ergo etiam celeritates in C & B sunt ut semiordinatæ CG & BH (§. 167 *Arith.*), ideoque semiordinatæ CG & BH celeritates in C & B exponunt. Et quoniam de singulis semiordinatis intermediis idem eodem modo constat; semiordinatæ quoque intermediæ celeritates intermedias exponunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

230. Si ergo BC fuerit perpendiculum sectionis fluminis; spatium parabolicum CGHB est complexus omnium velocitatum istius sectionis.

COROLLARIUM 2.

231. Quoniam $CG^2 : BH^2 = CL : BL$ (§. 402 *Analys. finit.*), ideoque $BH^2 - CG^2 : BH^2 = BC : BL$ (§. 193 *Arith.*); celeritates vero aquæ in B & C ut BH ad CG (§. 229) perpendiculari sectionis existente CB (§. 225); datis celeritatum in C & B ratione, ac altitudine sectionis BC, inveniri potest axis BL parabolæ LGH.

COROLLARIUM 3.

232. Cum ducta IG ipsi BC parallela sit CG = BI (§. 238 *Geom.*), ideoque IH differentia semiordinatarum CG & BH, consequenter ut BC ad HI ita CG + BH ad parametrum (§. 404 *Analys. finit.*); datis CG & BH in eadem mensura, qua datur perpendiculum sectionis BC, in eadem quoque mensura reperietur parameter parabolæ mensurantis celeritates, & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA 52.

233. *Dato angulo inclinationis alvei* (Vid. Fig. §. 229) *seu canalis* ABD *una cum altitudine seu perpendiculo sectionis* BC *& celeritatum in* C *&* B *ratione, invenire distantiam fundi ab horizontali* AL *per initium alvei ducta atque distantiam* AF *ab initio alvei una cum hujus longitudine* BA.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam BD parallela ipsi AL *per hypoth.* angulus BAL angulo inclinationis ABD æqualis est (§. 233 *Geom.*), atque ideo cum angulus

AFB

AFB ſit rectus *per hypoth.* in triangulo ABF dantur omnes anguli (§. 245 *Geom.*). Porro ob angulum BAL = ABD *per demonſtr.*, & angulum ABL rectum *per hypoth.* in triangulo quoque ABL dantur omnes angulі (*§. cit. Geom.*).

2. Ex datis itaque CG & BH una cum BC inveniatur axis ſeu altitudo parabolæ BL (§. 231). Unde porro
3. Calculo trigonometrico definietur recta AB (§. 36 *Trigon.*) & hinc tandem
4. rectæ AF, atque FB (*§. cit. Trigon.*).

THEOREMA 26.

234. ***Si ſemiordinatæ** (Vid. Fig. 229) **CG & BH parabolæ menſurantis celeritates aquæ intra minutum ſecundum ſeu tempus quodcunque datum per perpendiculum ſectionis fluentis, ſint æquales ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis** BC **fluens dato tempore deſcribit, & in partibus hujus aſſignentur; ſpatium parabolicum** BCGH **definiet quantitatem aquæ per ſectionis perpendiculum** BC **tempore iſto fluentem.***

DEMONSTRATIO.

Concipiatur perpendiculum ſectionis BC diviſum in particulas infinite parvas, quæ deſignabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC conſtitutas. Quoniam vero ſemiordinatæ ad BC applicatæ ſunt æquales ſpatiis intra tempus datum veluti minutum ſecundum deſcriptis ab iiſdem particulis aquæ *per hypoth.* arcus parabolicus GH terminabit omnem aquam, quæ initio hujus temporis in BC conſtituebatur, conſequenter ſpatium BCGH definit quantitatem aquæ per perpendiculum BC intervallo unius minuti ſecundi fluentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

235. Quoniam ſpatium parabolicum GCL = $\frac{2}{3}$LC . CG & BLH = $\frac{2}{3}$BL . BH (§ 104 *Analyſ. infinit.*), BCGH vero illorum ſpatiorum differentia; ſi ex datis ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis fluens intra tempus datum deſcribit, quæratur axis parabolæ (§. 231); quantitas aquæ intra tempus datum per perpendiculum fluens determinari poteſt.

COROLLARIUM 2.

236. Quoniam in ſectione artificiali perpendicula omnia æqualia ſunt (§. 193); aqua fluens per totam ſectionem reperitur, ſi quantitas fluentis per perpendiculum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri poſſit (§. 235); etiam quantitas per totam ſectionem artificialem fluens definiri poteſt.

DEFINITIO 15.

237. Velocitates aquæ tranſeuntis (*Vid. Fig. §. 229*) per extrema C & B perpendiculi ſectionis dico brevitatis gratia *celeritates terminales*. Dantur autem celeritates terminales per ſpatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C deſcribit.

PROBLEMA 53.

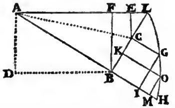
238. ***Datis celeritatibus terminalibus una cum perpendiculo ſectionis invenire celeritatem mediam.***

RESOLUTIO.

1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo ſectionis inveſtigetur quantitas aquæ per perpendiculum iſtud tempore dato fluens (§. 235).
2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendiculum ſectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculi ſectionis. *Q. e. i.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.



Etenim si ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis investigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendiculum istud BC fluens, spatium parabolicum BCGH prodit (§.234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fluit eodem tempore, quæ variabili fluit (§.208); & ob celeritatem eandem in singulis perpendiculi partibus, etiam infinite parvis (*§.cit.*), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendiculum sectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media basis, æquatur spatio parabolico BCGH. Quamobrem si area spatii hujus parabolici dividatur per perpendiculum sectionis BC; prodibit celeritas media quæsita (*§.375 Geom.*). *Q.e.d.*

PROBLEMA 54.

239. *Datis celeritatibus* (Vid. Fig. ut sup.) *terminalibus* CG *&* BH *una cum sectionis perpendiculo* BC, *punctum* K *in eodem definire, per quod aqua celeritate media fluit.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quæratur celeritas media (§.238) &
2. Ex parabolæ LOH, velocitates exhibentis, semiordinata BH, quæ maximam velocitatem repræsentat, resecetur recta BM celeritati mediæ æqualis.
3. In M erigatur perpendicularis MO secans parabolam in O.
4. Tum ex puncto O demittatur OK perpendicularis ad axem parabolæ BL, quæ erit semiordinata puncto O respondens (*§. 370 Analys. finit.*); atque ideo BK distantia puncti K, in quo aqua celeritate media movetur, a fundo;
5. quæ porro distantia calculo definitur, inferendo (*§. 404 Anal. finit.*), ut parameter, quam ex datis reperire licet (§. 232), ad aggregatum ex celeritate maxima BH & media KO, ita harum differentia MH ad distantiam quæsitam BK.

PROBLEMA 55.

240. *Data longitudine* (Vid. Fig. ut sup.) *canalis inclinati* AB *una cum angulo inclinationis* BAF, *& perpendiculo sectionis* BC, *invenire celeritates terminales, atque mediam una cum axe parabolæ celeritates mensurantis* BL, *& verticis* L *ab initio canalis* A *distantia* AL.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB & angulo inclinationis BAF invenitur in triangulo ABF distantia fundi ab horizontali BF, & in triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188) distantia verticis parabolæ ab initio canalis AL, una cum axe parabolæ BL (*§. 36 Trigon.*).
2. Subducta altitudine sectionis BC ab axe parabolæ BL modo invento, relin-

relinquitur CL. Unde datis abscissis LC & LB reperitur semiordinatarum CG & BH ratio (§. 402 *Anal. finit.*); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque
3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri potest (§. 238).

AXIOMA I.

241. *Eadem vi uno eodemque momento duplex motus produci nequit.*

Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe si simul agat in B & C, pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito absurdum habetur.

SCHOLION.

242. *Veritas hujus axiomatis per experimenta hydrostatica confirmatur. Etenim corpus grave in fluido specifice leviori descendit excessu ponderis sui supra pondus fluidi mole æqualis* (§. 88 Hydrost.); *quod vim gravitatis reliquam impendat in pressionem fluidi motui resistentis* (§. 114 Hydrost.) *experimentorum consensu. Vis igitur, qua fluidum subjectum premitur, non simul impenditur in descensum; nec vis, qua motus descendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam subjectam.*

THEOREMA 27.

243. *Aquæ per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob pressionem, quam inferior a superiori sustinet.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob pressionem, quam inferior a superiori sustinet, ita ut inferior celerior moveatur, quam vi descensus per declive acquisivit (§. 284 *Mechan.*). Quoniam motus per declive descendentis acceleratur gravitate respectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§. 261 *Mech.*), aut vis illa, qua agitur in planum inclinatum, simul impendi deberet ad descensum, aut vis, qua acceleratur motus descendentis simul impendenda esset pressioni aquæ subjectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, seu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod absurdum (§. 241). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

244. *Alii ita adfirmant veritatem propositionis præsentis. Si aqua* (Vid. Fig. pag. præc.) *in* B *omnem habet celeritatem, quam descensa per planum inclinatum* AB *acquisivit, ea est, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino* A *ad eandem horizontalem* DB, *nempe per altitudinem* AD *vel* BF *acquisivisset* (§. 303 Mechan.). *Ponamus jam aquæ* B *motum quoque accelerari ob altitudinem, incumbentis superioris: erit ergo major celeritas, quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc absurdum existimant, cum fluxus aquæ sit effectus gravitatis, quæ in descensum perpendicularem tota insumitur. Sed evidentia hujus demonstrationis pendet ab axiomate nostro. Tacite enim supponitur in descensu perpendiculari nullum esse effectum aquæ superioris in inferiorem, sed quamlibet aquæ guttam ita accelerari, ac si sola descenderet in medio non resistente. Id vero recte supponi, ex eo intelligitur, quod vis, qua ad accelerandum motum guttæ superioris impenditur, non una impendi possit in pressionem, qua inferioris guttæ acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua superior vel quiescit, vel lente admodum descendit inferioris motu per foramen accelerato. Hæc enim vis, quæ ad motum per pressionem accelerandam impenditur, non una consumitur in descensu prementis.*

SCHOLION 2.

245. *Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur, quam in superficie, propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in superficie & in fundo; major vero cum ibidem sit resistentia, quam prope superficiem; magis quoque retardetur.*

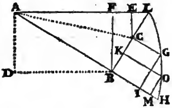
SCHOLION 3.

246. *Inprimis autem notandum est, quod* Mariottus (a) *annotavit aquam in alveo naturali fluminis ob eam, quam patitur, resistentiam* (§. 207) *brevi temporis spatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro infert, si declivitas alvei imminuatur celeritatem*

(a) Traité du Mouvement des Eaux part. 4. disc. 4. pag. 436. Oper.

tatem denuo successive, sed brevi temporis spatio imminui, ut per istam alvei partem lentius fluat aqua, quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari possit, ut in sequente alvei parte aqua celerius fluat, quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diversis alvei naturalis partibus diversa sit aquæ fluentis celeritas.

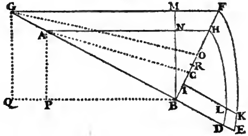
Scholion 4.



247. *Nulla in hoc difficultas posita est, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo* (§. 221), *experientia suffragante* (§. 224). *Etenim tum initium canalis ob altitudinem aquæ auctam, cui pars alvei naturalis respondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalis inclinati* A *ibi statuitur, ubi planum inclinatum ejusdem* BA *concurrit cum superficie aquæ* AC, *quemadmodum ex demonstrationibus anterioribus intelligitur, ut determinari possit descensus perpendicularis* EC *aquæ in superficie. Etenim aqua in* C *dici nequit descendisse intervallo* EC, *nisi aliquo tempore fuerit in* A. *Sed idem mox ostendemus apertius* (§. 249).

Scholion 5.

248. *Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque assumi posse aquam per perpendiculum sectionis eadem celeritate moveri; non tamen assumere licet, quod per totam sectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem resistentiam tardior esse soleat quam in medio. Quodsi ejusmodi canales inclinati, quales in theorematis antecedentibus supponimus, essent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret sine ulla immutatione.*



Theorema 28.

249. *Si in canale inclinato* AB *sectio* BC *obstruatur, ut aqua nonnisi per partem* BI *fluere possit, aqua intumescet, & ad statum manentem reducta celerius fluet per sectionem* BI, *quam ante, initio canalis* G *ultra priorem* A *promoto.*

Demonstratio.

Etenim dum Sectio BC ex parte obstruitur, per partem residuam apertam BI pristina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit, quæ ad sectionem BC nondum obstructam ferebatur; necesse est aliquid ejus continuo remanere ideoque altitudinem fieri majorem, consequenter aqua intumescit (§. 199). *Quod erat primum.*

Enimvero quando ad statum manentem reducitur, non amplius intumescit (§. 197), ideoque per sectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ

aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Neceſſe igitur eſt ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat ſecundum.*

Jam dum aquæ ſuperficies AC attollitur in OG *vi num.* 1 evidens eſt, quod ea canalem BA non amplius in A, ſed in G ſecet. Initium ideo canalis G ultra terminum priſtinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

250. Quoniam ibi vertex parabolæ FBE, ubi ſectionis perpendiculum BI productum horizontalem GF per initium canalis declivis AB ſecat, & ſemiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores ſunt rectis BD & IL, quæ ante intumeſcentiam aquæ ſeu obſtructionem ſectionis eaſdem in iiſdem punctis exponebant (§. 249); parabola FKE metitur celeritates in perpendiculo IB & majoris amplitudinis eſt, quam altera HLD, quæ metitur velocitates in perpendiculo majoris ſectionis BC.

COROLLARIUM 2.

251. Quodſi impedimentum, quo obſtruitur ſectio, fuerit minor CO, veluti CR; aqua ad O uſque intumeſcere nequit, ideoque per RO ſupra impedimentum effluit.

COROLLARIUM 3.

252. Celeritas aucta aquæ per ſectionem minorem fluentis BI in B ea eſt, quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas priſtina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquiſiviſſet (§. 303 *Mech.*). Quare cum celeritates per BN & BM acquiſitæ ſint in ratione ſubduplicata rectarum BN & BM (§. 87 *Mechan.*); erit celeritas aucta in B ad celeritatem priſtinam ut radix rectæ BM ad radicem alterius BN.

THEOREMA 29.

253. *Aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluit, quo fluit ex vaſe pleno cujus eadem, quæ ſectionis altitudo.*

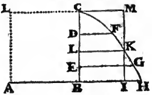
DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali, cum nulla ſit declivitas, aqua non fluit niſi quatenus inferior ſuſtinet preſſionem a ſuperiori. Ex vaſe aqua pleno per foramen ſimiliter fluit aqua vi preſſionis ejuſdem. quod utrumque per ſe manifeſtum eſt. Quodſi ergo lumen vaſis ſectioni canalis æquale ac ſimile, & altitudo fluidi utrobique eadem ſit; cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adeſt diverſitatis ratio. Quamobrem aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vaſe pleno, cujus eadem, quæ ſectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

254. *Sane ſi canalem horizontalem tegat quodam operimento, convenit is cum vaſe pleno, cujus eadem quæ ſectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo, quæ ante, conſequenter preſſio ab eadem pendens nullo modo varietur.*

COROLLARIUM 1.

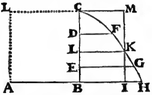


255. In ſectionis ideo perpendiculo BC canalis horizontalis AB quodlibet punctum D, E, vel B eandem celeritatem habet, quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis, nimirum aqua in B habet celeritatem, quam acquiſiviſſet cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquiſiviſſet, & ſimiliter aqua in D celeritatem habet, quæ cadendo per altitudinem DC acquiritur.

COROLLARIUM 2.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC (§. 86 *Mechan.*), ſeu celeritates ipſæ in ratione ſubduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87 *Mechan.*).

COROLLARIUM 3.



257. Quare si circa altitudinem sectionis BC describatur parabola CFGH, exponent semiordinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, (§. præc. & §. 402 *Analys. finit.*).

COROLLARIUM 4.

258. Quodsi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi sectionis BC determinetur; spatium parabolicum BCH quantitatem aquæ exhibet, quæ eodem tempore per sectionem fluit, quo aqua per B fluens describit spatium BH; id quod eodem modo patet, quo supra idem in canale inclinato vidimus (§. 234).

COROLLARIUM 5.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per perpendiculum BC eo tempore, quo aqua per B fluens ex B in H progreditur, est æqualis rectangulo ex BH in duas tertias partes altitudinis sectionis BC vel BC in $\frac{2}{3}$BH (§. 104 *Analys. finit.*), consequenter in ratione composita ex ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium.

SCHOLION 2.

260. *Hinc jam porro eodem, quo supra, modo determinantur alia fluxum aquæ in canali horizontali concernentia.*

SCHOLION 3.

261. *Resistentias, quas patitur cursus fluminis, cum ab obstaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.*

SCHOLION 4.

262. *Cæterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta sunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vasorum lateribus insculpta applicari possunt atque solent* (§. 48).

THEOREMA 30.

263. *Si aqua per canalem horizontalem fluit, celeritas media est ad maximam ut 2 ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Aquæ enim quantitas est (*Vid. Fig.* §. 257) ut $\frac{2}{3}$BH . BC (§. 259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum fluentis, si BI = $\frac{2}{3}$BH, eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, si per singula puncta eadem celeritate BI moveatur (§. 375 *Geom.*). Est igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero BI = $\frac{2}{3}$BH *per demonstr.* Ergo BI : BH = $\frac{2}{3}$: 1 = 2 : 3 (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

264. Quoniam aucta altitudine sectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine sectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 2.

265. Similiter quia imminuta altitudine sectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine sectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 3.

266. Si ex semiordinata maxima parabolæ mensurantis celeritates aquæ per sectionem canalis horizontalis fluentis BH resecetur BI = $\frac{2}{3}$BH & super BI construatur rectangulum CBIM, cujus latus IM parabolam in K secat; demissa ex K in altitudinem BC perpendiculari KL; erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM 4.

267. Quodsi jam porro inferatur ut quadratum spatii BH, quod aqua celeritate maxima fluens, dato tempore emetitur ad quadratum spatii LK, quod celeritate media describit eodem tempore, ita altitudo sectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L, per quod aqua celeritate media fluit, infra superficiem aquæ LC (§. 402 *Analys. fin t.*).

SCHOLION.

268. *Punctum istud a nonnullis* Centrum velocitatis *appellari solet, quia velocitas ipsi conveniens in locum omnium velocitatum inæqualium assumi potest.*

CAPUT

CAPUT VII.

De Percussione Fluidorum.

DEFINITIO 16.

269. *Percussio fluidi* est actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus sive fluidum, sive solidum impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum est alias (§. 523. 526 *Mechan.*).

COROLLARIUM 1.

270. Quoniam percussio dato aliquo tempore absolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu sunt; tota illa quantitas impingit, ideoque corpus percutit (§. 269), quæ tempore isto affluit, ac ideo percussio fluidorum successiva est.

SCHOLION.

271. *Fluida nempe consideranda veniunt instar multitudinis globulorum, quorum diversæ series sibi mutuo succedentes in corpus, quod percutitur, impingunt. Ut ideo appareat pro diversa densitate variari globulorum simul incurrentium, pro diversa celeritate serierum sibi invicem succedentium numerum.*

COROLLARIUM 2.

272. Quoniam plus massæ simul impingit, si fluidum fuerit densius, quam si fuerit rarius, plus autem massæ in densiore sub eodem volumine contineatur, quam in rariori (§. 8. 10 *Hydrost.*); in percussione fluidorum habenda est ratio densitatis fluidi, seu cæteris paribus major fit percussio a fluido densiori, quam a rariori.

COROLLARIUM 3.

273. Quoniam dato tempore, quo percussio successiva absolvitur, plus massæ in corpus percussum incurrit, si fluidum aliquod celerius, quam si tardius moveatur; in determinanda massa percutientis non solum densitatis (§. 272), verum etiam celeritatis ratio habenda, seu densitate existente eadem major est massa percutientis si fluidum celerius moveatur, quam si tardius; massæ scilicet in ratione celeritatum sunt.

COROLLARIUM 4.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum est, utpote cujus actio nonnisi in nisu quodam sese exerente consistit (§. 9 *Mechan.*), istiusmodi autem vires massa existente eadem in ratione celeritatum sunt (§. 280 *Mechan.*), in moleculis quoque simul incurrentibus major est vis percutiendi, si fluidum aliquod celerius movetur, quam si movetur tardius.

SCHOLION.

275. *Patet ideo celeritatem fluidi bis spectandam esse in percussione: nimirum primo in determinanda massæ multitudine, quæ agit in corpus percussum, & secundo in determinando gradu, quem vis a motu habet.*

DEFINITIO 17.

276. Si fluida in duo plana vel directe, vel sub eodem angulo obliquo incurrunt; *eodem modo incurrere* dicuntur.

SCHOLION.

277. *Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt, quia in percussione spectatur potissimum vis percutientis, quæ non modo a directione impingentis, verum etiam a massa & celeritate pendet.*

AXIOMA 2.

278. *Si idem fluidum eadem celeritate eodem modo in plana æqualia incurrit, eadem vi eadem percutit.* Nulla enim adest diversitatis ratio.

SCHOLION.

279. *Vis percutientis pendet a celeritate, massa & directione percutientis, nec non a plani percussi magnitudine. In hypothesi ideo axiomatis omnia eadem præsupponuntur, a quibus quantitas vis pendet, qua fit percussio. Ex generalibus ideo principiis metaphysicis (§. 193* Ontol.) *constat vim percutiendi hoc in casu differre minime posse.*

THEOREMA 31.

280. *Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione planorum.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A esse duplum plani B: erit ideo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142 *Arith.*), sive B = ½A. Quoniam itaque B & ½A eadem vi percutiuntur (§. 278), atque eadem ideo vi utraque pars ipsius A percuti debet (§. 87 *Arith.*); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero simpla, hoc est, vires percutientes sunt in ratione dupla, consequenter in ratione planorum percussorum A & B. Idem cum eodem modo ostendatur, in quacunque alia planorum ratione; patet in genere esse vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percussorum. *Q. e. d.*

THEOREMA 32.

281. *Si idem fluidum diversa celeritate, sed eodem modo in plana æqualia incurrit; vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat aqua dupla celeritate ejus, qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique sub eodem angulo incurrat. Dico vires, quibus percutiuntur plana A & B, esse ut quadrata celeritatum, seu vim, qua percutitur planum A esse quadruplo majorem ea, qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diversa celeritate in plana A & B incurrit *per hypoth.*, massa percutientis planum A est ad massam percutientis planum B, ut celeritas, qua movetur fluidum in planum A incurrens, ad celeritatem, qua movetur quod fertur in B (§. 273). Quamobrem fluida percutientia spectari possunt tanquam corpora inæqualis massæ. Enimvero si massæ inæquales sunt, vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 778 *Mechan.*), ideoque in casu præsente, ubi massæ sunt ut celeritates *per demonstrata*, in ratione duplicata celeritatum, vel uti in casu speciali vis, qua percutitur A quadruplo major est ea, qua percutitur planum B (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 33.

282. *Si fluidum idem diversa celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione composita ex simplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcunque in plana quæcunque A & B celeritatibus quibuscunque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate C, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit; erit $V:f = A:B$ (§. 280). Et si idem fluidum in planum B diversa celeritate C & c incurrit; erit in diversis istis percussionibus $f:v = C^2:c^2$ (§. 281). Habemus ideo $fV:fv = A.C^2:B.c^2$ (§. 213 *Arith.*), consequenter $V:v = A.C^2:B.c^2$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita ex simplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

THEOREMA 34.

283. *Si fluida diversæ densitatis eadem*

dem celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita densitatum fluidorum atque planorum.

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diversæ densitatis D & d in plana quæcunque A & B eadem celeritate dicanturque vires percutientes f & v: erit $f:v = D:d$ (§. 272). Incurrat jam fluidum densitatis D in planum aliud A, quod alteri B inæquale sit, dicaturque vis percutiens V: erit $V:f = A:B$ (§. 280). Erit itaque $fV:fv = A.D:B.d$ (§. 213 *Arith.*), consequenter $V:v = A.D:B.d$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita planorum A & B atque densitatum fluidorum D & d. *Q. e. d.*

THEOREMA 35.

284. *Si fluida diversæ densitatis diversa celeritate, sed eodem modo in plana inæqualia incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita ex rationibus planorum percussorum & densitatum fluidorum simplicibus atque duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

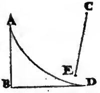
Sint duo plana æqualia B & B, in quæ incurrat fluidum idem seu ejusdem densitatis d diversis celeritatibus C & c, dicanturque vires f & v: erit $f:v = C^2:c^2$ (§. 281). Incurrant jam fluida diversæ densitatis D & d eadem celeritate c in plana inæqualia A & B, dicanturque vires percutientes V & f; erit $V:f = A.D:B.d$ (§. 283). Habemus itaque $fV:fv = A.D.C^2:B.d.c^2$ (§. 213 *Arith.*), consequenter $V:v = A.D.C^2:B.d.c^2$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires percutientes fluidorum diversæ densitatis in plana utcunque inæqualia celeritatibus quibuscunque incurrentium sunt in ratione composita ex simplicibus planorum A & B, densitatum fluidorum D & d atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *Habemus ideo mensuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim si indirecte impingit fluidum aliquod in planum, tum variatio non una de causa accidit, etsi theoremata in comparandis viribus sub eodem angulo impingentibus locum habeant.*

THEOREMA 36.

286. *Si aqua per declive AD delapsa directe incurrit in palmulam rotæ circa centrum C convertibilis; erit vis percutiens ut*

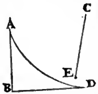


palmula ducta in radium EC, *densitatem aquæ & altitudinem lapsus* AB.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens absoluta est ut factum ex magnitudine palmulæ in densitatem aquæ & quadratum celeritatis, qua fluit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declive AD delapsæ est in ratione subduplicata altitudinis lapsus AB (§. 204), ideoque quadratum ejusdem ut ipsa hæc altitudo. Quare vis percutiens absoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ in densitatem aquæ & in altitudinem lapsus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis per hypoth. illa jam consideranda venit tanquam potentia ad axem in peritrochio

trochio applicata, cujus centrum motus in C, atque tum vis respectiva erit ut absoluta ducta in radium (§. 792. 153 *Mech.*). Est igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in densitatem aquæ, altitudinem lapsus AB & radium rotæ EC. *Q. e. d.*



SCHOLION.

287. *Atque hinc patet modus ad mensuram revocandi vires percutientes aquarum, rotas molares agitantium, easque inter se conferendi: quod ut evidentius pateat, sequentia adjicere lubet corollaria.*

COROLLARIUM 1.

288. Sint radii rotarum R & r, palmulæ P & p, altitudines lapsus A & a; cum densitatis, quæ eadem hic supponitur, in comparandis viribus percutientibus non habenda sit ratio (§. 181 *Arith.*); erunt vires percutientes V & v ut $R.P.A : r.p.a$ (§. 286).

COROLLARIUM 2.

289. Quodsi ponamus palmulas rotarum esse æquales erit $P = p$, ideoque $V : v = R.A : r.a$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium sunt in ratione composita radiorum rotarum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 3.

290. Quodsi ulterius fuerit $R = r$, hoc est, si rotæ fuerint æquales; erit $V : v = A : a$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, vires aquarum rotas molares æquales percutientium sunt in ratione altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 4.

291. Si fuerit $R = r$, hoc est, si altitudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V : v = P.A : p.a$, hoc est, vires, quibus palmulæ percutiuntur, sunt in ratione composita palmularum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 5.

292. Quodsi fuerit $A = a$, hoc est, si aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V : v = R.P : r.p$, hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM 6.

293. Quodsi præterea $R = r$; erit $V : v = P : p$, hoc est, si rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes sunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM 7.

294. Si vero fuerit præter $A = a$ etiam $P = p$; erit $V : v = R : r$, hoc est, si aqua per eandem declivitatem irruit in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM 8.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R.P.A = r.p.a$ (§. 288), ideoque $A : a = r.p : R.P$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, si altitudines lapsus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione composita reciprocis palmularum & radiorum seu altitudinum rotarum; vires percutientes æquales sunt & contra.

COROLLARIUM 9.

296. Quodsi præterea fuerit $r = R$: erit $A : a = p : P$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, si aqua incidit in rotas æque altas per declivitates, quarum altitudines rationem palmularum reciprocam habent; vires percutientes æquales sunt, & contra si rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debeant ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 10.

297. Si vero fuerit $P = p$; erit $A : a = r : R$, hoc est, si aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales; æquali vi percutiuntur, & contra si rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 11.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r.p = R.P$ (§. 295), idenque $R : r = p : P$ (§. 299 *Arith.*), hoc est, aqua per eandem declivitatem delapsa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ sunt in ratione reciproca radiorum seu altitudinum earundem.

COROLLARIUM 12.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, ideoque si ejusdem fuerint latitudinis longitudinis rationem habeant (§. 389 *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, seu duæ rotæ sibi mutuo æquipollent, si ha-

si habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales.

Scholion.

300. *Hinc videmus in fluminibus admodum latis construi rotas molares, quæ exiguæ sunt altitudinis, sed magnæ longitudinis, latitudine defectum altitudinis compensante.*

Theorema 37.

301. *Si plana per fluida diversæ densitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; resistentiæ, quas experiuntur, sunt in ratione composita ex rationibus planorum & densitatum fluidorum simplis & celeritatum duplicata.*

Demonstratio.

Etenim fluidum quiescens eadem vi resistit plano per ipsum lato, qua impingeret in idem planum, si ipsum quiesceret & fluidum moveretur ea celeritate, qua planum fertur, eadem in utroque casu supposita directione: id quod per se manifestum assumitur. Jam vero vires, quibus plana percutiuntur quiescentia a fluidis directe impingentibus, sunt in ratione composita densitatum & planorum simpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires, quibus fluida directe resistunt planis per ea latis, sunt in ratione composita densitatum fluidorum ac ipsorummet planorum simplis & celeritatum, quibus per eadem feruntur, duplicata. *Q.e.d.*

Corollarium 1.

302. Quodsi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, densitate existente eadem, vires quibus ipsis resistitur, sunt in ratione simplici planorum & duplicata celeritatum, quibus ea per fluidum feruntur (§.181 *Arith.*).

Corollarium 2.

303. Quodsi porro plana fuerint æqualia; resistentiæ, quas patiuntur, erunt ut quadrata celeritatum.

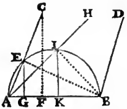
Corollarium 3.

304. Si vero celeritates fuerint æquales, vires, quibus planis resistitur, erunt in ratione planorum.

Definitio 18.

305. *Celeritatem absolutam* appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; *Respectivam* vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

Scholion.



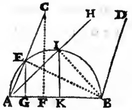
306. *Ponamus fluidum celeritate ut* AC *oblique incurrere in planum* AB *sub angulo incidentiæ* BAC; *celeritas illa respectiva dicitur, quæ in im actu directo æquipollente eidem substituenda venit.*

Theorema 38.

307. *Si fluidum indirecte impingit* (Vid. Fig. §. 306) *in rectam* AB *juxta lineas parallelas* AC *&* BD; *celeritas absoluta est ad respectivam ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ.*

Demonstratio.

Exponat recta AC celeritatem absolutam & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC resolvitur in laterales CF & AF eidem simul æquipollentes (§. 245 *Mech.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit secundum directionem AF, sed tantummodo secundum perpendicularem CF, juxta



quam fluidi motui resistit; evidens est celeritatem respectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodsi AC sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli incidentiæ CAF (§. 2 *Trigon.*). Quare cum sit celeritas absoluta ad respectivam ut AC ad CF *per demonstr.* erit illa quoque ad hanc ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

308. ***Si fluidum indirecte impingit in rectam*** (Vid. Fig. ut sup.) AB ***juxta lineas parallelas*** CA & BD; ***massa ejus, qua percussio indirecta fit, est ad massam, qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.***

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis: evidens est eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB, quam ad rectam BE, consequenter si BD exponat celeritatem fluidi, qua fertur veluti spatium, quod decurrit fluidum isto tempusculo, quo absolvitur percussio; erit quantitas seu massa fluidi, quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas, ad massam, quæ ad eandem juxta directionem perpendicularem afflueret, ut BE.BD ad AB.BD, consequenter ut BE ad AB (§. 181 *Arith.*). Jam si AB sumatur pro sinu toto, erit BE sinus anguli incidentiæ EAB (§. 2 *Trigon.*); consequenter massa fluidi, qua percussio indirecta fit, ad massam, qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

309. ***Si fluidum aliquod*** (Vid. Fig. ut sup.) ***in rectam*** AB ***indirecte impingit, vis qua indirecte percutitur, est ad eam, qua eadem recta*** AB ***ab eodem fluido*** CABD ***juxta directiones parallelas*** AC & BD ***affluente directe percuteretur, in ratione duplicata sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.***

DEMONSTRATIO.

Etenim vires, quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 *Mech.*), scilicet vis directa est ad indirectam ut massa, quæ in percussione directa ad rectam AB defertur, ad massam, quæ ad eandem indirecta affluit, & ut celeritas absoluta ad respectivam. Enimvero & massa in percussione directa est ad massam in indirecta, & celeritas absoluta ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 307. 308). Est igitur vis percutiens directa ad indirectam in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 41.

310. *Si fluidum oblique impingat in rectam* (Vid. Fig. pag. præc.) AB *juxta directiones parallelas* AC & BD *in ipsam delatum, & ex* B *demittatur perpendicularis* BE *in* AC, *ex* E *vero denuo demittatur* EG *ad* AB *perpendicularis; vis, qua fluidum urget directe rectam* AB, *est ad vim, qua eam urget indirecte, ut tota* AB *ad segmentum ejus* BG.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB : BE = BE : BG (§. 330 *Geom.*) & AB ad BE ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ BAC (§. 2 *Trigon.*); consequenter BG est tertia proportionalis ad sinum totum & sinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 216 *Arith.*). Quare cum sit vis, qua percutitur recta AB directe, ad eam, qua indirecte percutitur, in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 309); erit etiam illa ad hanc ut tota recta AB ad segmentum ejus GB (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

311. Quoniam GB < AB (§. 84 *Arith.*); vis quoque, qua recta AB a fluido directe percutitur, est ea, qua indirecte percutitur, major.

COROLLARIUM 2.

312. Quodsi angulus incidentiæ fuerit IAB, rectæ AB segmentum vi indirectæ respondens erit BK (§. 310). Quare cum sit sub angulo incidentiæ CAB vis directa ad indirectam ut AB ad GB & sub angulo incidentiæ minore HAB ut AB ad KB (§. cit.); vis directa ad indirectam sub angulo incidentiæ majore minorem rationem habet quam sub minore (§. 205 *Arith.*), consequenter vis indirecta sub angulo incidentiæ minore minor est, quam sub majore (§. 206 *Arith.*): unde decrescente angulo incidentiæ etiam vis percussionis decrescit, atque directione AC coincidente cum AB, hoc est si fluidum juxta directionem AB movetur, percussio nulla est.

COROLLARIUM 3.

313. Quoniam vis directa sub angulo incidentiæ CAB est ad indirectam ut AB ad GB, sub angulo vero incidentiæ HAB ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ sub diversis angulis incidentiæ eandem rectam AB percutientes sunt inter se ut rectæ GB & KB (§. 196 *Arith.*).

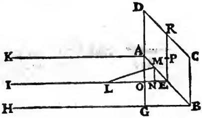
COROLLARIUM 4.

314. Quodsi fluidum feratur celeritate V, vis directa, qua percutitur recta AB, exponitur per $V^2 . AB$ (§. 282). Quare cum sit vis directa ad indirectam ut AB ad GB, angulo incidentiæ existente CAB (§. 309); reperietur vis indirecta $\frac{V^2 . AB . GB}{AB} = V^2 . GB$, ideoque vis indirecta exponitur per $V^2 . GB$ angulo incidentiæ existente CAB.

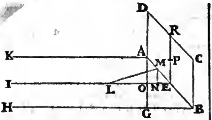
PROBLEMA 56.

315. *Determinare, vim quam ventus indirecte impingens in alas molendini exerit ad eas convertendas.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.



Repræsentet recta IO axem, atque planum ADCB alam, in quam ventus secundum directiones obliquas KA & HB agit. Ala axem, cui perpendiculariter insistit, secet ad angulum obliquum AEI (§. 929 *Mech.*). Quoniam itaque ventus secundum directionem obliquam IE in planum AC circa axem IE convertendum agit *per hypoth.* ideo investiganda est vis, quam ventus ad planum ADCB circa axem IE convertendum



tendum adhibet dato angulo obliquitatis AEI, magnitudine alæ ADCB, ejus latitudine AB, & celeritate, qua aer movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendicularis: cum aer secundum directiones parallelas KA & HB deferatur ad rectam AB, non plus aeris ferit planum obliquum ad axem ADCB, cujus latitudo AB, quam planum æque altum axem ad angulos rectos secans, cujus latitudo AG. Exponit igitur recta AG quantitatem aeris planum simul ferientis. Jam porro exponat EL celeritatem, qua movetur aer, cujus densitas sit $=d$; erit massa aeris, qua percussio absolvitur in puncto E, ut AG ducta in densitatem ac porro in LE.
2. Demittatur ex L recta LM ad AB perpendicularis: evidens est perpendicularem LM exponere celeritatem respectivam, qua ventus in planum secundum directionem obliquam in E incurrens agit (§. 245 *Mech.*).
3. Quoniam vero ventus planum ADCB movere nequit nisi circa axem IO, circa quem convertendum; non omnem vim, quam habet a celeritate respectiva LM, in actionem suam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem OI; evidens est celeritatem LM resolvi in duas alias LN & MN, & eam, quæ est secundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.
4. Denique cum in P sit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 141 *Mech.*), ideoque massæ totius plani ADCB; patet vim, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IO convertendum, concipi posse tanquam applicatam ad punctum P & PE tanquam radium axis in peritrochio, cujus centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per $d.AG.LE.MN.EP$ (§. 153 *Mechan.*). *Q. e. i.*

PROBLEMA 57.

316. *Determinare situm alarum molendini vi venti indirecte impingentis agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, seu eas maxima celeritate convertit.*

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in problemate præcedente (*Vid. Fig. ut sup.*), dicaturque $AB = a$, $LE = b$, $EP = c$, densitas aeris $= m$, $GB = x$; erit $AE = EB = \frac{1}{2}a$ *per hypoth.* & ob IE rectæ HB parallelam $EO = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}x$ (§. 268 *Geom.*), & $AG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§ 417 *Geom.*).
2. Quoniam in $\triangle\triangle$ AGB & LME anguli ad G & M recti *per constr.* & $MEL = ABG$ (§. 255 *Geom.*): erit (§. 267 *Geom.*)

$$AB : AG = LE : LM$$
$$a : \sqrt{(a^2 - x^2)} = b : \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$$

3. Simi-

3. Similiter quia in △△ AEO & LMN anguli ad O & N recti *per construct.* & ob rectum LME *per constr.* & obliquum L triangulis LMN & LME communem angulus LMN = AEO (§.246 *Geom.*); erit (§.267 *Geom.*).

$$AE : EO = LM : MN$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}x = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : \frac{bx}{a^2}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

4. Quoniam vis, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IO convertendum, est ut m.AG. LE.MN.EP (§. 315); erit ea $= \frac{bm}{a^2}\sqrt{(a^2 - x^2)}\,bcx\sqrt{(a^2 - x^2)} = b^2cmx - \frac{b^2cmx^3}{a^2}$.

5. Habemus itaque (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$b^2cmdx - \frac{3b^2cmx^2dx}{a^2} = 0$$

$$1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = x$$

6. Quodsi jam a sumatur pro sinu toto, erit $\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$ sinus anguli GAB (§. 2 *Trigon.*), cujus complementum ad rectum est angulus AEI, sub quo planum ADCB axem IO secat. Sit itaque $a = 10000000$, erit $\tfrac{1}{3}a^2 = 33333333333333$, ideoque $x = 5773502$, cui in tabulis sinuum quam proxime respondent 35° 16′. Est itaque angulus GAB 35° 16′, consequenter AEI, qui quæritur, 54° 44′.

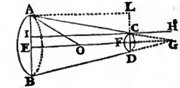
SCHOLION 1.

317. *Cum de constructione molendinorum vi venti agitandorum ageremus* (§. 929 Mechan.); *angulum* IEA 54° *graduum fieri præcepimus appendicem minutorum negligentes: in præsente nimirum negotio parum refert, sive is fiat 54°, sive 55°. Vulgo faciunt 45°, sed nulla theoria nixi.*

SCHOLION 2.

318. *Quoniam resistentia, quam patitur corpus intra fluidum motum, æquipollet percussioni eadem celeritate, qua ipsum movetur, a fluido factæ; non absimili modo determinari potest optimus situs gubernaculi, cujus ope naves in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem deprehenditur, qui ante, 54° 44′.*

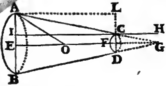
PROBLEMA 58.



319. *Datis radio basis majoris* AE *& altitudine segmenti conici* EF, *invenire altitudinem coni, cujus segmentum* ACDB *ita per fluidum motum, ut si basis minor eidem occurrat, & axis* EF *sit ad sectionem fluidi perpendicularis, seu horizonti parallelus, minimam patiatur resistentiam.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam perinde est, sive aqua in frustum conicum ACDB quiescens impingat, sive ipsum in fluido quiescente moveatur; ponamus aquam in quiescens impingere juxta rectas EG & IH. Impinget ergo in basin CD directe; in superficiem indirecte (§. 269), eodem semper manente angulo incidentiæ HCG vel ACI (§. 156 *Geom.*), quod directiones rectæ IH constanter parallelæ rectam AC in quocunque puncto sub eodem



eodem angulo ſecent (§. 233 *Geom.*). Quodſi jam AC ſumatur pro ſinu toto, erit AI ſinus anguli incidentiæ ACI (§. 2 *Trigon.*). Sit EF = IC = a, AE = b, AI = x; erit AC = $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Enimvero cum ſinus totus quantitas conſtans eſſe debeat, ſumatur FE = IC pro ſinu toto: erit itaque ut AC ad AI ita IC ad ſinum anguli incidentiæ, qui ideo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquæ impingere, quam ad rectam CL ipſi AI æqualem defertur, ideoque ad totam ſuperficiem non plus aquæ allabi, quam quæ annulum, cujus AI latitudo eſt, directe percuteret. Percuſſiones directæ in eodem fluido eadem celeritate lato ſunt ut plana, quæ percutiuntur (§. 280) ideoque annulus exponit percuſſionem directam ipſius & circulus minor CD percuſſionem, quam ipſe patitur, directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percuſſionum, circuli autem ſunt ut quadrata radiorum (§. 409 *Geom.*); reſiſtentia directa, quam patitur circulus minor CD recte exponitur per CF^2 ſive $IE^2 = b^2 - 2bx + x^2$ & reſiſtentia annuli per $AE^2 - EI^2 = 2bx - x^2$.

3. Quodſi jam inferatur: ut quadratum ſinus totius a^2 ad quadratum ſinus anguli incidentiæ $a^2x^2 : (a^2 + x^2)$, ita reſiſtentia directa annuli $2bx - x^2$ ad reſiſtentiam indirectam, quam patitur ſuperficies fruſti conici (§. 309); reperietur hæc $(2bx^3 - x^4) : (a^2 + x^2)$.

4. Quodſi jam addatur reſiſtentia directa baſis minoris $b^2 - 2bx + x^2$ *vi num.* 2 prodibit integra reſiſtentia fruſti $b^2 - 2bx + x^2 + \frac{2bx^3 - x^4}{a^2 + x^2}$ $= \frac{a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2}{a^2 + x^2}$.

5. Quoniam reſiſtentia minima, quam iſtiuſmodi fruſtum patitur *per hypoth.* differentiale ejus nihilo æquale (§. 63 *Analyſ. infinit.*), ideoque $(-2a^2bdx + 2a^2xdx + 2b^2xdx)(a^2 + x^2) - 2xdx(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2)$ per $(a^2 + x^2)^2$ div. = 0, hoc eſt,

$$\frac{2a^2bx^2dx - 2a^4bdx + 2a^4xdx}{(a^2 + x^2)^2} = 0$$

$$bx^2 - a^2b + a^2x = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} = a^2$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2 + a^2)}$$

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam *per hypoth.* erit (§. 268 *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Ergo $EG = \frac{2ab^2}{a\sqrt{(4b^2 + a^2)} - a^2}$

$$= \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}.$$

Enim-

Enimvero $b^2 = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$ in $\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$. Quare si hic valor substituatur; erit $EG = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$.

7. Fiat itaque $EO = \frac{1}{2}a$; erit $AO = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$: cui si æqualis fiat OG, erit $EG = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, atque ideo in G vertex coni, cujus frustum ACDB minimam patitur resistentiam, si ea conditione in fluido moveatur, quam fert hypothesis problematis.

Finis Hydraulicæ & totius Tomi Secundi Elementorum Matheseos.

ERRA-

ERRATA	CORRIGE
Pag. 3. *col.* 1. *lin.* 25. tempore T	*lege* tempore *t*
ibi *lin.* 27. ſpatium S	ſpatium *s*
ibi *lin.* 29. bis T	bis *t*
ibi *col.* 2. *lin.* 11.12. eadem celeritate feruntur, ſpatia eodem tempore motu	eodem tempore moventur, ſpatia motu
pag. 48. *col.* 2. *lin.* 15. altatitudo	altitudo
pag. 66. *col.* 2. *lin.* 22. temporis	tempora
pag. 83. *col.* 1. *lin.* 12. invicem ſit	invicem ſint
ibi *lin. ultima* univerſalis	univerſalius
pag. 89. *col.* 1. *lin.* 10. $a < b$	$a > b$
pag. 91. *col.* 2. *lin.* 24. æquale	æqualem
pag. 175. *col.* 2. *lin.* 1. ſemldinata	ſemiordinata.

Denique pag. 46. *ubi habetur* Problema 42, *lege* Problema 45. & *in ſequentibus ſimiliter uſque ad* §. 361; *pag. vero* 97. §. 405, *ubi habetur* Theorema 58, *lege* Theorema 59, & *ſimiliter in ſequentibus uſque ad* §. 653.